Teoría de Juegos

Joaquín Pérez
José Luis Jimeno
Emilio Cerdá

PEARSON
Prentice Hall

TEORÍA DE JUEGOS

EMILIO CERDÁ
Universidad Complutense de Madrid

JOAQUÍN PÉREZ
JOSÉ LUIS JIMENO
Universidad de Alcalá de Henares

PEARSON Prentice Hall

Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima • Montevideo
San Juan • San José • Santiago • São Paulo • White Plains

Datos de catalogación bibliográfica

CERDÁ TENA, E.; PÉREZ NAVARRO, J.;
JIMENO PASTOR, J. L.

TEORÍA DE JUEGOS

PEARSON EDUCACIÓN, S.A., Madrid, 2004

ISBN: 978-84-832-2799-2
Materia: Juegos, teoría de los (Investigación operativa) 519.8

Formato 170 × 240 Páginas: 528

TEORÍA DE JUEGOS

PÉREZ NAVARRO, J.; JIMENO PASTOR, J. L.; CERDÁ TENA, E.

ISBN: 84-205-3726-8
Depósito legal: M.

PEARSON PRENTICE HALL es un sello editorial autorizado de PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Equipo editorial:
Editor: David Fayerman Aragón
Técnico editorial: Ana Isabel García Borro

Equipo de producción:
Director: José Antonio Clares
Técnico: José Antonio Hernán

Diseño de cubierta: Equipo de diseño de Pearson Educación, S.A.
Composición: Copibook, S.L.

Impreso por: Top Printer Plus S.L.L.

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

Contenido

Prólogo

Este libro es el resultado de la experiencia docente en Teoría de Juegos de los autores en los últimos años. Procede de las clases impartidas desde el curso 1996-97 por Joaquín Pérez y José Luis Jimeno en la licenciatura y el doctorado en Economía de la Universidad de Alcalá, y por Emilio Cerdá en la licenciatura y el doctorado en Análisis Económico de la Universidad Complutense de Madrid, y en el doctorado en Economía Industrial de la Universidad de Castilla-La Mancha.

Hablando en términos generales e intuitivos, podríamos decir que la Teoría de Juegos estudia situaciones de conflicto y cooperación a las que denominamos juegos, en las que interactúan individuos racionales, analizando los comportamientos y resultados que son de esperar, bien mediante decisiones individuales (caso de los juegos no cooperativos), bien mediante acuerdos entre los participantes (caso de los juegos cooperativos).

La Teoría de Juegos ha aportado instrumentos de análisis (entre ellos el equilibrio de Nash) que han resultado eficaces y enriquecedores en el estudio de muchas situaciones de tipo económico (en el estudio, por ejemplo, de los mercados oligopolísticos, de las licitaciones públicas o de la regulación de mercados), y también de muchas situaciones de tipo social, político y legal. Ello se ha reflejado en los programas de estudios de economía y de las ciencias sociales en general.

En los últimos veinte años la Teoría de Juegos ha experimentado una expansión significativa en tres importantes aspectos. En lo que se refiere a la investigación académica no han cesado de aumentar las publicaciones especializadas en las que se estudia o aplica la Teoría de Juegos, tanto revistas como libros. En el aspecto docente, puede decirse que ha aumentado sensiblemente su influencia en los *currícula* de algunas licenciaturas y programas de doctorado, especialmente en los de Economía (tanto a través de asignaturas clásicas de corte microeconómico y macroeconómico, como de asignaturas específicas dedicadas al estudio de la Teoría de Juegos o a materias relacionadas con la información asimétrica, economía pública, etc.). Por último, en el aspecto de divulgación y presencia pública puede decirse que el conocimiento de la Teoría de Juegos ha crecido fuertemente a partir de la concesión en 1994 del Premio Nóbel de Economía a tres de sus primeros y más importantes creadores (John Forbes Nash, Reinhard Selten y John C. Harsanyi), y especialmente tras la publicación de una interesante biografía de Nash que fue llevada exitosamente al cine en el año 2001.

Este libro tiene tres objetivos principales. El primero es servir de curso de introducción a la Teoría de Juegos para los alumnos de la licenciatura en Economía. El segundo es servir de apoyo para los alumnos de doctorado en Economía, sea en la consolidación de algunos conceptos básicos, sea en la introducción a algunos conceptos avanzados. Y el tercero es servir de referencia a alumnos y profesionales de otras especialidades que tengan interés por los razonamientos subyacentes en la toma de decisiones estratégicas.

Describamos brevemente el contenido del libro, cuyo desarrollo se estructura a partir de la búsqueda de los conceptos de solución de un juego apropiados a las características particulares que definen dicho juego.

El Capítulo 1 tiene un carácter introductorio. En él se presentan las formas extensiva, estratégica y coalicional de representación de un juego, haciendo especial hincapié en los elementos y reglas que cada representación impone. Así mismo, se hace un repaso exhaustivo de aquellos conceptos de la teoría de la utilidad imprescindibles para una comprensión clara de las ganancias asociadas a los resultados de un juego.

Los Capítulos 2 y 3 presentan los juegos estáticos con información completa. En el Capítulo 2, tras una exposición detallada y progresiva de los conceptos de solución basados en la idea de dominación, se define y estudia el equilibrio de Nash en estrategias puras, y se presentan algunas de sus aplicaciones clásicas, entre ellas el oligopolio de Cournot y el duopolio de Bertrand. El Capítulo 3 completa el estudio de los juegos estáticos con información completa mediante el tratamiento de las estrategias mixtas y de los juegos de suma cero y abordando dos temas de carácter más avanzado, como son las estrategias racionalizables y los refinamientos del equilibrio de Nash para juegos en forma normal.

El Capítulo 4 presenta los juegos dinámicos manteniendo un contexto de información completa. Se presta especial atención a la distinción entre información perfecta e imperfecta y se refina el concepto de equilibrio de Nash mediante el criterio de la perfección en subjuegos, que permite descartar aquellos equilibrios no creíbles (no consistentes con el desarrollo del juego), junto a algoritmos que permiten su cálculo, la inducción hacia atrás e inducción hacia atrás generalizada. La principal aplicación del capítulo es el duopolio de Stackelberg.

El Capítulo 5 presenta de nuevo los juegos estáticos pero ahora en un contexto de información incompleta. Tras una introducción a la teoría de la decisión bayesiana, se define el equilibrio bayesiano, como concepto de equilibrio básico en presencia de información asimétrica. Se analiza de nuevo el modelo de duopolio de Cournot bajo supuestos de información asimétrica en los costes de las empresas y se presenta con detalle la aplicación de este concepto de equilibrio a las subastas.

En el Capítulo 6 se presentan los juegos dinámicos con información incompleta. Se trata del contexto más general y a él corresponden los conceptos de equilibrio más fuertes. Se define y estudia como principal concepto de equilibrio el equilibrio bayesiano perfecto en subjuegos. Se concluye con tres secciones de carácter avanzado, en las que se definen los refinamientos del equilibrio de Nash para juegos en forma extensiva, se introducen los juegos de señalización y se estudia el modelo de señalización de Spence.

El Capítulo 7 presenta los juegos repetidos. En él se aborda con detenimiento, en un contexto de información completa, la interacción repetida de un mismo juego, tanto en el caso de un número finito como de un número infinito de etapas, y se intenta dar respuesta a la cuestión: ¿bajo qué condiciones puede sustentarse como equilibrio (equilibrio de Nash o equilibrio de Nash perfecto en subjuegos) en un juego repetido un comportamiento cooperador? La cuestión anterior se analiza especialmente en los casos del dilema del prisionero repetido y del oligopolio de Cournot repetido.

Por último, el Capítulo 8 concluye el libro presentando una introducción detallada a los juegos cooperativos. Se estudia un primer concepto de solución, el Core, y algunas de sus propiedades. A continuación se estudia el *Nucleolus*, un refinamiento del Core. Finalmente se estudia un concepto con importantes aplicaciones a la justicia distributiva, el valor de Shapley.

En cuanto a la elección de los contenidos y al estilo expositivo, se han intentado alcanzar algunos equilibrios que nos parecen básicos.

El primer equilibrio se refiere a la búsqueda de una proporción razonable entre teoría, ejemplos y aplicaciones. Se han tratado con detalle algunas aplicaciones convencionales de la Teoría de Juegos a la economía, pero se ha hecho también hincapié en la comprensión y manejo de los conceptos a través de ejemplos sencillos, posibilitando el estudio de nuevas aplicaciones a la economía y a otras disciplinas.
Otro equilibrio importante tiene que ver con que se dé un énfasis mayor o menor a la exposición formal o a la exposición intuitiva de los conceptos. En este aspecto, el libro se sitúa en un punto intermedio entre los libros que motivan e ilustran con muchos ejemplos pero no entran en formalización matemática y los que son puramente matemáticos. La idea que nos ha guiado es: motivar, ilustrar con muchos ejemplos y aplicaciones (sobre todo de Economía), pero cuando se llega a un concepto definirlo formalmente en términos matemáticos, y cuando se llega a un resultado formularlo y demostrarlo en términos matemáticos, explicando claramente lo que se va haciendo.

Con respecto a la presentación más o menos detallada de los conceptos e ideas, hemos preferido en general, basándonos en nuestra experiencia docente, una elaboración minuciosa y progresiva de los conceptos, con ayuda de baterías de ejemplos, aun a riesgo de resultar reiterativos en alguna ocasión.

Aunque nadie sabe como el profesor de un determinado curso las posibilidades y las necesidades de sus alumnos, y en consecuencia el mejor modo de utilizar un libro de texto, sí puede merecer la pena comentar las dificultades de este texto y los requisitos de formación que en consecuencia son necesarios para estudiarlo.

Para comprender sin dificultades los distintos conceptos y técnicas que se presentan en este libro son necesarios un conocimiento básico de la teoría de la optimización y de la teoría de la probabilidad. En efecto, la capacidad de identificar y calcular óptimos es básica, ya que el concepto más importante y más utilizado del libro, el equilibrio de Nash, exige por definición un comportamiento optimizador en todos los jugadores. Por otra parte, el manejo de probabilidades condicionadas es básico para la comprensión y uso del equilibrio bayesiano, y el manejo de distribuciones de probabilidad continuas y discretas es necesario en cualquier aplicación de dicho concepto, en particular en las subastas. También es inevitablemente necesaria para un aprovechamiento satisfactorio del libro, como es natural, una cierta madurez matemática para comprender razonamientos matemáticos tanto en forma intuitiva como formal. En nuestra opinión, la formación

CAPÍTULO 1

Formas de representación de un juego

En este primer capítulo nos centraremos en las distintas formas de representación de un juego, imprescindibles para la comprensión del resto de los capítulos del libro. Se comienza por explicar qué situaciones caen en el ámbito de la teoría de juegos, se comenta brevemente cuándo surge la disciplina que nos ocupa y se introduce una primera clasificación de los juegos, así como la terminología básica. En el segundo apartado se tratan las preferencias y se estudia el concepto de función de utilidad ordinal correspondiente a una relación de preferencia. En el tercer apartado se estudia la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern, que nos va a permitir comparar loterías o distribuciones de probabilidad definidas sobre resultados posibles, y se estudian las distintas actitudes ante el riesgo. Posteriormente, en los tres siguientes apartados se estudian tres formas diferentes de representación de juegos: extensiva, estratégica y coalicional, respectivamente.

1.1. INTRODUCCIÓN

En el lenguaje ordinario, la palabra juego hace referencia a divertimento y también a actividad en que los participantes, sometidos a reglas que hay que cumplir, intentan ganar, pero pueden perder. Son muy conocidos los llamados juegos de mesa como el póker y el ajedrez, los juegos deportivos como el fútbol o tenis, o más recientemente, los juegos de computador. Suelen tener varios jugadores, pero a veces basta con uno (por ejemplo, el solitario y muchos juegos de computador).

En estos juegos, cada jugador intenta conseguir el mejor resultado posible (maximizar su utilidad), pero teniendo en cuenta que el resultado del juego no depende sólo de sus acciones, sino también de las acciones de los otros jugadores. Es esta característica de los juegos —**tomar las decisiones que más convengan para ganar, teniendo que cumplir las reglas del juego, y sabiendo que los demás jugadores también influyen**

en los resultados con sus decisiones— la que más valor tiene para su estudio sistemático, ya que muchas situaciones de interés para la economía y para otras ciencias (como biología, sociología o ciencia política), y que nada tienen que ver con los juegos arriba mencionados, comparten con ellos esa característica. La teoría de juegos se ocupa del análisis riguroso y sistemático de esas situaciones. Así pues, la teoría de juegos podría llamarse teoría de la decisión interactiva, que es diferente de la teoría de la decisión individual.

Aunque la teoría de juegos no se interesa especialmente por los juegos corrientes, sí los usa como ejemplos aclaratorios y toma de ellos gran parte de su terminología.

El campo de estudio de la teoría de juegos es muy general. No es preciso que haya entretenimiento, pero sí interacción. Aunque las aplicaciones mejor estudiadas de la teoría de juegos suponen que los jugadores son agentes (personas, empresas, gobiernos, etc.) racionales (su capacidad de razonamiento y de cálculo para identificar las acciones y estrategias que les conducen a resultados más deseables, es infinita), en otros casos los jugadores no necesitan ser personas ni grupos de personas (pueden incluso ser programas de computador o minúsculos seres vivos), y tampoco necesitan ser racionales.

En economía se estudian a menudo situaciones de decisión individual, en las que el agente intenta maximizar su utilidad, sin importar lo que hagan otros. Por ejemplo:

a) Elección de cantidades de cada bien a comprar por parte de un consumidor. Se suponen dados los precios de los bienes, así como la renta del consumidor.
b) Elección de cantidades de un bien a producir por parte de una empresa precio-aceptante. Se suponen dados los precios del bien y de los factores de producción y conocida la función de producción.
c) Elección del precio de un bien por un monopolista. Se suponen dados los precios de los factores de producción y la curva de demanda de dicho bien y conocida la función de producción.

Sin embargo, hay muchas otras situaciones en que la utilidad del resultado final no depende sólo de la acción del agente, sino también de las acciones de otros agentes. Ejemplos:

a′) Elección por la empresa A de la cantidad a producir de un bien o del precio de dicho bien, si también lo produce la empresa B, y ninguna más (duopolio). Los resultados finales para la empresa A dependen no sólo de sus propias decisiones, sino también de las decisiones de la empresa B.
b′) Elección por una empresa de automóviles de un nivel de gasto en publicidad. Las consecuencias finales de dicho gasto dependen del gasto realizado en publicidad por las empresas competidoras.
c′) Elección por un coleccionista de su puja (cantidad de dinero que ofrece) en la subasta de un cuadro. Los resultados (consigue o no que le adjudiquen el cuadro subastado) dependen también de la puja de los otros participantes.

Incluso ocurre a menudo que el planteamiento según el cual no importa lo que hagan otros agentes, es una simplificación de la realidad. Por ejemplo, la utilidad final de la decisión del monopolista de producir q unidades, depende también de los precios de los bienes sustitutivos, y esos precios son el resultado de acciones de otros agentes.

Muy breve historia de la Teoría de Juegos

Suele considerarse que el nacimiento de la teoría de juegos como disciplina ocurre en 1944 con la publicación de *Game Theory and Economic Behaviour* de Von Neumann y Morgenstern, aunque hay trabajos anteriores como los de los matemáticos Zermelo (1913), Borel (1921) y del propio Von Neumann (1928), en los que ya se anticipaba parte de las bases de la Teoría de Juegos. También son de destacar los trabajos pioneros de economistas como Cournot (1838) y Edgeworth (1881). Von Neumann y Morgenstern establecen las bases de lo que actualmente se conoce como Teoría de Juegos clásica, proporcionando una solución para juegos de suma cero (aquellos en los que los jugadores se encuentran en conflicto absoluto) y estableciendo los fundamentos para el análisis de juegos con más de dos jugadores. En este sentido, crean una teoría unificada y sistemática que incluye como casos particulares las aportaciones anteriores, y que hace factible su desarrollo posterior. Ya en los años cincuenta, Nash aporta algunos de los conceptos más importantes (equilibrio de Nash y solución de negociación de Nash) para una gama más amplia de juegos (no sólo para aquellos que modelizan el conflicto puro), y en los años setenta investigadores como Selten (en los juegos dinámicos) y Harsanyi (en los juegos con información incompleta) desarrollan los conceptos que permitirán la aplicación fructífera de la teoría de juegos a la economía y otras disciplinas. En años recientes, la teoría de juegos ha recibido un gran respaldo académico, al recibir el Premio Nobel de Economía algunos de sus pioneros y practicantes (en 1994 Nash, Selten y Harsanyi, y en 1996 Vickrey y Mirlees).

El lector interesado en la historia del nacimiento y primeros años de la teoría de juegos puede consultar el artículo de Rives (1975) y el libro de Poundstone (1992). Asimismo aparece mucha información interesante en los libros de McRae (1992) y Nasar (1998) que son biografías de Von Neumann y Nash, respectivamente.

Aunque todavía persisten algunas polémicas sobre los fundamentos, la relevancia y la metodología de esta disciplina, sus métodos y conceptos se aplican con éxito a otros campos aparte de la economía, como la biología (¡no es preciso que los jugadores sean humanos!), la sociología y la ciencia política.

Tipos de juegos

Cabe distinguir dos tipos básicos de juegos, o dicho de otro modo, dos enfoques básicos en el análisis de un juego, cooperativos y no cooperativos. En el enfoque cooperativo se analizan las posibilidades de que algunos o todos los jugadores lleguen a un acuerdo sobre qué decisiones va a tomar cada uno, mientras que en el enfoque no cooperativo se analiza qué decisiones tomaría cada jugador en ausencia de acuerdo previo.

Entre los juegos no cooperativos cabe hacer dos distinciones básicas, juegos estáticos o dinámicos, y juegos con o sin información completa.

En los juegos estáticos los jugadores toman sus decisiones simultáneamente (o dicho de manera más precisa, cada jugador decide sin saber qué han decidido los otros), mientras que en los dinámicos puede darse el caso de que un jugador conozca ya las decisiones de otro antes de decidir.

En los juegos con información completa, todos los jugadores conocen las consecuencias, para sí mismos y para los demás, del conjunto de decisiones tomadas, mientras que en los juegos con información incompleta, algún jugador desconoce alguna de esas consecuencias.

Terminología básica

Aunque posteriormente se presentará y se explicará con más detalle cada uno de los términos, a continuación damos una primera definición de la terminología básica que se utiliza habitualmente en Teoría de Juegos.

Jugadores

Son los participantes en el juego que toman decisiones con el fin de maximizar su utilidad. Son dos o más.

Acciones de cada jugador

Son las decisiones que puede tomar cada jugador en cada momento en que le toque jugar. El conjunto de acciones de un jugador en cada momento del juego puede ser finito o infinito.

Resultados del juego

Son los distintos modos en que puede concluir un juego. Cada resultado lleva aparejadas unas consecuencias para cada jugador.

Pagos

Cada jugador recibe un pago al acabar el juego, que depende de cuál haya sido el resultado del juego. El significado de dicho pago es la utilidad que cada jugador atribuye a dicho resultado, es decir, la valoración que para el jugador tienen las consecuencias de alcanzar un determinado resultado en el juego.

Estrategias. Perfiles de estrategias

Una estrategia de un jugador es un plan completo de acciones con las que éste podría proponerse participar en dicho juego. Un perfil de estrategias es un conjunto de estrategias, una por cada jugador.

Forma estratégica y forma extensiva

Son formas de describir un juego. Ambas especifican los jugadores, las acciones y los pagos. La forma estratégica (o forma normal) organiza la descripción en forma rectangular, centrando su énfasis en las estrategias de los jugadores (como si éstos fueran capaces de tomar todas sus decisiones de una vez), mientras que la forma extensiva lo hace en forma de árbol, resaltando la secuencia del juego, es decir, la manera en que se desarrollan o podrían desarrollarse las acciones de los jugadores para alcanzar los posibles resultados del juego. En el Apartado 1.4 se presenta más detalladamente la forma extensiva y en el Apartado 1.5 la forma estratégica.

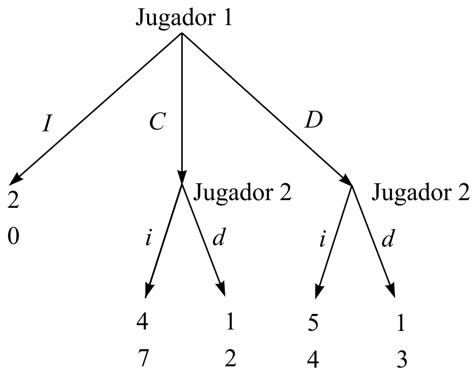
A continuación se presentan dos juegos muy sencillos que ilustran los términos introducidos.

Ejemplo 1.1

a) Juego 1 (juego de pares o nones). Dos individuos, a los que denominaremos Jugador 1 (J1) y Jugador 2 (J2), eligen de manera simultánea entre pares (P) o nones (N). Si los dos eligen lo mismo J2 tiene que pagar a J1 la cantidad de 5 euros. Si los dos eligen cosas distintas es J1 el que tiene que pagar 5 euros a J2. Por tanto, cada uno ha de tomar una decisión sin conocer la tomada por el otro, pero sabiendo que son ambas decisiones consideradas conjuntamente las que afectan al bienestar de cada uno de ellos. Toda la información relevante la podemos resumir en la siguiente tabla:

		Jugador 2	
		P	N
Jugador 1	P	5, −5	−5, 5
	N	−5, 5	5, −5

b) Juego 2. Dos jugadores toman sus decisiones de un modo secuencial. En primer lugar el Jugador 1 elige entre *I*, *C* y *D*. Si elige *I* se termina el juego y se alcanzan unos pagos de 2 y 0 (donde el primer número indica la ganancia del Jugador 1 y el segundo la del Jugador 2). Si elige *C*, entonces el Jugador 2 tiene la oportunidad de elegir entre *i* (alcanzándose unas ganancias de 4 y 7) o *d* (con ganancias de 1 y 2). Finalmente, en caso de que el Jugador 1 elija *D*, le toca el turno al Jugador 2 que puede elegir de nuevo entre las alternativas *i* y *d* pero alcanzándose en este caso unas ganancias para los jugadores de 5 y 4 con *i*, o de 1 y 3 con *d*. El siguiente árbol de juego nos recoge toda la información relevante:



En el juego de pares o nones está expresado en forma estratégica:

El conjunto de los jugadores es $J = \{1, 2\}$

El conjunto de las acciones de J1 es $A_1 = \{P, N\}$, y de J2 es $A_2 = \{P, N\}$.

El conjunto de las estrategias de J1 es $S_1 = \{P, N\}$, y el de J2 es $S_2 = \{P, N\}$.

Hay cuatro perfiles de estrategias que son (P, P), (P, N), (N, P) y (N, N), cada uno de los cuales lleva a uno de los resultados del juego.

Los pagos que reciben J1 y J2 para cada perfil de estrategias son:

$$u_1(P, P) = 5; \quad u_2(P, P) = -5$$
$$u_1(P, N) = -5; \quad u_2(P, N) = 5$$
$$u_1(N, P) = -5; \quad u_2(N, P) = 5$$
$$u_1(N, N) = 5; \quad u_2(N, N) = -5$$

En el juego 2 (está expresado en forma extensiva):

El conjunto de los jugadores es $J = \{1, 2\}$.

El conjunto de las acciones de J1 es $A_1 = \{I, C, D\}$, y de J2 es $A_2 = \{i, d\}$.

El conjunto de las estrategias de J1 es $S_1 = \{I, C, D\}$, y el de J2 es $S_2 = \{i\text{-}i, i\text{-}d, d\text{-}i, d\text{-}d\}$.

El significado de las estrategias de J2, por ejemplo d-i, es el siguiente:

«Jugar d si J1 juega C y jugar i si J1 juega D».

Hay 12 perfiles de estrategias, cada uno de los cuales conduce a un resultado del juego.

Los pagos de J1 y de J2 son:

$$u_1(I, i\text{-}i) = u_1(I, i\text{-}d) = u_1(I, d\text{-}i) = u_1(I, d\text{-}d) = 2$$
$$u_1(C, i\text{-}i) = u_1(C, i\text{-}d) = 4$$
$$u_1(C, d\text{-}i) = u_1(C, d\text{-}d) = 1$$
$$u_1(D, i\text{-}i) = u_1(D, d\text{-}i) = 5$$
$$u_1(D, i\text{-}d) = u_1(D, d\text{-}d) = 1$$

$$u_2(I, i\text{-}i) = u_2(I, i\text{-}d) = u_2(I, d\text{-}i) = u_2(I, d\text{-}d) = 0$$
$$u_2(C, i\text{-}i) = u_2(C, i\text{-}d) = 7$$
$$u_2(C, d\text{-}i) = u_2(C, d\text{-}d) = 2$$
$$u_2(D, i\text{-}i) = u_2(D, d\text{-}i) = 4$$
$$u_2(D, i\text{-}d) = u_2(D, d\text{-}d) = 3$$

1.2. FUNCIONES DE UTILIDAD. UTILIDAD ORDINAL

Sea X un conjunto de alternativas posibles, mutuamente excluyentes, entre las que debe elegir un agente (que puede ser un individuo, una familia, una empresa, un equipo de baloncesto...).

En X suponemos definida una relación binaria $\succsim$, llamada relación de preferencia, de manera que, para $x, y \in X$, $x \succsim y$ quiere decir que la alternativa x es preferida o indiferente a la alternativa y.

A partir de la relación de preferencia $\succsim$ se definen otras dos relaciones, de la siguiente forma:

1. La relación de preferencia estricta, $\succ$:

$$x \succ y \Leftrightarrow x \gtrsim y, \text{ pero no } y \gtrsim x$$

que se lee «x es preferido a y».

2. La relación de indiferencia, $\sim$:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x \gtrsim y, \text{ y también } y \gtrsim x$$

que se lee «x es indiferente a y».

Se supone que la relación de preferencia $\gtrsim$ es racional, en el sentido que recoge la siguiente definición.

Definición 1.1

La relación de preferencia $\gtrsim$ es racional si verifica las dos propiedades siguientes:

- Completitud: $\forall x, y \in X$, se tiene que $x \gtrsim y$ o $y \gtrsim x$ (o ambas).
- Transitividad: $\forall x, y, z \in X$, si $x \gtrsim y$ e $y \gtrsim z$, entonces, $x \gtrsim z$.

La propiedad de completitud significa que, dadas dos alternativas cualesquiera x e y, son comparables entre sí, en el sentido que es preferida x, es preferida y o son indiferentes.

A menudo puede ser conveniente (para simplificar expresiones y argumentaciones) asignar a cada alternativa en X un número, de manera que números más altos indiquen alternativas más deseadas. En ese caso la función U que asigna números a alternativas (**función de utilidad del agente sobre X**) puede ser cualquiera que «respete» las preferencias del agente. Se dice que dicha función U es compatible con dichas preferencias, o que es una representación de éstas.

Definición 1.2

Una función $U : X \to R$ es una **función de utilidad que representa la relación de preferencia** $\gtrsim$, si para todo $x, y \in X$, $x \gtrsim y \quad \Leftrightarrow \quad U(x) \geqslant U(y)$.

También se dice en este caso que U mide las utilidades (que dicho agente atribuye a las alternativas de X) en una escala ordinal.

Es fácil observar que si U es una función de utilidad de un agente, también lo será $V = f(U)$, siendo la función $f : R \to R$ estrictamente creciente.

Veamos algunos ejemplos de preferencias y utilidades ordinales.

Ejemplo 1.2

Sea $X = \{A, B, C\}$, donde A, B y C significan, respectivamente, «Semana gratis en Benidorm en agosto», «Renault Clio Turbodiesel» y «9.000 euros». Supongamos que nuestro agente prefiere estrictamente C a B y B a A.

Son funciones de utilidad ordinal compatibles con las preferencias expresadas las siguientes: U tal que $U(A) = 2$, $U(B) = 7$, $U(C) = 8$, y todas las funciones $V = f(U)$ con f estrictamente creciente, como $U - 5$, $U + 1$, $3U$, U^3, e^U, $(U - 2)/6$, etc. (a la última podríamos llamarla normalizada, porque asigna utilidad 0 a la opción menos preferida y utilidad 1 a la más preferida).

Ejemplo 1.3

Sea $X = \{(x, y) \in R^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$, en donde x e y representan cantidades respectivas de dos bienes A y B. Se trata, por tanto, de un conjunto de consumo para dos bienes.

En X se define la siguiente relación de preferencia:

$$(x, y) \gtrsim (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad xy \geqslant x'y'$$

Las siguientes funciones de utilidad son compatibles con las preferencias definidas,

$$U(x, y) = xy, \quad V(x, y) = axy + b, \quad \text{siendo } a > 0, \quad W(x, y) = 3^{(2xy-7)}$$

Obsérvese que las curvas de indiferencia no se modifican al cambiar la escala de utilidad, ya que sólo dependen de las preferencias subyacentes. Por ello, bastaría con la información que suministra la utilidad ordinal para resolver el problema de elección óptima de un vector (a, b) de cantidades de A y B, por parte de un consumidor que dispone para ello de un presupuesto fijo.

Ejemplo 1.4

Sea $X = R$, a interpretar como posibles resultados, para un agente, que son premios o castigos en dinero.

Definimos en X la siguiente relación de preferencia. Para $x, y \in X$,

$$x \gtrsim y \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant y$$

Son funciones de utilidad compatibles con la relación de preferencia definida las siguientes:

$$U(x) = x, \quad V(x) = ax + b, \quad \text{siendo } a > 0, \quad W(x) = (x + 7)^5, \text{ etc.}$$

En definitiva, todas las funciones son crecientes.

Condiciones de existencia y de unicidad de una función de utilidad

Veamos en primer lugar una proposición que nos da condiciones necesarias que debe cumplir una relación de preferencia para que pueda ser representada por una función de utilidad.

Proposición 1.1

Una condición necesaria para que una relación de preferencia $\succsim$ pueda ser representada por una función de utilidad es que sea racional.

Demostración:

Veamos que si existe una función de utilidad que representa las preferencias $\succsim$, entonces $\succsim$ debe cumplir las propiedades de completitud y transitividad. En efecto:

Completitud. Sea la función de utilidad U compatible con la relación $\succsim$. Para cada x, $y \in X$, se tiene que $U(x)$ y $U(y) \in R$. Por tanto, se tiene que cumplir que $U(x) \geqslant U(y)$ (lo que implica que $x \succsim y$), o bien que $U(y) \geqslant U(x)$ (lo que implica que $y \succsim x$), por lo que la relación de preferencia cumple la propiedad de completitud.

Transitividad. Sean $x, y, z \in X$. Supongamos que $x \succsim y$, $y \succsim z$. Veamos que entonces $x \succsim z$. En efecto:

$$x \succsim y \quad \Leftrightarrow \quad U(x) \geqslant U(y)$$

$$y \succsim z \quad \Leftrightarrow \quad U(y) \geqslant U(z)$$

Como el orden en los números reales verifica la propiedad transitiva se tiene que $U(x) \geqslant U(z)$, por lo que $x \succsim z$.

Cabe preguntarse si será cierto el recíproco, es decir, si toda relación de preferencia racional puede ser representada por una función de utilidad. La respuesta, en general, es no, como veremos posteriormente con un contraejemplo. Sin embargo, si el conjunto X es finito sí se cumple que toda relación de preferencia racional puede ser representada por una función de utilidad, como recoge el siguiente teorema.

Teorema 1.1 **(Teorema de existencia y unicidad de la utilidad ordinal)**

Sea X finito. Si las preferencias de un agente sobre X son racionales (completas y transitivas), existe una función U de X en R compatible con tales preferencias, es decir, tal que $U(x) \geqslant U(y) \quad \Leftrightarrow \quad x \succsim y$. Además, si V es una función de utilidad compatible con $\succsim$, se tiene que $V = f(U)$, siendo f una función estrictamente creciente.

Demostración:

Demostraremos el teorema en dos etapas. En primer lugar supondremos que nunca hay indiferencia entre dos elementos distintos de X. Posteriormente extenderemos el razonamiento al caso general.

1. El conjunto X está formado por n elementos. Suponemos que entre dos elementos distintos cualesquiera de X siempre hay preferencia estricta hacia uno de ellos. Ordenamos los elementos de X de la siguiente forma:

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}, \text{ de manera que:}$$

$$x_n \succ x_{n-1} \succ \cdots \succ x_2 \succ x_1$$

Definimos la función de utilidad $U(x_i) = i$, para $i = 1, 2, ..., n$. Se trata de una función de utilidad compatible con la relación de preferencia pues

$$x_i \succ x_j \quad \Leftrightarrow \quad i > j \quad \Leftrightarrow \quad U(x_i) > U(x_j)$$

Supongamos ahora que V es cualquier función de utilidad compatible con la relación de preferencia. Tiene que cumplirse que

$$\forall x_i \neq x_j, \quad x_i \succ x_j \quad \Leftrightarrow \quad V(x_i) > V(x_j)$$

Pero $x_i \succ x_j$ ocurre si y sólo si $i > j$. Por tanto, se tiene que

$$V(x_i) > V(x_j) \quad \Leftrightarrow \quad i > j$$

Para cada $x \in X$ podemos expresar $V(x) = f[U(x)]$, en donde $f : \{1, 2, ..., n\} \to R$, siendo $f(i) = V(x_i)$. f es estrictamente creciente, ya que

$$i > j \quad \Rightarrow \quad f(i) = V(x_i) > V(x_j) = f(j), \quad \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\},\ i \neq j$$

2. Extendamos el razonamiento anterior al caso general.

Entre los n elementos de X, tomemos un representante de cada clase de elementos indiferentes entre sí.

Sean $x_1, x_2, ..., x_k \in X$, tales que $x_k \succ x_{k-1} \succ \cdots \succ x_1$, de manera que para cada $x \in X$, existe x_i con $i \in \{1, 2, ..., k\}$, verificando que $x \sim x_i$.

Definimos $U(x) = U(x_i) = i$. U es una función de utilidad compatible con la relación $\succsim$. En efecto: $\forall x, y \in X$, sea $x \succsim y$, entonces $x \sim x_i$, $y \sim x_j$, con $x_i \succsim x_j$, por lo que

$$U(x) = i \geqslant j = U(y)$$

Por otra parte, sea V cualquier otra función de utilidad compatible con $\succsim$. Debe ser

$$V(x) = V(x_i) \geqslant V(x_j) = V(y)$$

Si $x \sim y$, entonces $V(x) = V(x_i) = V(x_j) = V(y)$

Si $x \succ y$, entonces $V(x) = V(x_i) > V(x_j) = V(y)$

Para $x \in X$, sea $x \sim x_i$, podemos poner $V(x) = V(x_i) = f[U(x_i)] = f(i)$.

f es una función $f : \{1, 2, ..., k\} \to R$ estrictamente creciente, ya que

$$i > j \quad \Rightarrow \quad x_i \succ x_j \quad \Rightarrow \quad V(x_i) > V(x_j) \quad \Rightarrow \quad f(i) > f(j)$$

Veamos a continuación un contraejemplo con el cual se demuestra que, en general, el recíproco de la Proposición 1.1 no se cumple.

Sea $X = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\}$. Se puede interpretar X como el conjunto de consumo de dos bienes para un agente económico. Vemos que el conjunto X no es finito, por lo que no es aplicable el Teorema 1.1.

En X definimos la relación de preferencia lexicográfica, de la siguiente forma:

$$(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad «x_1 > y_1» \quad \text{o} \quad «x_1 = y_1 \quad \text{y} \quad x_2 \geqslant y_2»$$

El nombre de esta relación de preferencia procede de la manera en que se ordenan las palabras en un diccionario. En este caso el bien 1 de consumo tiene la prioridad más alta en la determinación del orden de preferencia, tal como ocurre con la primera letra de una palabra en el orden en que aparece en un diccionario. Cuando la cantidad del bien 1 en las dos cestas de bienes coincide, entonces es la cantidad del segundo bien la que determina el orden de preferencia del consumidor.

Es fácil comprobar que la relación de preferencia lexicográfica verifica las propiedades de completitud y transitividad, por lo que es una relación racional.

Proposición 1.2

Sea $X = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\}$.

La relación de preferencia lexicográfica en X no es representable mediante ninguna función de utilidad.

Demostración:

Demostramos la proposición por reducción al absurdo. Supongamos que existe $U : X \to R$, función de utilidad compatible con la relación de preferencia lexicográfica.

Para cada $x_1 \geqslant 0$, se tiene que $(x_1, 2) > (x_1, 1) \quad \Rightarrow \quad U(x_1, 2) > U(x_1, 1)$. Como $U(x_1, 2)$ y $U(x_1, 1)$ son números reales, existe un número racional $r(x_1)$ tal que

$$U(x_1, 2) > r(x_1) > U(x_1, 1)$$

Sea x_1' con $x_1 > x_1'$. Se verifica que $r(x_1) > r(x_1')$, ya que

$$r(x_1) > U(x_1, 1) > U(x_1', 2) > r(x_1')$$

Por tanto tenemos definida una función

$$\begin{aligned} r : R &\to Q \\ x &\to r(x) \end{aligned}$$

en donde Q es el conjunto de los números racionales. Dicha función es inyectiva, ya que $x_1 \neq x_1' \quad \Rightarrow \quad r(x_1) \neq r(x_1')$. Pero esto nos lleva a contradicción ya que el conjunto de los números reales (que es el dominio de la función) es un conjunto infinito no numerable, mientras que el conjunto de los racionales (que es el conjunto final de la función r) es infinito numerable, lo cual es matemáticamente imposible para una función inyectiva.

A continuación veremos en qué condiciones se puede asegurar la existencia de una función de utilidad compatible con una relación de preferencia en conjuntos de consumo de un número dado (finito) de bienes.

Sea $X = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : x_i \geqslant 0$, para cada $i = 1, 2, ..., n\}$.

Sea $\succsim$ una relación de preferencia en X.

Definición 1.3

La relación de preferencia $\succsim$ definida en el conjunto X se dice que es continua si se mantiene en el paso a límite. Es decir, si verifica que para toda sucesión de pares $\{(x^n, y^n)\}_{n=1}^{\infty}$ que cumple $x^n \succsim y^n$, se tiene que

$$x = \lim_{n\to\infty} x^n \succsim \lim_{n\to\infty} y^n = y$$

Veamos que la relación de preferencia lexicográfica definida anteriormente no verifica la propiedad de continuidad. En efecto:

Consideremos las siguientes sucesiones de cestas de dos bienes: $x^n = (1/n, 0)$ e $y^n = (0, 1)$.

Para cada n se tiene que $x^n \succ y^n$. Sin embargo, $\lim_{n\to\infty} y^n = (0, 1) \succ (0, 0) = \lim_{n\to\infty} x^n$

El siguiente teorema, que no vamos a demostrar, da condiciones suficientes que aseguran la existencia de una función de utilidad compatible con una relación de preferencia definida en un conjunto de consumo. La demostración del teorema se encuentra en Mas-Colell, Whinston y Green (1995).

Teorema 1.2

Sea $X \subset \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : x_i \geqslant 0$, para cada $i = 1, 2, ..., n\}$ un conjunto de consumo. Sea $\succsim$ una relación de preferencia en X racional y continua. Entonces existe una función de utilidad continua $U(x_1, x_2, ..., x_n)$ que representa a la relación de preferencia $\succsim$.

Proposiciones con significado sobre una función de utilidad ordinal

Concluyamos esta sección insistiendo en que sólo tienen significado aquellas proposiciones acerca de una función de utilidad U cuya verdad o falsedad no se altera al sustituir U por una transformación estrictamente creciente de U.

Veamos algunos ejemplos:

— «*A* produce mayor (o menor, o igual) utilidad que *B*» tiene sentido.
— «*B* produce 5 veces más utilidad que *A*» no tiene sentido.
— «La diferencia de utilidad entre *B* y *C* es el doble que la que hay entre *A* y *C*» no tiene sentido.

1.3. UTILIDAD DE VON NEUMANN-MORGENSTERN. ACTITUDES ANTE EL RIESGO

Si bien para algunas aplicaciones es suficiente con disponer de una información ordinal de las utilidades de un agente, en general dicha información es insuficiente. Por ejemplo, supongamos que en el Ejemplo 1.2 nos preguntan si el agente prefiere la alternativa *B* o una nueva opción consistente en lanzar una moneda equilibrada y dar la alternativa *A* si sale cara y la C si sale cruz. La información ordinal disponible no nos permite responder a esa pregunta. Es preciso, por tanto, definir un tipo de escala de utilidad en la que preguntas como la anterior puedan responderse con naturalidad. En esta sección definiremos la escala de utilidades de Von Neumann-Morgenstern, que es la más sencilla de entre las que permiten definir las preferencias de un agente, no sólo entre opciones puras (ciertas o seguras) sino también entre loterías o distribuciones de probabilidad definidas sobre dichas opciones puras.

Loterías

Supongamos que un agente debe elegir una entre varias alternativas, siendo conocidas de manera objetiva las probabilidades asociadas a las alternativas. En estas condiciones, en teoría de la decisión se dice que estamos en un contexto de elección en ambiente de riesgo.

Sea $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un conjunto de alternativas en un ambiente de riesgo. Suponemos, por tanto, que dicho conjunto es finito (este supuesto lo hacemos para evitar la excesiva complicación del desarrollo posterior).

Definición 1.4

Una lotería simple en X es una distribución de probabilidad en X. Es decir, se dice que L es una lotería simple en X, si

$$L = \left\{(p_1, p_2, ..., p_n) \in R^n: p_i \geqslant 0, \text{ para cada } i = 1, 2, ..., n, \text{ y } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right\}$$

en donde p_i es la probabilidad de que ocurra la alternativa x_i, para cada $i = 1, 2, ..., n$.

Ejemplo 1.5

Sea $X = \{A, B, C\}$ como en el Ejemplo 1.2.

La lotería simple $L_1 = (1/2, 1/4, 1/4)$ es la opción consistente en obtener A con probabilidad 1/2, B con probabilidad 1/4 y C con probabilidad 1/4.

La lotería $L_2 = (0, 1, 0)$ es la opción consistente en obtener B con seguridad.

Ejemplo 1.6 (Una apuesta cualquiera en la ruleta de un casino)

Un cliente apuesta 6 euros al número 7. En ese caso el cliente paga 6 euros y obtiene del casino la lotería siguiente: «premio de 216 euros si sale el 7 (probabilidad = 1/37), y premio nulo si no sale el 7 (probabilidad = 36/37)». Dicho de otra manera, en este caso

$$X = \{\text{«Premio de 216 euros», «Premio nulo»}\}$$

El casino le ofrece la lotería $L = (1/37, 36/37)$.

Si las alternativas que constituyen el conjunto X son valores numéricos, a partir de los valores posibles y sus respectivas probabilidades que asigna una lotería, se puede calcular el valor esperado, tal como se define a continuación.

Definición 1.5

Si $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es un conjunto de valores numéricos, llamamos **valor esperado** de la lotería $L = (p_1, p_2, ..., p_n)$ al valor numérico $E(L) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$.

En una lotería simple, los resultados que se pueden obtener son ciertos (los elementos del conjunto X). En una forma más general de lotería, llamada lotería compuesta, los resultados que se pueden obtener son loterías simples, tal como se define a continuación.

Definición 1.6

Sea $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Dadas m loterías simples sobre X, $L_j = (p^j_1, p^j_2, ..., p^j_n)$, para $j = 1, 2, ..., m$, y dada una distribución de probabilidad $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$, con $\lambda_j \geqslant 0$, para cada $j = 1, 2, ..., m$, y $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$, la lotería compuesta $(L_1, L_2, ..., L_m; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ consiste en obtener la lotería simple L_j con probabilidad λ_j, para $j = 1, 2, ..., m$.

Dada la lotería compuesta $(L_1, L_2, ..., L_m; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$, se puede calcular la lotería simple sobre X, $L = (p_1, p_2, ..., p_n)$ que genera la misma distribución última sobre los resultados de X, de la siguiente forma:

$$p_i = \lambda_1 p_i^1 + \lambda_2 p_i^2 + \cdots + \lambda_m p_i^m, \text{ para } i = 1, 2, ..., n$$

En lo que sigue se supone que el decisor se fija exclusivamente en la distribución última de probabilidades sobre los resultados que constituyen el conjunto X, de manera que dos loterías compuestas distintas que dan lugar a una misma lotería simple sobre X son equivalentes.

Podemos denotar L del siguiente modo:

$$L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \cdots + \lambda_m L_m$$

Ejemplo 1.7

Sean el conjunto X y las loterías simples L_1 y L_2 definidos en el Ejemplo 1.5.

Consideremos la lotería compuesta $(L_1, L_2; 3/4, 1/4)$.

Por tanto, en este caso se tiene que:

$$\lambda_1 = 3/4, \lambda_2 = 1/4$$

$$p_1^1 = 1/2, p_2^1 = 1/4, p_3^1 = 1/4$$

$$p_1^2 = 0, p_2^2 = 1, p_3^2 = 0$$

La lotería compuesta considerada produce finalmente sobre X los mismos resultados que la lotería simple

$$L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 3/4(1/2, 1/4, 1/4) + 1/4(0, 1, 0) = (6/16, 7/16, 3/16)$$

Obsérvese que se llega a la misma lotería simple L, a partir de la lotería compuesta $(L_3, L_4; 1/2, 1/2)$, siendo $L_3 = (2/8, 7/8, 1/8)$, $L_4 = (4/8, 0, 2/8)$ ya que $1/2(2/8, 7/8, 1/8) + 1/2(4/8, 0, 2/8) = (6/16, 7/16, 3/16) = L$.

Relación de preferencia sobre el conjunto de las loterías simples en *X*

Sea el conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Sea

$$L_X = \left\{(p_1, p_2, ..., p_n) \in R^n\colon p_i \geqslant 0, \text{ para cada } i = 1, 2, ..., n, \text{ y } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right\}$$

el conjunto de todas las loterías simples sobre el conjunto de alternativas X.

Se supone que el decisor tiene una relación de preferencia $\succsim$ sobre L_X, que cumple las propiedades de completitud y transitividad. Por tanto, suponemos que la relación de preferencia $\succsim$ es racional. A continuación se definen otras propiedades a considerar en la relación de preferencia $\succsim$ sobre L_X.

Definición 1.7

La relación de preferencia $\succsim$ definida en L_X se dice que es continua si para todo L, L', $L'' \in L_X$, los conjuntos

$$\{\lambda \in [0, 1]\colon (L, L'; \lambda, 1 - \lambda \succsim L'')\} \quad \text{y} \quad \{\lambda \in [0, 1]\colon L'' \succsim (L, L'; \lambda, 1 - \lambda)\}$$

son cerrados.

La propiedad de continuidad significa que pequeños cambios en las probabilidades no producen cambios en el orden entre dos loterías.

Definición 1.8

La relación de preferencia $\succsim$ definida en L_X verifica el axioma de independencia si $\forall\, L, L', L'' \in L_X$, $\forall\, \lambda \in (0, 1)$ se tiene que

$$L \succsim L' \quad \Leftrightarrow \quad (L, L''; \lambda, 1 - \lambda) \succsim (L', L''; \lambda, 1 - \lambda)$$

Función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern

A continuación se define el concepto de función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern. Posteriormente se enuncian y demuestran dos proposiciones en las que se presentan importantes propiedades de dichas funciones de utilidad y finalmente se enuncia el teorema de la utilidad esperada.

Definición 1.9

Se dice que la función de utilidad U: $L_X \to R$ es una función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern (VN-M) si existen n números $u_1, u_2, ..., u_n$, asociados respectivamente a $x_1, x_2, ..., x_n$, tales que para cada lotería $L = (p_1, p_2, ..., p_n) \in L_X$ se verifica que

$$U(L) = u_1 p_1 + u_2 p_2 + \cdots + u_n p_n$$

La siguiente proposición da una condición necesaria y suficiente para que una función con dominio en L_X que toma valores en R sea una función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern.

Proposición 1.3

Una función de utilidad U: $L_X \to R$ es una función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern $\Leftrightarrow \forall L_1, L_2, ..., L_m \in L_X$, $\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in [0, 1]$, con $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$, se verifica que

$$U\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j L_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j U(L_j)$$

Demostración:

Probemos cada una de las dos implicaciones.

$\Rightarrow$) Sean

$$L_1 = (p_1^1, p_2^1, ..., p_n^1),\ L_2 = (p_1^2, p_2^2, ..., p_n^2), ...,$$

$$L_m = (p_1^m, p_2^m, ..., p_n^m) \in L_X \text{ y } \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in [0, 1], \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$$

Consideramos la lotería compuesta $(L_1, L_2, ..., L_m; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$, que es equivalente a la lotería simple $L = (p_1, p_2, ..., p_n)$, en donde para cada $i = 1, 2, ..., n$ es $p_i = \lambda_1 p_i^1 + \lambda_2 p_i^2 + \cdots + \lambda_m p_i^m$. Por tanto,

$$L = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j L_j$$

$\Leftarrow$) Sea $L = (p_1, p_2, ..., p_n) \in L_X$. Podemos poner:

$$L = p_1(1, 0, ..., 0) + p_2(0, 1, ..., 0) + \cdots + p_n(0, 0, ..., 1) = p_1 L^1 + p_2 L^2 + \cdots + p_n L^n$$

Por tanto,

$$U(L) = U\left(\sum_{i=1}^{n} p_i L^i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i U(L^i) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i$$

en donde $u_i = U(L^i)$, por lo que U es una función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern.

A partir de la demostración de la proposición anterior vemos que, para cada $i = 1, 2, ..., n$ es $u_i = U(L^i)$, pero L^i es la lotería que asigna probabilidad uno a la alternativa x_i y probabilidad cero a las demás alternativas, es decir la lotería L^i es la opción consistente en obtener x_i con seguridad.

Se puede definir la siguiente función

$$\begin{array}{cccc} u: & X & \rightarrow & R \\ & x_i & \rightarrow & u(x_i) \end{array}$$

de manera que $u(x_i) = u_i = U(L^i)$.

Por tanto, si U es una función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern, se tiene una función u que se puede interpretar como la función que asigna a cada alternativa del conjunto inicial X su utilidad verificándose que:

$$\forall L = (p_1, p_2, ..., p_n) \in L_X \quad \text{es} \quad U(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$$

En la siguiente proposición vemos que una función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern, correspondiente a una relación de preferencia, es única, salvo una transformación afín positiva.

Proposición 1.4

Sea U: $L_X \rightarrow R$ una función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern correspondiente a la relación de preferencia $\succsim$ sobre L_X.

V: $L_X \rightarrow R$ es otra función de utilidad esperada Von Neumann-Morgenstern correspondiente a $\succsim$.

$\Leftrightarrow$ Existen a, $b \in R$, con $a > 0$, tales que $V(L) = aU(L) + b$, para cada $L \in L_X$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sean U y V funciones de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern definidas en L_x, correspondientes a $\succsim$.

Veamos que, entonces, existen a, $b \in R$, con $a > 0$, tales que

$$V(L) = aU(L) + b, \text{ para cada } L \in L_X$$

Por ser U función lineal, es continua. El conjunto L_X es cerrado y acotado. Por el teorema de Weierstrass, existen $\max\limits_{L \in L_X} U(L)$ y $\min\limits_{L \in L_X} U(L)$, por lo que existen $\overline{L}$, $\underline{L} \in L_X$, tales que

$$\overline{L} \succsim L \succsim \underline{L}, \forall L \in L_X$$

Si $\underline{L} \sim \overline{L}$, entonces cualquier función de utilidad es constante, por lo que $V(L) = k$, $U(L) = k'$, $\forall L \in L_X$, y por tanto se cumple la implicación para $a = 1$, $b = k - k'$.

Supongamos que $\overline{L} \succ L$. Sea $L \in L_X$. Vemos que podemos encontrar $\alpha_L \in [0, 1]$, tal que $L \sim \alpha_L \overline{L} + (1 - \alpha_L)\underline{L}$. En efecto, tendrá que ser $U(L) = \alpha_L U(\overline{L}) + (1 - \alpha_L)U(\underline{L})$, por lo que basta despejar α_L, obteniéndose que

$$\alpha_L = \frac{U(L) - U(\underline{L})}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})}$$

Tiene que cumplirse que

$$V(L) = V(\alpha_L \bar{L} + (1 - \alpha_L)\underline{L}) = \alpha_L V(\bar{L}) + (1 - \alpha_L)V(\underline{L}) = \alpha_L[V(\bar{L}) - V(\underline{L})] + V(\underline{L})$$

Sustituyendo α_L por el valor que hemos obtenido anteriormente, queda

$$V(L) = \frac{U(L) - U(\underline{L})}{U(\bar{L}) - U(\underline{L})}[V(\bar{L}) - V(\underline{L})] + V(\underline{L})$$

Efectuando operaciones, queda

$$V(L) = \frac{V(\bar{L}) - V(\underline{L})}{U(\bar{L}) - U(\underline{L})} U(L) - \frac{U(\underline{L})[V(\bar{L}) - V(\underline{L})]}{U(\bar{L}) - U(\underline{L})} + V(\underline{L})$$

por lo que se cumple la implicación, siendo

$$a = \frac{V(\bar{L}) - V(\underline{L})}{U(\bar{L}) - U(\underline{L})} > 0$$

$$b = V(\underline{L}) - \frac{U(\underline{L})[V(\bar{L}) - V(\underline{L})]}{U(\bar{L}) - U(\underline{L})}$$

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que exiten a, $b \in R$, con $a > 0$, tales que $V(L) = aU(L) + b$, para cada $L \in L_X$, siendo U una función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern correspondiente a $\gtrsim$. Veamos que V es otra función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern.

Sean

$$L_1, L_2, ..., L_m \in L_X, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in [0, 1], \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$$

Se tiene que

$$V\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j L_j\right) = aU\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j L_j\right) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j b = a\left[\sum_{j=1}^{m} \lambda_j U(L_j)\right] + b =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [aU(L_j) + b] = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j V(L_j)$$

lo que demuestra, utilizando la Proposición 1.3 que V es una función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern. Además, por ser U una representación de $\gtrsim$ se cumple que

$$L \gtrsim L' \quad \Leftrightarrow \quad U(L) \geqslant U(L') \quad \Leftrightarrow \quad aU(L) + b \geqslant aU(L') + b \quad \Leftrightarrow \quad V(L) \geqslant V(L')$$

A continuación se enuncia el teorema de existencia de la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern. La demostración del teorema se puede consultar en Mas-Colell, Whiston y Green (1995).

Teorema 1.3 Teorema de la utilidad esperada

Supongamos que la relación de preferencia $\succsim$ sobre L_X es racional, continua y verifica el axioma de independencia. Entonces $\succsim$ admite una representación en forma de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern.

Es decir, existen n valores reales $u(x_1)$, $u(x_2)$, ..., $u(x_n)$ tales que

$$\forall L, L' \in L_X, L = (p_1, p_2, ..., p_n) \succsim L' = (p'_1, p'_2, ..., p'_n) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} p'_i u(x_i)$$

Extensión al caso en que $X = R$

Cuando las alternativas o resultados son cantidades monetarias puede ser interesante representar dichas cantidades por la variable continua $x \in R$. Cabe entonces considerar loterías representadas por funciones de densidad o por funciones de distribución.

Así, sea una lotería en R caracterizada por una función de densidad f. Sea L_X el conjunto de todas las funciones de densidad en R. Una función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern en L_X verifica que, para $f \in L_X$, $U(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) f(x)\, dx$, siendo u: $R \to R$ tal que $u(x)$ es la utilidad de la cantidad monetaria segura x, por lo que se supone que la función u es creciente y continua.

Si la lotería en R se caracteriza por una función de distribución F, puede representar tanto distribuciones de probabilidad discretas como continuas en R. L_X será el conjunto de todas las funciones de distribución en R. Entonces una función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern se caracteriza porque $U(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, dF(x)$.

En cualquiera de las representaciones, se cumple también el teorema de la utilidad esperada siempre que se cumplan las hipótesis del Teorema 1.3.

En lo que sigue, y mientras no anunciemos explícitamente otra cosa, supondremos que las preferencias de los agentes cumplen las condiciones del Teorema 1.3 y que, en consecuencia, las utilidades de las distintas loterías son utilidades esperadas de Von Neumann-Morgenstern.

Ejemplo 1.8

Sea $X = [0, \infty]$. Consideremos tres agentes cuyas funciones de utilidad sobre cantidades no negativas de dinero son $u_1(x) = 4\sqrt{x}$, $u_2(x) = 3x$, $u_3(x) = x^2$. Para $x_1 = 1$, $x_2 = 16 \in [0, \infty]$, se considera la lotería $L = (4/5, 1/5)$. Vamos a calcular el valor esperado de L y comparar la utilidad esperada con la utilidad del valor esperado.

El valor esperado es

$$E(L) = \frac{4}{5} \times 1 + \frac{1}{5} \times 16 = \frac{20}{5} = 4$$

- Para el primer agente se tiene que la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern es igual a:

$$U_1(L) = \frac{4}{5}\,u_1(1) + \frac{1}{5}\,u_1(16) = \frac{4}{5}\,(4\sqrt{1}) + \frac{1}{5}\,(4\sqrt{16}) = \frac{32}{5} = 6{,}4$$

Para este primer agente, la utilidad del valor esperado es

$$u_1[E(L)] = u_1(4) = 4\sqrt{4} = 8$$

por lo que este agente prefiere el valor esperado antes que la lotería L.
- Para el segundo agente, la utilidad esperada y la utilidad del valor esperado son

$$U_2(L) = \frac{4}{5}\,u_2(1) + \frac{1}{5}\,u_2(16) = \frac{4}{5}\,(3) + \frac{1}{5}\,(48) = 12$$

$$u_2[E(L)] = 3 \times 4 = 12$$

por lo que al segundo agente le da igual el valor esperado que la lotería L.
- Para el tercer agente se tiene que

$$U_3(L) = \frac{4}{5}\,u_3(1) + \frac{1}{5}\,u_3(16) = \frac{4}{5}\,(1^2) + \frac{1}{5}\,(16^2) = 52$$

$$u_3[E(L)] = u_3(4) = 4^2 = 16$$

por lo que este agente prefiere la lotería L antes que el valor esperado.

Características de los agentes ante el riesgo

Vamos a clasificar las funciones de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern de los distintos agentes, cuando el conjunto de resultados o alternativas es $X = R$, que interpretamos como cantidades de dinero.

Suposición básica inicial

Sea $X = R$. Suponemos que la función de utilidad u de un agente cualquiera es estrictamente creciente (prefiere una renta mayor a una renta menor).

Si u es diferenciable, la suposición anterior significa que $u'(x) > 0$, para todo $x \in R$.

Definición 1.10

Sea $X = R$. Decimos que un agente es **averso al riesgo** en el intervalo $[a, b]$ si el valor esperado de cualquier lotería en $[a, b]$ es al menos tan preferido como dicha lotería. Si la lotería es al menos tan preferida como su valor esperado, decimos que es **propenso al riesgo** o **amante del riesgo**. Y si es indiferente entre ambas opciones, decimos que es **neutral al riesgo.**

Teorema 1.4

Se considera un agente con función de utilidad u: $[a, b] \to R$ estrictamente creciente y dos veces diferenciable. El agente es:

- Averso al riesgo en $[a, b]$ si y sólo si $u''(x) \leqslant 0$, para todo x de $[a, b]$, es decir, si u es cóncava en $[a, b]$.
- Propenso al riesgo en $[a, b]$ si y sólo si $u''(x) \geqslant 0$, para todo x de $[a, b]$, es decir, si u es convexa en $[a, b]$.
- Neutral al riesgo en $[a, b]$ si y sólo si $u''(x) = 0$, para todo x de $[a, b]$, es decir, si u es lineal en $[a, b]$.

Demostración:

Sean $x_1, x_2, ..., x_n \in [a, b]$ cualesquiera y $L = (p_1, p_2, ..., p_n)$ una lotería cualquiera en $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset [a, b]$. Sea $E(L) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$ el valor esperado de L y sea $U(L) = \sum_{i=1}^{n} p_iu(x_i)$ la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern. En virtud de la definición de concavidad, u es cóncava en $[a, b]$ si y sólo si $u(p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n)$ (que es precisamente la utilidad del valor esperado) es mayor o igual que $p_1u(x_1) + p_2u(x_2) + \cdots + p_nu(x_n)$ (que es precisamente la utilidad esperada de la lotería L). Si u es dos veces diferenciable, un conocido teorema del cálculo diferencial asegura que la función u es cóncava en $[a, b]$ si y sólo si $u''(x) \leqslant 0$, para todo x de $[a, b]$. Por tanto, $u''(x) \leqslant 0$ para todo x de $[a, b]$ si y sólo si para el agente el valor esperado de cualquier lotería es al menos tan preferido como la lotería, es decir es averso al riesgo en $[a, b]$.

Análogamente, $u''(x) \geqslant 0$ para todo x de $[a, b]$ si y sólo si el agente es propenso al riesgo en $[a, b]$.

Por otra parte, la función u es cóncava y convexa (es decir, afín o lineal) en $[a, b]$ si y sólo si $u''(x) = 0$ para todo x de $[a, b]$, y además la función u cóncava y convexa en $[a, b]$ si y sólo si $u(p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n)$, que es la utilidad del valor esperado de L, es igual a $p_1u(x_1) + p_2u(x_2) + \cdots + p_nu(x_n)$, que es la utilidad esperada de L. Por tanto, $u''(x) = 0$ para todo x de $[a, b]$ si y sólo si el agente es indiferente entre el valor esperado de cualquier lotería L y dicha lotería. En conclusión, $u''(x) = 0$ para todo x de $[a, b]$ si y sólo si el agente es neutral al riesgo en $[a, b]$.

Observación 1.1:

1. La función de utilidad de un agente neutral al riesgo es lineal.
2. La función de utilidad de un agente averso (propenso) al riesgo es cóncava (convexa).

Ejemplo 1.9

Sea $X = [0, \infty]$. Consideremos los tres agentes del Ejemplo 1.8, cuyas funciones de utilidad son

$$u_1(x) = 4\sqrt{x},\ u_2(x) = 3x,\ u_3(x) = x^2$$

En el Ejemplo 1.8 hemos visto las características de cada uno de los agentes frente al riesgo para una lotería dada. Veamos que se confirman para cualquier lotería.

- El primer agente prefería el valor esperado antes que la lotería.

$$u_1'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad u_1''(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^3}} < 0 \text{ en } [0, \infty]. \text{ Es averso al riesgo en } [0, \infty]$$

- Al segundo agente le daba igual el valor esperado que la lotería.

$$u_2'(x) = 3 \quad \Rightarrow \quad u_2''(x) = 0 \text{ en } [0, \infty]. \text{ Es neutral al riesgo en } [0, \infty]$$

- El tercer agente prefería la lotería antes que el valor esperado.

$$u_3'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad u_3''(x) = 2 > 0 \text{ en } [0, \infty]. \text{ Es propenso al riesgo en } [0, \infty]$$

Prima de riesgo

En términos intuitivos, es la cantidad que un agente averso al riesgo está dispuesto a pagar para librarse del riesgo.

Definición 1.11

Dado un agente con función de utilidad del dinero $u(x)$, y dada una lotería L sobre un conjunto de resultados $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset R$, con valor esperado x_0,

a) Llamamos **equivalente cierto de *L*** a la cantidad de dinero z_0 tal que $u(z_0) = U(L)$.

b) Llamamos **prima de riesgo de *L*** a la cantidad $\rho = x_0 - z_0$ (valor esperado menos equivalente cierto).

Visualización gráfica (Figura 1.1):

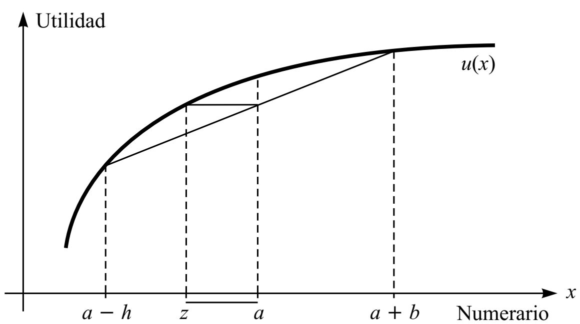


Figura 1.1 Equivalente cierto y prima de riesgo.

L es la lotería (1/2, 1/2) con premios $a + h$ y $a - h$.

$E(L) = (a + h)/2 + (a - h)/2 = a$ es el valor esperado.

La utilidad esperada de L es $U(L) = \frac{1}{2}\,u(a + h) + \frac{1}{2}\,u(a - h) = u(z)$.

z es el equivalente cierto de L, y $a - z$ es la prima de riesgo de L.

Ejemplo 1.10

Sea $X = [0, \infty]$. Consideremos los tres agentes del Ejemplo 1.8, cuyas funciones de utilidad son $u_1(x) = 4\sqrt{x}$, $u_2(x) = 3x$, $u_3(x) = x^2$ y la lotería $L = (4/5, 1/5)$ para $x_1 = 1$, $x_2 = 16$.

Calculemos sus equivalentes ciertos y sus primas de riesgo.

- Para el primer agente que es averso al riesgo tenemos que $U_1(L) = 6{,}4$.

  Su equivalente cierto será el valor z tal que $u_1(z) = U_1(L) = 6{,}4$. Pero

$$u_1(z) = 4\sqrt{z} \quad \Rightarrow \quad 4\sqrt{z} = 6{,}4 \quad \Rightarrow \quad z = \left(\frac{6{,}4}{4}\right)^2 = 2{,}56$$

  que es el equivalente cierto de L.

  La prima de riesgo de L es $\rho = E(L) - z = 4 - 2{,}56 = 1{,}44$.
- Para el segundo agente, que es neutral al riesgo, tenemos que $U_2(L) = 12$.

  Su equivalente cierto será el valor z tal que $u_2(z) = U_2(L) = 12$. Pero $u_2(z) = 3z = 12 \quad \Rightarrow \quad z = 4$, que es el equivalente cierto de L.

  La prima de riesgo de L para el segundo agente es $\rho = E(L) - z = 4 - 4 = 0$.

  Para el tercer agente, que prefiere la lotería antes que el valor esperado, tenemos que $U_3(L) = 52$.

  Su equivalente cierto será el valor z tal que $u_3(z) = U_3(L) = 52$. Pero

$$u_3(z) = z^2 = 52 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{52} = 7{,}2$$

  que es el equivalente cierto.
- La prima de riesgo de L para el tercer agente es

$$\rho = E(L) - z = 4 - 7{,}2 = -3{,}2 < 0$$

Observación 1.2:

1. El equivalente cierto de L para un agente neutral al riesgo es igual al valor esperado. El equivalente cierto de L para un agente averso (propenso) al riesgo es menor o igual (mayor o igual) que el valor esperado.
2. La prima de riesgo de L para un agente neutral al riesgo es nula. La prima de riesgo de L para un agente averso (propenso) al riesgo es mayor o igual a cero (menor o igual a cero).
3. No es casualidad que los pagos que un cliente realiza por una póliza de seguros (de automóvil, de incendios, etc.) se llamen primas.

Medidas de Arrow-Pratt de aversión al riesgo

Las anteriores definiciones han permitido clasificar a los agentes de manera cualitativa en tres categorías referentes a sus preferencias con relación al riesgo. Las definiciones siguientes intentan cuantificar las ideas anteriores, de modo que sea posible comparar la aversión o propensión al riesgo de dos agentes cualesquiera. La idea intuitiva es que la curvatura de la función de utilidad de un agente, medida por su derivada segunda, nos informa del grado de aversión al riesgo de dicho agente.

Definición 1.12

Sea u una función de utilidad del dinero correspondiente a un agente. Se supone que u es dos veces diferenciable en $[a, b]$.

a) El coeficiente de Arrow-Pratt de aversión absoluta al riesgo en x de dicho agente es

$$\lambda_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

b) El coeficiente de aversión relativa al riesgo en x de dicho agente es

$$\lambda_r(x) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)}$$

Proposición 1.5

Sea u una función de utilidad del dinero dos veces diferenciable en $[a, b]$, correspondiente a un agente.

a) Dicho agente tiene un coeficiente de Arrow-Pratt de aversión absoluta nula si y sólo si $u(x) = c + dx$. En ese caso es neutral al riesgo.
b) Dicho agente tiene un coeficiente de Arrow-Pratt de aversión absoluta constante α positiva si y sólo si $u(x) = -ce^{-\alpha x} + d$, siendo $c > 0$, donde $\alpha > 0$.
c) Dicho agente tiene un coeficiente de Arrow-Pratt de aversión absoluta constante α negativa si y sólo si $u(x) = ce^{-\alpha x} + d$, siendo $c > 0$, donde $\alpha < 0$.

Demostración:

a) $\lambda_a(x) = -\dfrac{u''(x)}{u'(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u'(x) = d \quad \Leftrightarrow \quad u(x) = dx + c$

b) Veamos cada una de las dos implicaciones.

$\Rightarrow$) Sea $\lambda_a(x) = -\dfrac{u''(x)}{u'(x)} = \alpha > 0$. Definimos $y(x) = u'(x)$, por lo que se tiene que $-\dfrac{y'(x)}{y(x)} = \alpha$, o lo que es lo mismo $\dfrac{dy}{dx} = -\alpha y$. Resolvemos dicha ecuación diferencial por variables separables, obteniendo que $y(x) = Ce^{-\alpha x}$, en donde C es una constante positiva. Por tanto,

$$\frac{du}{dx} = Ce^{-\alpha x} \quad \Rightarrow \quad u(x) = -\frac{C}{\alpha} e^{-\alpha x} + d = -ce^{-\alpha x} + d, \quad \text{siendo} \quad c > 0$$

$\Leftarrow$) Se supone que $u(x) = -ce^{-\alpha x} + d$, siendo $c > 0$, donde $\alpha > 0$.
Entonces $u'(x) = c\alpha e^{-\alpha x} \quad \Rightarrow \quad u''(x) = -c\alpha^2 e^{-\alpha x}$.
Por tanto, $\lambda_a(x) = -\dfrac{u''(x)}{u'(x)} = \alpha > 0$.

c) Se demuestra de manera análoga a **b)**.

Algunos comentarios sobre las distintas escalas de medida

La escala en que se mide la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern es cardinal intervalo (como la de temperatura en grados centígrados). Si la transformamos mediante una aplicación afín positiva, la función de utilidad esperada resultante es equivalente a la primera (como la escala Fahrenheit es equivalente a la centígrada, con correspondencia 0 ºC a 32 ºF y 100 ºC a 212 ºF, que se consigue mediante la transformación $F(x^{\circ}) = 1{,}8x^{\circ} + 32$).

Tiene sentido decir «la utilidad de A es mayor que la de B» y también «la diferencia de utilidad entre B y C es cinco veces mayor que entre A y C», pero no lo tiene decir «la utilidad de A es doble que la de B» o «la utilidad de A es *5* unidades mayor que la de B».

El tipo de escala aplicable para representar una magnitud depende de las características físicas y lógicas de dicha magnitud. La lista siguiente menciona las escalas más importantes, seguidas de algún ejemplo de magnitud al que se apliquen:

Escala Ordinal

Dureza (A tiene igual o mayor dureza que B si y sólo si $U(A) \geqslant U(B)$).

No tiene sentido decir «A tiene doble dureza que B». No se ha encontrado, que sepamos, la manera de medir la dureza de los materiales con una escala más rica o elaborada que la ordinal.

Escala Cardinal-Intervalo

Temperatura (A tiene igual o mayor temperatura que B si y sólo si $U(A) \geqslant U(B)$).

No tiene sentido decir «A tiene doble temperatura que B», pero sí decir que «la diferencia de temperatura entre A y B es doble que entre C y D».

Escala Cardinal-Ratio

Peso o saldo, sin especificar la unidad de medida (A tiene igual o mayor peso o saldo que B si y sólo si $U(A) \geqslant U(B)$).

No tiene sentido decir «a tiene un peso tres unidades mayor que b, pero sí decir que a tiene un peso doble que b».

Escala Cardinal Absoluta

Saldo en euros (A tiene igual o mayor saldo en euros que B si y sólo si $U(A) \geqslant U(B)$).
Tienen sentido todas las sentencias anteriores.

1.4. JUEGOS EN FORMA EXTENSIVA

Para introducir la forma extensiva de representación de un juego nos servimos del siguiente juego sencillo.

Ejemplo 1.11

Pedro subasta un billete de 50 euros entre Carlos y Blanca con las siguientes reglas: se juega por turnos. Aquél a quien le toca jugar puede pasar, o pujar con 20 euros más que el anterior (suponiendo que los tiene). Empieza Blanca (pasando o pujando con 20 euros). Si un jugador decide pasar, ya no puede pujar en una jugada posterior. Gana el último en pujar, que se lleva el billete. Si ninguno ha pujado se llevan 25 euros cada uno. Ambos jugadores deben pagar su última puja. Aparte de las reglas es de conocimiento común que cada jugador tiene sólo 60 euros.

Sean: Blanca, la jugadora 1, Carlos, el jugador 2. Podemos representar la situación descrita en el ejemplo anterior mediante árbol representado en la Figura 1.2.

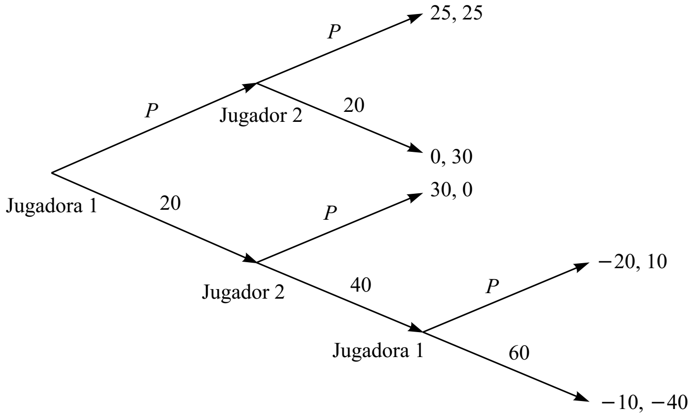


Figura 1.2 Subasta de un billete de 50 euros.

El árbol anterior tiene un punto inicial o raíz, desde el que se empieza el juego, en este caso la elección de Blanca (jugadora 1) entre pasar (P) o pujar con 20 euros (20). Ello da lugar a dos ramas, una para cada posible elección de Blanca.

La primera rama, a la que se accede si Blanca elige P, a la vez se divide en dos ramas, desde el nodo que corresponde a la elección de Carlos entre pasar (P) o pujar con 20 euros (20). Si Carlos decide pasar (P), se termina el juego y cada jugador recibe 25 euros, mientras que si decide pujar con 20 euros, el juego termina, llevándose Carlos los 50 euros y teniendo que pagar su puja, por lo que obtiene un beneficio de 30 euros, sin que Blanca tenga que pagar ni recibir nada (situación que se recoge en el nodo que lleva asociados los valores 0, 30).

La segunda rama, a la que se accede si Blanca puja con 20 euros, a su vez se divide en dos ramas, desde el nodo que corresponde a la elección de Carlos entre pasar (P) o pujar con 40 euros (40), 20 euros más que la puja de Blanca. Si el jugador 2 elige P, se acaba el juego, recibiendo Blanca los 50 euros, pero teniendo que pagar los 20 de su puja, sin que Carlos reciba ni pague nada. Si Carlos puja con 40 euros llega el turno de nuevo a Blanca que debe elegir entre pasar (y se acaba el juego, con pagos -20, 10 respectivamente, ya que Blanca debe pagar los 20 euros de su última puja y Carlos los 40 euros de su última puja, recibiendo éste los 50 euros) o pujar con 60, recibiendo Blanca los 50 euros y debiendo pagar 60 euros y Carlos 40, correspondientes a su última puja, con lo que también se acaba el juego pues ningún jugador tiene más de 60 euros para seguir pujando.

Los elementos que definen el árbol del juego son:

- Los jugadores, que en este caso son la jugadora 1 (Blanca) y el jugador 2 (Carlos).
- Un conjunto de nodos, los cuales corresponden a situaciones de elección de alguno de los jugadores o de final del juego.
- Un conjunto de acciones, que son las que enlazan un nodo con otro, y que corresponden a elecciones de los jugadores.
- Unos vectores de pagos, cada uno de los cuales está asociado a un nodo de final de juego y que tiene dos componentes, la primera de las cuales recoge el pago (o la utilidad) que recibe o que obtiene el jugador 1, y la segunda de las cuales recoge el pago (o la utilidad) que recibe o que obtiene el jugador 2 si el juego termina en ese nodo.

El ejemplo anterior es un juego con movimientos sucesivos de los jugadores. Veamos a continuación un ejemplo con movimientos simultáneos, en el que habrá que introducir un nuevo concepto para poder representar el juego por medio de un diagrama.

Ejemplo 1.12 El juego de las monedas

Los jugadores (1 y 2) depositan de manera simultánea sendas monedas de un euro sobre una mesa. Si resultan dos caras o dos cruces, el jugador 1 recoge los dos euros, mientras que si hay una cara y una cruz, el jugador 2 se lleva los dos euros.

La representación en forma extensiva de este juego se recoge en la Figura 1.3.

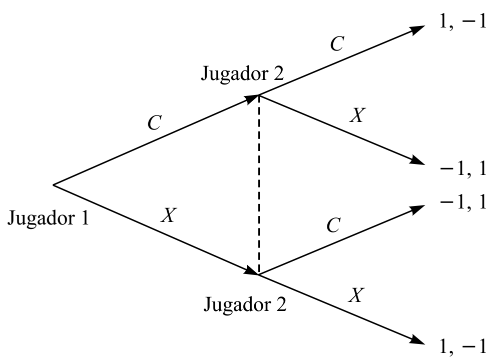


Figura 1.3 El juego de las monedas.

En la representación se observa que los dos nodos correspondientes a una decisión del jugador 2 están unidos mediante un segmento de recta con trazo discontinuo. Se dice que estos dos nodos forman un conjunto de información para el jugador 2, puesto que dicho jugador no sabe en cuál de los nodos de dicho conjunto se encuentra.

El juego anterior también se puede representar de la siguiente forma equivalente (Figura 1.4), en donde la única diferencia es que se representa al jugador 2 en la raíz del juego y al jugador 1 en el conjunto de información formado por dos nodos

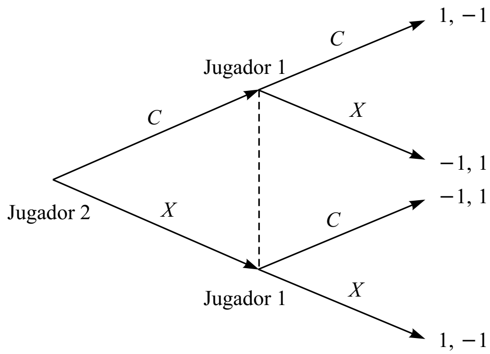


Figura 1.4 El juego de las monedas.

En general, un conjunto de información es un conjunto de nodos de decisión para el mismo jugador. Cuando a un jugador le toca jugar desde un conjunto de información el jugador no sabe en cuál de los nodos pertenecientes a dicho conjunto se encuentra.

Las condiciones que deben cumplir varios nodos para pertenecer al mismo conjunto de información son las siguientes:

- Los conjuntos de información del jugador $i \in J$ contienen sólo nodos de decisión del jugador i.
- Cada nodo de decisión del jugador i está contenido en uno y sólo uno de los conjuntos de información de ese jugador.
- Las mismas acciones deben estar disponibles para un jugador en cada uno de los nodos de un conjunto de información. De no ser así, dicho jugador tendría una pista sobre el nodo en que se encuentra, a partir de las acciones que están disponibles en ese nodo.

Veamos a continuación otro ejemplo en el cual uno de los movimientos lo realiza la naturaleza (o el azar).

Ejemplo 1.13

Se tiene una baraja española de cartas, donde las cartas están mezcladas aleatoriamente. Cada uno de los dos jugadores, Blanca y Carlos, deposita un billete de 5 euros en la mesa. A continuación, Blanca toma una carta de la baraja y comprueba cuál es. Nadie más ve la carta. Entonces Blanca puede apostar, poniendo 5 euros más en la mesa, o retirarse. Si se retira, el dinero que hay en la mesa es para Blanca si la carta escogida es un oro o una copa, siendo para Carlos si la carta en cuestión es una espada o un basto.

Si ha optado por apostar, Carlos puede recoger la apuesta, poniendo 5 euros más en la banca, o pasar. En el primer caso se lleva todo Blanca si la carta escogida es un oro o una copa, o todo Carlos si se trata de una espada o un basto. Si Carlos pasa se lo lleva todo Blanca, cualquiera que sea la carta escogida.

Sean: Blanca, la jugadora 1, Carlos el jugador 2.

La representación de este juego en forma extensiva aparece en la Figura 1.5.

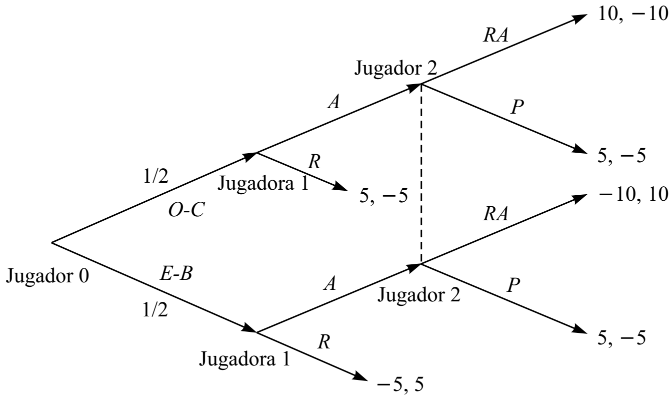


Figura 1.5 Juego de cartas.

Cuando hay un movimiento que lo realiza la naturaleza, se representa como si lo realizara el jugador 0. Vemos en el diagrama que la raíz del juego, en este caso, corresponde a una intervención del azar (jugador 0), que determina si la carta que toma la jugadora 1 es de alguno de los palos que la favorecen, oros o copas (O-C) o de los que no la favorecen, es decir, espadas o bastos (E-B). La probabilidad de que sea de cada una de las formas (favorable o desfavorable a Blanca) es igual a 1/2, tal como aparece en el diagrama.

Por tanto, cuando en un juego hay algún movimiento realizado por el azar o por la naturaleza, se introduce el jugador 0 y se especifica la probabilidad de cada una de las ramas que surgen del nodo correspondiente al jugador 0.

Elementos de un juego

A continuación se definen los elementos que caracterizan a un juego en forma extensiva.

1. Sea el conjunto de jugadores: $J = \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Si no hay movimientos de azar o de la naturaleza, entonces $J = \{1, 2, ..., n\}$.

2. Sea X el conjunto de nodos. Un nodo representa una posible situación del juego. Entre los nodos hay uno de ellos que es la raíz del juego, punto de comienzo del juego. Dicho nodo se representa por o (referente al origen).

A continuación se define la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & X & \to & X \\ & x & \to & \sigma(x) \end{array}$$

en donde $\sigma(O) = O$, y para $x \neq O$, $\sigma(x)$ es el nodo inmediatamente predecesor de x. Sea $\sigma^2(x) = \sigma(\sigma(x))$, $\sigma^3(x) = \sigma(\sigma(\sigma(x)))$, y así sucesivamente, por lo que iterando $\sigma(x)$ se obtienen todos los nodos predecesores de x.

Sea $s(x) = \sigma^{-1}(x)$, el conjunto de nodos que siguen inmediatamente a x.

Un nodo es terminal si no le sigue ningún otro nodo, siendo un nodo de decisión si le sigue algún otro nodo. Se definen los siguientes conjuntos:

$$T(X) = \{x \in X: s(x) = \varnothing\}$$

el conjunto de nodos terminales del juego.

$D(X) = \{x \in X: s(x) \neq \varnothing\} = X - T(X)$, el conjunto de nodos de decisión del juego.

3. Sea A el conjunto de todas las posibles acciones.

Se define la función:

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & X - \{O\} & \to & A \\ & x & \to & \alpha(x) \end{array}$$

que hace corresponder a cada nodo distinto del origen aquella acción $\alpha(x)$ que lleva desde el nodo inmediato predecesor $\sigma(x)$ al nodo x.

Se verifica que si $x', x'' \in s(x)$, siendo $x' \neq x''$, entonces $\alpha(x') \neq \alpha(x'')$. Es decir, acciones que parten del mismo nodo y conducen a nodos distintos, deben ser distintas.

Para cualquier nodo de decisión $x \in D(X)$, representamos el conjunto de acciones disponibles a partir de x por:

$$A(x) = \{a \in A: \exists x' \in s(x) \quad \text{con} \quad a = \alpha(x')\}$$

4. Para cada jugador i sea X_i el conjunto de nodos de decisión en los que el jugador i tiene que elegir una acción. En un nodo particular de decisión sólo mueve uno de los jugadores. Se tiene que

$$\bigcup_{i \in J} X_i = D(X)$$

$$\forall\, i, j \in J, \text{ con } i \neq j, \text{ se verifica que } X_i \cap X_j = \varnothing$$

Vemos, por tanto, que la familia $\{X_i\}_{i \in J}$ constituye una partición, por jugadores, del conjunto de nodos de decisión $D(X)$.

5. Una familia de conjuntos de información H, y una función

$$\begin{array}{rccc} h: & X & \to & H \\ & x & \to & h(x) \end{array}$$

que asigna a cada nodo x un conjunto de información $h(x)$ al que pertenece. Los conjuntos de información forman una partición de $D(X)$.

Como hemos visto anteriormente, todos los nodos de decisión que pertenecen a un mismo conjunto de información tienen las mismas acciones disponibles, es decir:

$$A(x) = A(x'), \quad \text{si} \quad h(x) = h(x')$$

Sea $h = h(x)$, un conjunto de información perteneciente a H. Por tanto, podemos representar por $A(h)$ el conjunto de acciones disponibles en el conjunto de información h.

$$A(h) = \{a \in A\colon a \in A(x) \quad \text{para} \quad x \in h\}$$

Sea H_i el conjunto de todos los conjuntos de información del jugador i.

Sea H el conjunto que contiene a todos los conjuntos de información contenidos en los H_i, para $i \in J$. Es decir,

$$H = \bigcup_{i \in J} H_i$$

6. Una función

$$\begin{array}{rccc} \rho: & H_0 \times A & \rightarrow & [0,\ 1] \\ & (h,\ a) & \rightarrow & \rho(h,\ a) \end{array}$$

que asigna probabilidades a acciones en conjuntos de información donde el movimiento corresponde a la naturaleza o al azar.

Se tiene que verificar que:

$$\rho(h, a) = 0, \quad \text{si} \quad a \notin A(h) \quad \text{y} \quad \sum_{a \in A(h)} \rho(h, a) = 1, \forall h \in H_0$$

7. Una función de pagos

$$\begin{array}{rccc} r: & T(X) & \rightarrow & R^n \\ & x & \rightarrow & r(x) = (r_1(x),\ \dots,\ r_n(x)) \end{array}$$

en donde $r_i(x)$ indica el pago o utilidad que recibe el jugador i si se ha alcanzado el nodo terminal x.

Por tanto, recogiendo todos los elementos anteriores podemos dar la siguiente definición.

Definición 1.13

Un juego en forma extensiva Γ viene especificado por los siguientes elementos:

$$\Gamma = \{J, (X, \sigma), (A, \alpha), \{X_i\}_{i \in J}, \{H_i\}_{i \in J}, (A(h))_{h \in H}, \rho, r\}$$

Como ilustración de cada uno de los elementos definidos, consideremos de nuevo el Ejemplo 1.13, pero considerando ahora el diagrama de la Figura 1.6, que se corresponde exactamente con el diagrama de la Figura 1.5, pero utilizando otra notación. Para este juego (con este diagrama) vamos a ir calculando cada uno de los elementos que aparecen en la Definición 1.13.

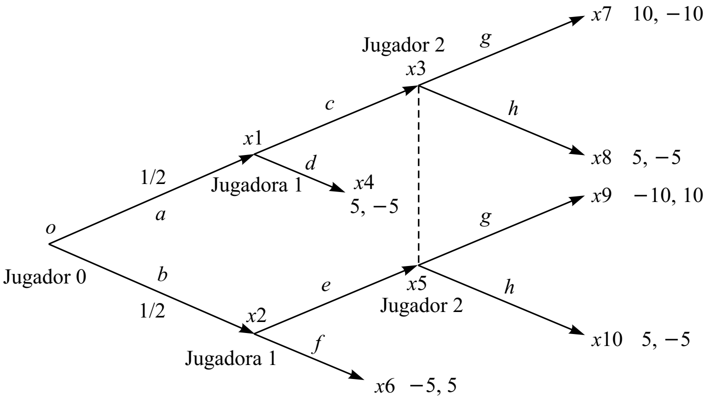


Figura 1.6 Juego de cartas.

En este caso se tiene que:

1. $J = \{0, 1, 2\}$. Es el conjunto de los jugadores, entre los que se encuentra el jugador número 0 que corresponde al azar.

2. $X = \{O, x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10\}$ es el conjunto de nodos. Asociada a este conjunto se define la función σ, que hace corresponder a cada nodo distinto del origen su nodo inmediatamente predecesor, y al origen el propio origen. Por tanto, en este caso se tiene:

$$\sigma(O) = O$$

$$\sigma(\mathrm{x1}) = \sigma(\mathrm{x2}) = O$$

$$\sigma(\mathrm{x3}) = \sigma(\mathrm{x4}) = \mathrm{x1}$$

$$\sigma(\mathrm{x5}) = \sigma(\mathrm{x6}) = \mathrm{x2}$$

$$\sigma(\mathrm{x7}) = \sigma(\mathrm{x8}) = \mathrm{x3}$$

$$\sigma(\mathrm{x9}) = \sigma(\mathrm{x10}) = \mathrm{x5}$$

3. $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ es el conjunto de acciones. Asociada a este conjunto está la siguiente función α que hace corresponder a cada nodo distinto del origen la acción que conduce a dicho nodo. Por tanto, en este caso:

$$\alpha(x1) = a$$

$$\alpha(x2) = b$$

$$\alpha(x3) = c$$

$$\alpha(x4) = d$$

$$\alpha(x5) = e$$

$$\alpha(x6) = f$$

$$\alpha(x7) = g$$

$$\alpha(x8) = h$$

$$\alpha(x9) = g$$

$$\alpha(x10) = h$$

4. El conjunto de nodos de decisión del azar (jugador número cero) es $X_0 = \{O\}$.
El conjunto de nodos de decisión del jugador número 1 es $X_1 = \{x1, x2\}$.
El conjunto de nodos de decisión del jugador número 2 es $X_2 = \{x3, x5\}$.

5. El conjunto de todos los conjuntos de información para el jugador 0, 1 y 2 es, respectivamente:

$$H_0 = \{\{O\}\}$$

$$H_1 = \{\{x1\}, \{x2\}\}$$

$$H_2 = \{\{x3, x5\}\}$$

Sea $H = \{\{O\}, \{x1\}, \{x2\}, \{x3, x5\}\}$.

A continuación se define el conjunto de acciones disponibles en cada uno de los conjuntos de información del juego.

$$A(\{O\}) = \{a, b\}$$

$$A(\{x1\}) = \{c, d\}$$

$$A(\{x2\}) = \{e, f\}$$

$$A(\{x3, x5\}) = \{g, h\}$$

6. La siguiente función asigna probabilidades a cada una de las acciones de azar:

$$\rho(\{O\}, a) = \frac{1}{2}$$

$$\rho(\{O\}, b) = \frac{1}{2}$$

7. Definimos ahora la función de pagos, que hace corresponder un vector bidimensional a cada uno de los nodos terminales.

$$r(x4) = (5, -5)$$

$$r(x6) = (-5, 5)$$

$$r(x7) = (10, -10)$$

$$r(x8) = (5, -5)$$

$$r(x9) = (-10, 10)$$

$$r(x10) = (5, -5)$$

Ejemplo 1.14

Identificar cada uno de los elementos considerados en la Definición 1.13 para el juego representado en la Figura 1.7.

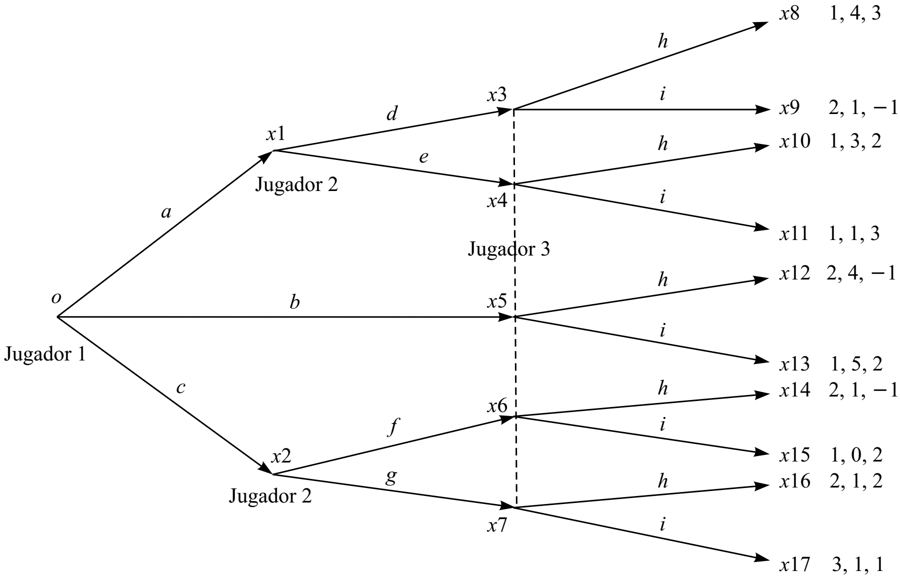


Figura 1.7 Juego del Ejemplo 1.14.

En este caso se tiene que:

1. $J = \{0, 1, 2\}$ es el conjunto de los jugadores. En este caso hay tres jugadores y no hay ningún movimiento que corresponda al azar (por lo que no hay jugador número cero).

2. $X = \{O, x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12, x13, x14, x15, x16, x17\}$ es el conjunto de nodos. La función σ viene definida de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\sigma(O) &= O \\
\sigma(x1) &= \sigma(x2) = \sigma(x5) = O \\
\sigma(x3) &= \sigma(x4) = x1 \\
\sigma(x6) &= \sigma(x7) = x2 \\
\sigma(x8) &= \sigma(x9) = x3 \\
\sigma(x10) &= \sigma(x11) = x4 \\
\sigma(x12) &= \sigma(x13) = x5 \\
\sigma(x14) &= \sigma(x15) = x6 \\
\sigma(x16) &= \sigma(x17) = x7
\end{aligned}
$$

3. El conjunto de acciones es $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$. La función α viene definida de la siguiente forma:

$$\alpha(x1) = a$$
$$\alpha(x2) = c$$
$$\alpha(x3) = d$$
$$\alpha(x4) = e$$
$$\alpha(x5) = b$$
$$\alpha(x6) = f$$
$$\alpha(x7) = g$$
$$\alpha(x8) = h$$
$$\alpha(x9) = i$$
$$\alpha(x10) = h$$
$$\alpha(x11) = i$$
$$\alpha(x12) = h$$
$$\alpha(x13) = i$$
$$\alpha(x14) = h$$
$$\alpha(x15) = i$$
$$\alpha(x16) = h$$
$$\alpha(x17) = i$$

4. El conjunto de nodos de decisión del jugador número i, para $i = 1, 2, 3$ es:

$$X_1 = \{O\}$$
$$X_2 = \{x1, x2\}$$
$$X_3 = \{x3, x4, x5, x6, x7\}$$

5. El conjunto de todos los conjuntos de información para el jugador número 1, 2 y 3 es:

$$H_1 = \{\{O\}\}$$
$$H_2 = \{\{x1\}, \{x2\}\}$$
$$H_3 = \{\{x3, x4, x5, x6, x7\}\}$$

Por tanto,

$$H = \{\{O\}, \{x1\}, \{x2\}, \{x3, x4, x5, x6, x7\}\}$$

A continuación se define el conjunto de acciones disponibles en cada uno de los conjuntos de información del juego.

$$A(\{O\}) = \{a, b, c\}$$
$$A(\{x1\}) = \{d, e\}$$
$$A(\{x2\}) = \{f, g\}$$
$$A(\{x3, x4, x5, x6, x7\}) = \{h, i\}$$

6. En este caso no tiene sentido definir la función ρ porque no existen movimientos de azar (es decir, no hay jugador número cero).

7. A cada nodo terminal le hacemos corresponder ahora un vector de pagos, en donde la primera componente consiste en el pago que va a recibir el jugador número 1, la segunda componente el pago que va a recibir el jugador número 2 y la tercera componente el pago que va a recibir el jugador número 3. Por tanto,

$$r(x8) = (1, 4, 3)$$
$$r(x9) = (2, 1, -1)$$
$$r(x10) = (1, 3, 2)$$
$$r(x11) = (1, 1, 3)$$
$$r(x12) = (2, 4, -1)$$
$$r(x13) = (1, 5, 2)$$
$$r(x14) = (2, 1, -1)$$
$$r(x15) = (1, 0, 2)$$
$$r(x16) = (2, 1, 2)$$
$$r(x17) = (3, 1, 1)$$

Por tanto, en este caso el juego Γ, representado en la Figura 1.7 queda caracterizado por:

$$\Gamma = \{J, (X, \sigma), (A, \alpha), \{X_1, X_2, X_3\}, \{H_1, H_2, H_3\}, (A(h))_{h\in H}, r\}$$

1.5. JUEGOS EN FORMA ESTRATÉGICA

Para representar un juego en forma estratégica necesitamos partir del concepto de estrategia de un jugador. Una estrategia es un plan contingente, completo o regla de decisión, para un jugador, que especifica cómo actuará el jugador en cada circunstancia posible en que le corresponda mover. Como hemos visto en el apartado anterior, el conjunto de tales circunstancias se corresponde con la familia de los conjuntos de información del jugador. A continuación definimos formalmente el concepto de estrategia pura para el jugador i. Existen otros conceptos de estrategia que estudiaremos más adelante.

Definición 1.14

Una estrategia pura para el jugador $i \in \{1, ..., n\}$ es una función

$$\begin{array}{rccc} s_i: & H_i & \rightarrow & A \\ & h & \rightarrow & s_i(h) \end{array}$$

con $s_i(h) \in A(h)$.

Por tanto, una estrategia pura para el jugador i hace corresponder, a cada conjunto de información del jugador i una de las acciones disponibles en dicho conjunto de información.

Sea S_i el conjunto de todas las estrategias puras del jugador i.

Dada una estrategia pura $s_i \in S_i$ para cada uno de los jugadores 1, 2, ..., n queda determinado un desarrollo completo del juego, llegándose a un nodo terminal (salvo que existan movimientos de azar, que se estudiarán posteriormente). Se dice que

$$s = (s_1, s_2, ..., s_n) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n = S$$

es un perfil o una combinación de estrategias puras.

Sea $n(s)$ el nodo terminal que se alcanza si los jugadores juegan la combinación de estrategias s, y sea $u_i(s) = r_i(n(s))$ el pago que recibe el jugador i cuando los jugadores juegan la combinación de estrategias s, llegándose por tanto al nodo terminal $n(s)$.

Ejemplo 1.15

Calcular el conjunto de estrategias puras para cada uno de los jugadores, así como los pagos que recibe cada uno de los jugadores para cada combinación de estrategias puras, en el siguiente juego, cuya representación en forma extensiva aparece en la Figura 1.8.

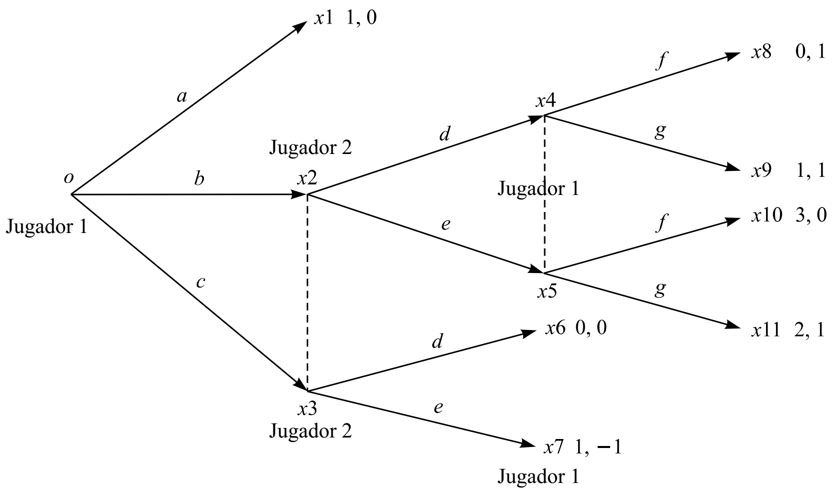


Figura 1.8 Juego del Ejemplo 1.15.

Solución:

El conjunto de todos los conjuntos de información para el jugador 1 es:

$$H_1 = \{\{O\}, \{x4, x5\}\}$$

Las estrategias puras para el jugador 1 son las siguientes:

$$\begin{aligned}
s_1^1 &\equiv (s_1^1(\{O\}), s_1^1(\{x4, x5\})) = (a, f)\\
s_1^2 &\equiv (s_1^2(\{O\}), s_1^2(\{x4, x5\})) = (a, g)\\
s_1^3 &\equiv (s_1^3(\{O\}), s_1^3(\{x4, x5\})) = (b, f)\\
s_1^4 &\equiv (s_1^4(\{O\}), s_1^4(\{x4, x5\})) = (b, g)\\
s_1^5 &\equiv (s_1^5(\{O\}), s_1^5(\{x4, x5\})) = (c, f),\\
s_1^6 &\equiv (s_1^6(\{O\}), s_1^6(\{x4, x5\})) = (c, g),
\end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto de estrategias puras del jugador 1 es:

$$S_1 = \{s_1^1, s_1^2, s_1^3, s_1^4, s_1^5, s_1^6\}$$

Obsérvese que una estrategia especifica lo que hará el jugador incluso en situaciones que nunca ocurrirán en el transcurso del juego. Así, por ejemplo, la estrategia pura s_1^1 indica que el jugador 1 comenzará eligiendo la acción a y posteriormente si el juego llega a los nodos $x4$ o $x5$ eligirá la acción f. Pero si comienza eligiendo la acción a el juego ya finaliza en el nodo $x1$ y nunca pasará por los nodos que constituyen el segundo de los conjuntos de información del jugador 1. Análogamente, la estrategia s_1^5 indica que el jugador 1 comenzará eligiendo la acción c y posteriormente si el juego llega a los nodos $x4$ o $x5$ eligirá la acción f, acción que nunca tendrá la oportunidad de elegir si previamente ha elegido la acción c. De todas formas, tal como se ha definido formalmente el concepto de estrategia, hace falta especificar una acción para cada uno de los conjuntos de información del jugador.

El conjunto de los conjuntos de información para el jugador 2 es:

$$H_2 = \{\{x2, x3\}\}$$

Las estrategias puras para el jugador 2 son las siguientes:

$$s_2^1 \equiv s_2^1(\{x2, x3\}) = d,\ s_2^2 \equiv s_2^2(\{x2, x3\}) = e$$

El conjunto de estrategias puras del jugador 2 es:

$$S_2 = \{s_2^1, s_2^2\}$$

Obsérvese de nuevo que, dependiendo de la estrategia del jugador 1, pudiera ocurrir que el jugador 2 elija una estrategia que corresponda a una situación del juego que nunca se va a producir. Así, si el jugador 1 elige alguna de sus estrategias s_1^1 o s_1^2 el juego finaliza en el nodo x_1 sin que el jugador 2 tenga ninguna opción de elegir alguna acción.

Para cada combinación formada por una de las estrategias del jugador 1 y una de las estrategias del jugador 2 se realiza un curso del juego, llegándose a un nodo terminal. Así por ejemplo, si el jugador 1 elige su estrategia s_1^4 y el jugador 2 elige s_2^2, el jugador 1 comienza eligiendo la acción b, sigue el jugador 2 eligiendo la acción e, y finaliza el jugador 1 eligiendo la acción g, llegándose al nodo terminal $x11$ recibiendo el jugador 1 un pago de 2 y el jugador 2 un pago de 1. Si, por ejemplo, el jugador 1 elige su estrategia s_1^2 y el jugador 2 su estrategia s_2^1, el jugador 1 comienza eligiendo la acción a, llegándose directamente al nodo terminal $x1$, sin que el jugador 2 tenga ocasión de poner en práctica su acción d que constituye su estrategia elegida, ni el jugador 1 tenga opción de elegir la acción g que forma parte de su estrategia elegida. Por tanto, el concepto de estrategia requiere redundancia, lo cual es inevitable porque un jugador puede querer elegir una estrategia que evite un conjunto de información de otro jugador, precisamente por la acción que dicho jugador eligiría en tal conjunto de información.

Los pagos que reciben los jugadores para cada una de las combinaciones posibles de estrategias puras son los siguientes:

$$\begin{aligned}
u_1(s_1^1, s_2^1) &= 1, \quad u_2(s_1^1, s_2^1) = 0\\
u_1(s_1^1, s_2^2) &= 1, \quad u_2(s_1^1, s_2^2) = 0\\
u_1(s_1^2, s_2^1) &= 1, \quad u_2(s_1^2, s_2^1) = 0\\
u_1(s_1^2, s_2^2) &= 1, \quad u_2(s_1^2, s_2^2) = 0\\
u_1(s_1^3, s_2^1) &= 0, \quad u_2(s_1^3, s_2^1) = 1\\
u_1(s_1^3, s_2^2) &= 3, \quad u_2(s_1^3, s_2^2) = 0\\
u_1(s_1^4, s_2^1) &= 1, \quad u_2(s_1^4, s_2^1) = 1\\
u_1(s_1^4, s_2^2) &= 2, \quad u_2(s_1^4, s_2^2) = 1\\
u_1(s_1^5, s_2^1) &= 0, \quad u_2(s_1^5, s_2^1) = 0\\
u_1(s_1^5, s_2^2) &= 1, \quad u_2(s_1^5, s_2^2) = -1\\
u_1(s_1^6, s_2^1) &= 0, \quad u_2(s_1^6, s_2^1) = 0\\
u_1(s_1^6, s_2^2) &= 1, \quad u_2(s_1^6, s_2^2) = -1
\end{aligned}$$

Ahora estamos en condiciones de definir formalmente qué se entiende por representación de un juego en forma estratégica (o forma normal).

Definición 1.15

Un juego en forma estratégica (o en forma normal) G viene especificado por los siguientes elementos: $G = \{J, (S_i)_{i \in J}, (u_i)_{i \in J}\}$.

Por tanto, un juego en forma estratégica viene especificado por el conjunto de jugadores, el conjunto de estrategias para cada jugador y los pagos (o utilidades) que reciben los jugadores para cada combinación de estrategias.

En el Ejemplo 1.15 se han obtenido todos los elementos que constituyen la representación del juego en forma estratégica.

Para juegos con dos jugadores, con un número finito de estrategias puras para cada jugador la representación estratégica del juego se puede representar por su matriz de pagos de la siguiente forma:

Sean:

$J = \{1, 2\}$, el conjunto de jugadores

$S_1 = \{s_1^1, s_1^2, ..., s_1^m\}$, el conjunto de estrategias puras del jugador 1,

$S_2 = \{s_2^1, s_2^2, ..., s_2^n\}$, el conjunto de estrategias puras del jugador 2.

Se puede recoger toda la información requerida para la forma estratégica del juego en la siguiente matriz:

		Jugador 2			
		s_2^1	s_2^2	$\cdots$	s_2^n
Jugador 1	s_1^1	$u_1(s_1^1, s_2^1), u_2(s_1^1, s_2^1)$	$u_1(s_1^1, s_2^2), u_2(s_1^1, s_2^2)$	$\cdots$	$u_1(s_1^1, s_2^n), u_2(s_1^1, s_2^n)$
	s_1^2	$u_1(s_1^2, s_2^1), u_2(s_1^2, s_2^1)$	$u_1(s_1^2, s_2^2), u_2(s_1^2, s_2^2)$	$\cdots$	$u_1(s_1^2, s_2^n), u_2(s_1^2, s_2^n)$
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	s_1^m	$u_1(s_1^m, s_2^1), u_2(s_1^m, s_2^1)$	$u_1(s_1^m, s_2^2), u_2(s_1^m, s_2^2)$	$\cdots$	$u_1(s_1^m, s_2^n), u_2(s_1^m, s_2^n)$

Así, el juego del Ejemplo 1.15 se puede representar de forma estratégica, en la siguiente forma matricial:

		Jugador 2	
		s_2^1	s_2^2
Jugador 1	s_1^1	1, 0	1, 0
	s_1^2	1, 0	1, 0
	s_1^3	0, 1	3, 0
	s_1^4	1, 1	2, 1
	s_1^5	0, 0	1, -1
	s_1^6	0, 0	1, -1

Ejemplo 1.16

Representar en forma estratégica el juego del Ejemplo 1.11, cuya representación en forma extensiva aparece en la Figura 1.2.

Solución:

Las estrategias puras de la jugadora 1 (Blanca) son:

s_1^1: elegir *P* en la primera acción y elegir *P* si J1 ha elegido *20* y J2 ha elegido *40*.
s_1^2: elegir *P* en la primera acción y elegir *60* si J1 ha elegido *20* y J2 ha elegido *40*.
s_1^3: elegir *20* en la primera acción y elegir *P* si J1 ha elegido *20* y J2 ha elegido *40*.
s_1^4: elegir *20* en la primera acción y elegir *60* si J1 ha elegido *20* y J2 ha elegido *40*.

Las estrategias puras del jugador 2 (Carlos) son:

s_2^1: elegir *P* si la jugadora 1 ha elegido *P* y elegir *P* si la jugadora 1 ha elegido *20*.
s_2^2: elegir *P* si la jugadora 1 ha elegido *P* y elegir *40* si la jugadora 1 ha elegido *20*.
s_2^3: elegir *20* si la jugadora 1 ha elegido *P* y elegir *P* si la jugadora 1 ha elegido *20*.
s_2^4: elegir *20* si la jugadora 1 ha elegido *P* y elegir *40* si la jugadora 1 ha elegido *20*.

Así, el juego del Ejemplo 1.11 se puede representar en forma estratégica del siguiente modo:

		Jugador 2			
		s_2^1	s_2^2	s_2^3	s_2^4
Jugadora 1	s_1^1	25, 25	25, 25	0, 30	0, 30
	s_1^2	25, 25	25, 25	0, 30	0, 30
	s_1^3	30, 0	−20, 10	30, 0	−20, 10
	s_1^4	30, 0	−10, −40	30, 0	−10, −40

Ejemplo 1.17

Representar en forma estratégica el juego de las monedas del Ejemplo 1.12, cuya representación en forma extensiva aparece en la Figura 1.3 o en la Figura 1.4.

Solución:

En este caso se tiene que

$$S_1 = S_2 = \{C, X\}$$

siendo su representación en forma estratégica:

		Jugador 2	
		C	X
Jugador 1	C	$1, -1$	$-1, \quad 1$
	X	$-1, \quad 1$	$1, -1$

Obsérvese que este juego tiene dos representaciones en forma extensiva (Figura 1.3 y Figura 1.4) y una única representación en forma estratégica.

Ejemplo 1.18 El juego de doble o mitad

En un concurso de televisión dos concursantes han conseguido conjuntamente, en la primera parte del concurso, la cantidad de 5.000 euros. En la segunda parte cada jugador debe elegir individualmente y de manera simultánea entre doble o mitad. Si un jugador elige doble y el otro mitad, el que ha elegido doble se lleva 10.000 euros y el otro no se lleva nada. Si los dos eligen mitad se llevan 2.000 euros cada uno (la mitad de lo conseguido en la primera parte menos 1.000 euros que se quedan en la mesa). Si los dos eligen doble se queda todo el dinero en la mesa. Representar el juego en forma estratégica.

Solución:

La representación del juego en forma estratégica es:

		Jugadora 2	
		Doble	*Mitad*
Jugador 1	*Doble*	0, 0	10.000, 0
	Mitad	0, 10.000	2.000, 2.000

Representación en forma estratégica de juegos que contengan movimientos de azar

En un juego que contenga movimientos de azar, para cada combinación de estrategias puras de los jugadores $(s_1, s_2, ..., s_n)$, la función de pagos que recibe el jugador i, que es

$$u_i(s_1, ..., s_n)$$

es la función de utilidad de Von Neumann-Morgenstern asociada con los resultados (posiblemente aleatorios) que se obtienen a partir de las estrategias de los jugadores. Por tanto, en este caso se trata de pagos esperados (o utilidades esperadas).

Ejemplo 1.19

Representar en forma estratégica el juego del Ejemplo 1.13, cuya representación en forma extensiva aparece en las Figuras 1.5 y 1.6.

Solución:

En este juego, además del azar, intervienen los jugadores 1 (Blanca) y 2 (Pedro). Utilizando la notación de la Figura 1.6, los conjuntos de información de ambos jugadores son:

$$H_1 = \{\{x_1\}, \{x_2\}\}$$
$$H_2 = \{\{x_3, x_5\}\}$$

Las estrategias puras de la jugadora 1 son:

$$s_1^1 \equiv (s_1^1(\{x_1\}), s_1^1(\{x_2\})) = (c, e)$$
$$s_1^2 \equiv (s_1^2(\{x_1\}), s_1^2(\{x_2\})) = (c, f)$$
$$s_1^3 \equiv (s_1^3(\{x_1\}), s_1^3(\{x_2\})) = (d, e)$$
$$s_1^4 \equiv (s_1^4(\{x_1\}), s_1^4(\{x_2\})) = (d, f)$$

Por tanto, el conjunto de estrategias puras de la jugadora 1 es

$$S_1 = \{s_1^1, s_1^2, s_1^3, s_1^4\}$$

Las estrategias de la jugadora 1 (Blanca) definidas anteriormente pueden expresarse, de acuerdo con la notación de la Figura 1.5 y con el enunciado del Ejemplo 1.13 de la siguiente forma:

s_1^1 consiste en APOSTAR si salen oros o copas y APOSTAR si salen espadas o bastos.

s_1^2 consite en APOSTAR si salen oros o copas y RETIRARSE si salen espadas o bastos.

s_1^3 consiste en RETIRARSE si salen oros o copas y APOSTAR si salen espadas o bastos.

s_1^4 consiste en RETIRARSE si salen oros o copas y RETIRARSE si salen espadas o bastos.

Las estrategias puras del jugador 2, utilizando la notación de la Figura 1.6, son:

$$s_2^1 \equiv s_2^1(\{x_3, x_5\}) = g$$
$$s_2^2 \equiv s_2^2(\{x_3, x_5\}) = h$$

Por tanto, a partir de la Figura 1.5 y del enunciado del Ejemplo 1.13, podemos decir que:

s_2^1 consiste en RECOGER LA APUESTA

s_2^2 consiste en PASAR

El conjunto de estrategias del jugador 2 es

$$S_2 = \{s_2^1, s_2^2\}$$

La representación del juego en forma estratégica es la siguiente:

		Jugador 2	
		s_2^1	s_2^2
Jugadora 1	s_1^1	0, 0	5, -5
	s_1^2	5/2, $-5/2$	0, 0
	s_1^3	$-5/2$, 5/2	5, -5
	s_1^4	0, 0	0, 0

Veamos cómo se han obtenido los pagos en la tabla anterior.

Si la jugadora 1 elige s_1^1 y el jugador 2 elige s_2^1, entonces se llegará al nodo terminal $x7$ (en la Figura 1.6) si la carta que toma la jugadora 1 es un oro o una copa, lo cual ocurre con probabilidad 0,5, y al nodo terminal $x9$ si la carta es una espada o un basto, lo cual ocurre también con probabilidad 0,5. Por tanto, para esa combinación de estrategias puras los pagos serán: 10, -10, con probabilidad 0,5, y -10, 10, con probabilidad 0,5. Así que el pago esperado que va a recibir la jugadora 1 es igual a $0{,}5 \times 10 + 0{,}5 \times (-10) = 0$. El pago esperado que va a recibir el jugador 2 es $0{,}5 \times (-10) + 0{,}5 \times 10 = 0$.

De manera análoga, si por ejemplo la jugadora 1 elige s_1^3 y el jugador 2 elige s_2^2 se llegará al nodo $x4$ (con pagos 5, -5), con probabilidad 0,5, y al nodo $x10$ (con pagos 5, -5), con probabilidad 0,5. Por lo que el pago esperado que va a recibir la jugadora 1 es igual a 5 y el pago esperado que va a recibir el jugador 2 es -5. En realidad, en este caso los jugadores van a recibir dichos pagos con seguridad (probabilidad 1).

Representación estratégica en juegos con tres jugadores

En juegos con tres jugadores en los que cada uno de ellos tiene un número finito de estrategias puras es posible recoger toda la información de la representación estratégica del juego utilizando varias tablas parecidas a las utilizadas para juegos con dos jugadores, procediendo de la manera que se indica en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.20

Una familia está compuesta por el padre, la madre y la hija. Un día quieren pasar la velada juntos viendo un programa de televisión. Hay tres programas emitidos simultáneamente que les interesan: película, Operación Triunfo y fútbol. La utilidad que obtiene cada uno de los miembros de la familia por cada uno de los programas aparece en la Tabla 1.1:

Tabla 1.1

	Padre	**Madre**	**Hija**
Película	2	3	2
Operación Triunfo	1	2	3
Fútbol	3	1	1

Cada uno de los miembros de la familia vota por uno de los tres programas y deciden ver todos el programa que tenga más votos, decidiendo el voto de la madre en caso de empate. Representar la situación como un juego en forma estratégica.

Solución:

Sean:

El padre, el jugador 1.

La madre, la jugadora 2.

La hija, la jugadora 3.

Para cada uno de los jugadores, sus estrategias son:

P: votar por ver la película.
OT: votar por ver Operación Triunfo.
F: votar por ver el partido de fútbol.

Por tanto,

$$S_1 = S_2 = S_3 = \{P, OT, F\}$$

La representación del juego en forma estratégica es:

Sea P la estrategia de la jugadora 3		**Jugadora 2**		
		P	OT	F
Jugador 1	P	2, 3, 2	2, 3, 2	2, 3, 2
	OT	2, 3, 2	1, 2, 3	3, 1, 1
	F	2, 3, 2	1, 2, 3	3, 1, 1

Sea *OT* la estrategia de la jugadora 3		**Jugadora 2**		
		P	*OT*	*F*
Jugador 1	*P*	2, 3, 2	1, 2, 3	3, 1, 1
	OT	1, 2, 3	1, 2, 3	1, 2, 3
	F	2, 3, 2	1, 2, 3	3, 1, 1

Sea *F* la estrategia de la jugadora 3		**Jugadora 2**		
		P	*OT*	*F*
Jugador 1	*P*	2, 3, 2	1, 2, 3	3, 1, 1
	OT	2, 3, 2	1, 2, 3	3, 1, 1
	F	3, 1, 1	3, 1, 1	3, 1, 1

En este caso, cada combinación de estrategias lleva asociada un vector de pagos de dimensión tres, cuya primera componente representa el pago que recibe el jugador 1, cuya segunda componente es el pago que recibe la jugadora 2, recogiendo la tercera componente el pago que recibe la jugadora 3.

Obsérvese que para cada estrategia de la jugadora 3 se construye una tabla en la que se van combinando pares de estrategias de los jugadores 1 y 2 con la estrategia fijada de la jugadora 3 que aparece en el encabezamiento de la tabla correspondiente.

Ejemplo 1.21

Representar en forma estratégica el juego del Ejemplo 1.14, cuya forma extensiva aparece en el diagrama de la Figura 1.7.

Solución:

- El conjunto de jugadores es:

$$J = \{1, 2, 3\}$$

- Veamos cuáles son los conjuntos de estrategias puras de los jugadores.

El jugador 1 tiene un único conjunto de información, el conjunto que contiene únicamente al nodo inicial o, por lo que las estrategias del jugador 1 se corresponden con las acciones disponibles desde el nodo inicial. Por tanto,

$$S_1 = \{a, b, c\}$$

El jugador 2 tiene dos conjuntos de información, que son

$$\{x1\} \quad \text{y} \quad \{x2\}$$

Representamos las estrategias puras del jugador 2 de la siguiente forma:

(d, f), que consiste en elegir la acción d si el juego llega al nodo $x1$ y en elegir la acción f si el juego llega al nodo $x2$.

(d, g), que consiste en que el jugador 2 elige d desde $x1$ y g desde $x2$.

(e, f), que consiste en que el jugador 2 elige e desde $x1$ y f desde $x2$.

(e, g), en que el jugador 2 elige e desde $x1$ y g desde $x2$.

Por tanto,

$$S_2 = \{(d, f), (d, g), (e, f), (e, g)\}$$

Como el jugador 3 tiene un único conjunto de información formado por los nodos $x3$, $x4$, $x5$, $x6$ y $x7$, las estrategias puras del jugador 3 se corresponden con las acciones disponibles desde cada uno de los nodos que forman su único conjunto de información. Por tanto,

$$S_3 = \{h, i\}$$

Para tener todos los elementos que constituyen la representación del juego en forma estratégica sólo faltan añadir los vectores de pago asociados a cada una de las combinaciones de estrategias puras de los tres jugadores. Vamos a utilizar la forma matricial para tres jugadores. Para ello elegimos uno de los jugadores, por ejemplo el jugador 3, y combinamos cada una de las estrategias de dicho jugador con todas las combinaciones de estrategias de los demás jugadores, en este caso los jugadores 1 y 2, calculando los pagos para cada combinación de estrategias. La representación que se obtiene es la siguiente:

Sea *h* la estrategia pura del jugador 3		**Jugador 2**			
		(d, f)	(d, g)	(e, f)	(e, g)
Jugador 1	a	1, 4, 3	1, 4, 3	1, 3, 2	1, 3, 2
	b	2, 4, −1	2, 4, −1	2, 4, −1	2, 4, −1
	c	2, 1, −1	2, 1, 2	2, 1, −1	2, 1, 2

Sea *i* la estrategia pura del jugador 3		**Jugador 2**			
		(d, f)	(d, g)	(e, f)	(e, g)
Jugador 1	a	2, 1, −1	2, 1, −1	1, 1, 3	1, 1, 3
	b	1, 5, 2	1, 5, 2	1, 5, 2	1, 5, 2
	c	1, 0, 2	3, 1, 1	1, 0, 2	3, 1, 1

1.6. JUEGOS COOPERATIVOS

Ya en el libro de Von Neumann y Morgenstern (1947) se distingue entre juegos no cooperativos y juegos cooperativos. Las formas extensiva y estratégica de representación de un juego que hemos introducido en apartados anteriores se utilizan para estudiar juegos no cooperativos, en los que interesan las estrategias de los jugadores y las utilidades o los pagos que se obtienen para combinaciones de estrategias.

En los juegos cooperativos se parte de que es posible que algunos jugadores puedan llegar a acuerdos vinculantes (a los que quedarían obligados de manera ineludible), por lo que se trata de estudiar los resultados que puede obtener cada una de las coaliciones de jugadores que se pueda formar. Por tanto, se trata de estudiar cómo pueden actuar grupos de jugadores, interesándonos los comportamientos colectivos y sin que haga falta detenerse en las acciones individuales de cada uno de los miembros de una coalición.

Sea

$$J = \{1, 2, ..., n\}$$

el conjunto de jugadores. Obsérvese que el conjunto de jugadores es finito.

Sea

$$P(J)$$

el conjunto de las partes de J, que está formado por cada una de las posibles coaliciones que se pueden formar (incluyendo la coalición sin jugadores que es $\emptyset$).

Supongamos que las utilidades de los jugadores son transferibles, lo cual quiere decir que las ganancias o pérdidas que se obtienen al actuar como coalición pueden repartirse entre los jugadores que la componen.

Se llama función característica a una función que asigna a cada coalición un número real, asignando al conjunto vacío el valor cero. Es decir,

$$\begin{array}{llcl} v: & P(J) & \rightarrow & R \\ & S & \rightarrow & v(S) \end{array}$$

verificando que $v(\emptyset) = 0$.

Para una coalición S, a $v(S)$ se le llama valor de la coalición y es el valor mínimo que puede obtener la coalición si todos sus miembros se asocian y juegan en equipo. Se trata por tanto del valor que una coalición puede garantizarse que obtendrá si realmente funciona como tal coalición y toma sus decisiones de manera adecuada.

A continuación se define formalmente qué se entiende por representación de un juego en forma coalicional o en forma de función característica.

Definición 1.16

Un juego en forma coalicional o en forma de función característica con utilidades transferibles consiste en:

- Un conjunto finito de jugadores $J = \{1, 2, ..., n\}$.
- Una función característica, que asocia a cada subconjunto S de J (o coalición) un número real $v(S)$ (valor de la coalición), siendo $v(\emptyset) = 0$.

Por tanto, $G = (J, v)$ es un juego en forma coalicional o en forma de función característica con utilidades transferibles si J y v están especificados.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.22

Se consideran tres empresas que producen el mismo bien. Dadas sus tecnologías, la empresa 1 puede producir 0, 8 o 16 unidades de *output* al coste unitario de 2 unidades monetarias, la empresa 2 puede producir 0, 4 o 12 unidades al coste unitario de 2 u.m. y la empresa 3 puede producir 0, 8 o 12 unidades al coste unitario de 2 u.m. La inversa de la función de demanda del bien es conocida por las tres empresas y tiene la forma siguiente:

$$p(x) = 35 - 0{,}75x$$

en donde x es la cantidad total de producto en el mercado.

Se trata de representar el juego en forma coalicional.

Solución:

En primer lugar vamos a representar el juego en forma estratégica.

Sean

$$J = \{1, 2, 3\}$$

en donde la jugadora 1 es la empresa 1, la jugadora 2 es la empresa 2 y la jugadora 3 es la empresa 3.

$$S_1 = \{0, 8, 16\}$$
$$S_2 = \{0, 4, 12\}$$
$$S_3 = \{0, 8, 12\}$$

son los respectivos conjuntos de estrategias puras de las jugadoras.

Para las estrategias $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$, $x_3 \in S_3$, la cantidad total de producto que llega al mercado es $x = x_1 + x_2 + x_3$.

El pago que obtiene cada jugadora i viene determinado por la función de beneficios, del siguiente modo:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = p(x)x_i - 2x_i, \text{ para } i = 1, 2, 3$$

La representación del juego en forma estratégica es la siguiente:

Jugadora 3: $x_3 = 0$		**Jugadora 2**		
		0	4	12
Jugadora 1	0	0, 0, 0	0, 120, 0	0, 288, 0
	8	216, 0, 0	192, 96, 0	144, 216, 0
	16	336, 0, 0	288, 72, 0	192, 144, 0

Jugadora 3: $x_3 = 8$		Jugadora 2		
		0	4	12
Jugadora 1	0	0, 0, 216	0, 96, 192	0, 216, 144
	8	168, 0, 168	144, 72, 144	96, 144, 96
	16	240, 0, 120	192, 48, 96	96, 72, 48

Jugadora 3: $x_3 = 12$		Jugadora 2		
		0	4	12
Jugadora 1	0	0, 0, 288	0, 84, 252	0, 180, 180
	8	144, 0, 216	120, 60, 180	72, 108, 108
	16	192, 0, 144	144, 36, 108	48, 36, 36

Obtengamos ahora la forma coalicional del juego. Para ello vamos a ir calculando el valor de cada coalición:

Empezamos con la coalición formada únicamente por la jugadora 1. A la vista de la representación del juego en forma estratégica, es claro que si la jugadora 1 elige su estrategia 0 obtendrá un pago de 0, hagan lo que hagan las demás jugadoras. Si elige su estrategia 8 obtendrá alguna de las cantidades 216, 192, 144, 168, 144, 96, 144, 120, 72, dependiendo de la combinación de estrategias de las jugadoras 2 y 3, por lo que eligiendo tal estrategia (8) la jugadora 1 puede garantizarse que obtendrá el siguiente pago:

$$\min\{216, 192, 144, 168, 144, 96, 144, 120, 72\} = 72$$

De manera análoga, si la jugadora 1 elige su estrategia 16, obtendrá un pago que dependerá de las estrategias de las jugadoras 2 y 3, pudiendo garantizarse el siguiente pago:

$$\min\{336, 288, 192, 240, 192, 96, 192, 144, 48\} = 48$$

Por tanto, la jugadora 1 puede elegir aquella estrategia que le asegure el máximo de los valores garantizados:

$$\max\{0, 72, 48\} = 72$$

valor que tiene asegurado jugando su estrategia $x_1 = 8$, por lo que el valor de la coalición formada exclusivamente por la jugadora 1 es igual a 72.

$$v(\{1\}) = 72$$

Procediendo de la misma forma con las jugadoras 2 y 3 se obtiene que:

$$v(\{2\}) = 36$$

que la jugadora 2 tiene asegurado si juega su estrategia $x_2 = 4$ o bien $x_2 = 12$ y

$$v(\{3\}) = 48$$

que la jugadora 3 tiene asegurado jugando su estrategia $x_3 = 8$.

Consideremos ahora la coalición formada por las jugadoras 1 y 2. Para cada combinación de estrategias de las jugadoras 1 y 2 la coalición {1, 2} obtendrá un pago (suma de los pagos de ambas jugadoras) que dependerá de la estrategia que juegue la jugadora 3.

Si $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, la coalición {1, 2} obtendrá conjuntamente un pago igual a 0.

Si $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, la coalición {1, 2} se garantiza el siguiente pago:

$$\min\{120, 96, 84\} = 84$$

Procediendo de esta forma, en la Tabla 1.2 se presentan los valores que se garantiza la coalición en función de la combinación de estrategias que juegue:

Tabla 1.2

x_1	x_2	**Pago que se garantiza la coalición {1, 2}**
0	0	$\min\{0, 0, 0\} = 0$
0	4	$\min\{120, 96, 84\} = 84$
0	12	$\min\{288, 216, 180\} = 180$
8	0	$\min\{216, 168, 144\} = 144$
8	4	$\min\{288, 216, 180\} = 180$
8	12	$\min\{360, 240, 180\} = 180$
16	0	$\min\{336, 240, 192\} = 192$
16	4	$\min\{360, 240, 180\} = 180$
16	12	$\min\{336, 184, 84\} = 84$

Eligiendo las jugadoras 1 y 2 adecuadamente sus estrategias, la coalición {1, 2} puede asegurarse el valor:

$$\max\{0, 84, 180, 144, 180, 180, 192, 180, 84\} = 192$$

que es el pago que la coalición {1, 2} se garantiza a sí misma eligiendo como estrategias $x_1 = 16$, $x_2 = 0$. Obsérvese que queda sin especificar cómo se reparte el valor obtenido por la coalición entre las dos jugadoras que la componen.

Por tanto, se tiene que

$$v(\{1, 2\}) = 192$$

Procediendo de manera análoga con las otras dos coaliciones formadas por dos jugadoras, se llega a que

$$v(\{1, 3\}) = 192$$

que es el pago que la coalición {1, 3} se garantiza a sí misma eligiendo como estrategias $x_1 = 8$, $x_3 = 8$.

Análogamente,

$$v(\{2, 3\}) = 144$$

que es el pago que la coalición {2, 3} se garantiza a sí misma eligiendo como estrategias $x_2 = 12$, $x_3 = 0$ o bien $x_2 = 4$, $x_3 = 8$, o bien $x_2 = 0$, $x_3 = 12$, o bien $x_2 = 4$, $x_3 = 12$.

Por último calculemos el valor de la coalición formada por las tres jugadoras, y para ello calculemos en primer lugar la suma de pagos que obtienen las tres jugadoras para cada combinación de estrategias.

Jugadora 3: $x_3 = 0$		**Jugadora 2**		
		0	4	12
Jugadora 1	0	0	120	288
	8	216	288	360
	16	336	360	336

Jugadora 3: $x_3 = 8$		**Jugadora 2**		
		0	4	12
Jugadora 1	0	216	288	360
	8	336	360	336
	16	360	336	216

Jugadora 3: $x_3 = 12$		**Jugadora 2**		
		0	4	12
Jugadora 1	0	288	336	360
	8	360	360	288
	16	336	288	120

Eligiendo las jugadoras 1, 2 y 3 adecuadamente sus estrategias, la coalición {1, 2, 3} puede asegurarse el valor:

$$\max \left\{ \begin{matrix} 0, & 120, & 288, & 216, & 288, & 360, & 336, & 360, & 336, \\ 216, & 288, & 360, & 336, & 360, & 336, & 360, & 336, & 216, \\ 288, & 336, & 360, & 360, & 360, & 288, & 336, & 288, & 120 \end{matrix} \right\} = 360$$

que es el pago que la coalición {1, 2, 3} se garantiza a sí misma eligiendo como estrategias cualquiera de las siguientes:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 8, & x_2 = 12, & x_3 = 0 \\ x_1 = 16, & x_2 = 4, & x_3 = 0 \\ x_1 = 0, & x_2 = 12, & x_3 = 8 \\ x_1 = 8, & x_2 = 4, & x_3 = 8 \\ x_1 = 16, & x_2 = 0, & x_3 = 8 \\ x_1 = 0, & x_2 = 12, & x_3 = 12 \\ x_1 = 8, & x_2 = 0, & x_3 = 12 \\ x_1 = 8, & x_2 = 4, & x_3 = 12 \end{array}$$

Por tanto,

$$v(\{1, 2, 3\}) = 360$$

La representación del juego en forma coalicional es

$$G = (J, v)$$

en donde

$$J = \{1, 2, 3\}$$

es el conjunto de jugadoras y

$$v: \ P(\{1, 2, 3\}) \ \to \ R$$

es la función característica, definida de la siguiente forma:

S	∅	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	0	72	36	48	192	192	144	360

Ejemplo 1.23

Supongamos que se plantea la necesidad de abastecer de electricidad a tres poblaciones. Para ello se construirá una red de tendidos eléctricos que conecte dichas poblaciones con la central eléctrica. En la Figura 1.9 se presentan los costes de todos los posibles tendidos que interconectan las poblaciones (1, 2, 3) y la central eléctrica (0). Representar el juego en forma coalicional.

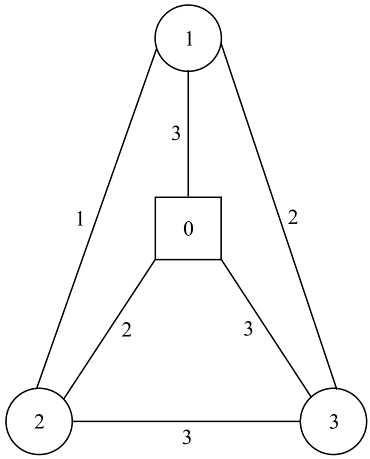


Figura 1.9

Solución:

Sea el conjunto de jugadoras

$$J = \{1, 2, 3\}$$

Si la población 1 va sola y no logra un acuerdo de cooperación con ninguna otra de las poblaciones (coalición $\{1\}$), incurrirá en un coste igual a 3, ya que tendrá que cargar con el coste que supone construir un tendido eléctrico que va de la central eléctrica a la población 1. Sea $c(\{1\}) = 3$.

De manera análoga, si la población 2 va sola (coalición $\{2\}$), incurrirá en un coste de 2. Sea $c(\{2\}) = 2$.

Si la población 3 va sola (coalición $\{3\}$), incurrirá en un coste de 3. Sea $c(\{3\}) = 3$.

Si las poblaciones 1 y 2 logran un acuerdo de cooperación y deciden construir la red de tendidos eléctricos de manera conjunta lo harán de la forma que les suponga un coste menor, que consiste en unir la central con la población 2 (coste igual a 2) y la población 2 con la población 1 (coste igual a 1). El coste total para la coalición $\{1, 2\}$ será por tanto igual a 3. Sea $c(\{1, 2\}) = 3$. Sin cooperación entre 1 y 2 la suma de sus costes sería igual a 5. Definimos el valor de la coalición $\{1, 2\}$ de la siguiente forma:

$$v(\{1, 2\}) = c(\{1\}) + c(\{2\}) - c(\{1, 2\}) = 3 + 2 - 3 = 2$$

De manera análoga,

$$v(\{1, 3\}) = c(\{1\}) + c(\{3\}) - c(\{1, 3\}) = 3 + 3 - 5 = 1$$

$$v(\{2, 3\}) = c(\{2\}) + c(\{3\}) - c(\{2, 3\}) = 2 + 3 - 5 = 0$$

En general, para una coalición $S \neq \varnothing$ definimos el valor de dicha coalición de la siguiente forma:

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S)$$

De esta forma se obtiene que

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = c(\{1\}) + (\{2\}) + (c\{3\}) - c(\{1, 2, 3\}) = 3 + 2 + 3 - 5 = 3$$

en donde $c(\{1, 2, 3\}) = 5$, que se alcanza uniendo la central eléctrica con la población 2 y ésta con la población 1 que a su vez se une con la población 3.

Por tanto, la representación del juego en forma coalicional es

$$G = (J, v)$$

en donde

$$J = \{1, 2, 3\}$$

es el conjunto de las jugadoras y

$$v : P(\{1, 2, 3\}) \to R$$

es la función característica, definida de la siguiente forma:

S	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$v(S)$	0	0	0	0	2	1	0	3

Ejemplo 1.24 ***Shapley* (1987)**

Un ganadero tiene una vaca que puede vender en el mercado, obteniendo un beneficio de una unidad. Para poder venderla es imprescindible que la vaca pase por la finca de uno de sus dos vecinos. Representar la situación como un juego en forma coalicional.

Solución:

Podemos representar el juego de la siguiente forma:

$$G = (J, v)$$

en donde

$$J = \{1, 2, 3\}$$

es el conjunto de jugadores, siendo el vecino 1 el jugador 1, el vecino 2 el jugador 2 y el ganadero dueño de la vaca el jugador 3.

La función característica es una función con dominio del conjunto de las partes de $\{1, 2, 3\}$, que toma valores en R y que está definida de la siguiente forma:

S	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$v(S)$	0	0	0	0	0	1	1	1

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.1 (Bierman y Fernández (1993)). Una persona es elegida aleatoriamente y se le presentan las siguientes 3 loterías:

a) Ganar 5 u.m. con probabilidad 0,5 y no ganar nada con probabilidad 0,5.
b) Ganar 10 u.m. con probabilidad 0,25 y no ganar nada con probabilidad 0,75.
c) Ganar 10/3 u.m. con probabilidad 0,75 y no ganar nada con probabilidad 0,25.

Ésta prefiere a) a b) y b) a c). Supondremos que es un maximizador de la utilidad esperada y que la función de utilidad esperada asociada a sus preferencias es de Von Neumann-Morgenstern. Tomando $u(0 \text{ u.m.}) = 0$ y $u(10 \text{ u.m.}) = 1$, y considerando sus preferencias, encuentre los límites máximos y/o mínimos para $u(5 \text{ u.m.})$ y $u(10/3 \text{ u.m.})$. Teniendo en cuenta que la función de utilidad que se forma con estas preferencias es continua y diferenciable, ¿qué podemos decir acerca de la aversión al riesgo de la persona en el intervalo [0, 10]?

1.2 Un individuo ha pensado realizar una inversión en un activo financiero de gran volatilidad, que proporciona una ganancia bruta de 0 u.m. (es decir, pérdida de la cantidad invertida) con probabilidad 3/4 y de 6 u.m. con probabilidad 1/4 por cada u.m. invertida (1 u.m. de recuperación de la inversión + 5 u.m. de rendimiento neto). Siendo sus preferencias representables mediante la función de utilidad $u(w) = \ln(w + 9)$ y su riqueza actual $w_0 > 1$, ¿cuánto decidirá invertir?

1.3 (Henderson y Quandt (1985)). Un consumidor cuya conducta se adapta a los axiomas de Von Neumann-Morgenstern y cuya riqueza inicial es de $w_0 = 160.000$ u.m., está sujeto al riesgo de un incendio. La probabilidad de un gran incendio, con 70.000 u.m. en pérdidas, es 0,05 y la de un incendio destructor, con 120.000 u.m. en pérdidas, es también 0,05. Su función de utilidad es $u(w) = w^{1/2}$. ¿Cuál es la máxima cantidad que estará dispuesto a pagar por una póliza de seguros que le asegure contra el riesgo de incendio?

1.4 Blanca tiene un riqueza actual de $w_0 = 2.000$ u.m. y ha de decidir si invertirá o no en un proyecto que requiere que invierta todos sus ahorros (w_0), y que genera los siguientes rendimientos: la pérdida del capital invertido con una probabilidad de 1/2, y un rendimiento bruto de 6.000 u.m. (2.000 + 4.000) con probabilidad 1/2. Sabiendo que sus preferencias pueden ser representadas por la función de utilidad $u(w) = w^{1/2}$, ¿qué decisión tomará?

Supongamos que Carlos comparte las mismas preferencias que Blanca y posee el mismo nivel de riqueza, $w_0 = 2.000$ u.m. Si tuvieran que decidir entre una inversión conjunta (50% cada uno, es decir, $I_i = 1.000$ u.m.) o no llevar a cabo el proyecto, ¿qué decisión tomarían?

1.5 (Campbell (1995)). Un individuo (sin escrúpulos cívicos) con una función de utilidad sobre la riqueza que viene dada por $u(w) = \ln(w + 20)$ y tiene una renta de 100 u.m. sin contar impuestos, es gravado con un impuesto del 40% sobre la renta ganada. Si le encuentran que ha realizado una declaración fraudulenta (declarando una renta inferior a la real), tendrá que pagar los impuestos que deba y un pago adicional de 1 u.m. por cada 1 u.m. que no haya declarado. ¿Cuánta renta dejará sin declarar si la probabilidad de ser descubierto es de 0,2?

1.6 En un juego, cada uno de los dos jugadores anuncia (simultáneamente) un número perteneciente al conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si $a_1 + a_2 \leqslant 6$, en donde a_i es el número anunciado por el jugador i entonces cada jugador i recibe un pago de a_i. Si $a_1 + a_2 > 6$ y $a_i < a_j$, entonces el jugador i recibe a_i y el jugador j recibe $6 - a_i$. Si $a_1 + a_2 > 6$ y $a_i = a_j$, entonces cada jugador recibe 3. Represente el juego en forma estratégica.

1.7 Considere el siguiente juego para dos jugadores: cada jugador empieza con tres fichas: roja, blanca y azul. Cada ficha puede ser utilizada sólo una vez. Para comenzar, cada jugador selecciona una de sus fichas y la coloca en la mesa, manteniéndola oculta. Ambos jugadores descubren entonces sus fichas y determinan el pago que debe abonar el perdedor y que recibe el ganador, según los datos de la tabla siguiente. A continuación cada jugador selecciona una de sus dos fichas restantes, y se repite el procedimiento. Finalmente, cada jugador muestra su tercera ficha, repitiéndose el procedimiento por tercera vez.

Tabla 1.3.

	Pago (en decenas de euros)
Roja gana a blanca	5
Blanca gana a azul	4
Azul gana a roja	3
Coincidencia de colores	0

Represente el juego en forma estratégica.

1.8 Considere el siguiente juego entre un (hasta ahora) monopolista y un entrante potencial. Suponga que se está discutiendo la aprobación de una ley de control de la contaminación. El monopolista, de gran influencia política, puede apoyar la propuesta del Grupo Verde, apoyar la propuesta de la oposición, o no apoyar una nueva ley que exige controles de contaminación en todas las empresas de la industria. Suponga que cada propuesta se aprueba si y sólo si la apoya el monopolista. Los controles de contaminación propuestos por los verdes aumentarían en 60.000 euros los costes fijos de cada empresa, tanto si opera en régimen de monopolio como de duopolio, mientras que la propuesta de la oposición los aumentaría en 24.000 euros. El entrante potencial puede entrar o no entrar en la industria. Sin costes de control de contaminación, los beneficios del monopolio son 120.000 euros y los del duopolio 48.000 euros. Si el entrante potencial decide no entrar, sus beneficios son cero.

a) Suponga que el entrante tiene que tomar su decisión de entrada antes de conocer la decisión del monopolista.
   a.1) Represente el juego en forma extensiva.
   a.2) Represente el juego en forma estratégica.

b) Suponga ahora, por el contrario, que el entrante conoce, antes de tomar su decisión, la decisión del monopolista.
   b.1) Represente el juego en forma extensiva.
   b.2) Represente el juego en forma estratégica.

1.9 Un empresario ha convencido a dos inversores para invertir en un proyecto a 2,5 años, depositando cada uno de ellos un total de 18.000 euros. Las características del proyecto permiten a los inversores decidir la recuperación del capital invertido en dos ocasiones, al cumplimiento del primer año y al cumplimiento del segundo año, si bien en el primer caso la recuperación es parcial, un total de 24.000 euros (inferior a la suma total de 36.000 euros invertidos), mientras que en el segundo caso se genera una rentabilidad positiva, devolviéndose un total de 48.000 euros.

Supongamos que al final de cada año de vigencia del proyecto los inversores han de decidir simultáneamente si recuperan o no su inversión, y que se suceden los siguientes pagos en función de tales decisiones. Si al final del primer año, ambos inversores deciden abandonar el proyecto, cada uno recibe 12.000 euros y el juego se acaba. Si sólo un inversor decide abandonar, éste recibe 18.000 euros y el otro recibe 6.000 euros, y el juego se acaba. Finalmente, si ambos inversores deciden mantener su inversión durante el segundo año, el proyecto llega a su finalización y los inversores han de decidir la forma en que se devuelve la inversión: mediante dinero o mediante acciones con total liquidez en el mercado bursátil. Si ambos deciden el cobro en dinero, cada uno de ellos recibe 24.000 euros y el juego se acaba. Si sólo uno prefiere el dinero, ese inversor recibe 30.000 euros, el otro recibe 18.000 euros y el juego se acaba. Y, por último, si ninguno desea el dinero, la empresa entrega a cada uno un paquete de acciones por valor de 24.000 euros y el juego se acaba. Por simplicidad, asumiremos que los inversores tienen unas preferencias temporales que les hacen valorar un euro del mismo modo a lo largo de los dos años de vida del proyecto.

a) Represente el juego en forma extensiva.
b) Represente el juego en forma estratégica.

1.10 Se sabe que un juego en forma extensiva está completamente especificado por

$$\Gamma = \{J, (X, \sigma), (A, \alpha), \{X_i\}_{i \in J}, \{H_i\}_{i \in J}, (A(h))_{h \in H}, \rho, r\}$$

Defina cada uno de los elementos de Γ para el juego de la Figura 1.10.

1.11 Una finca rústica está valorada por su actual propietario en 350.000 euros. Un empresario le ofrece acondicionarla para su utilización como polígono industrial, con lo que su valor de mercado alcanzaría los 700.000 euros. Una empresa constructora le ofrece urbanizar la finca para su posible subdivisión en parcelas destinadas a viviendas unifamiliares. Con esta urbanización el valor de la finca sería de 775.000 euros. Represente el juego en forma coalicional.

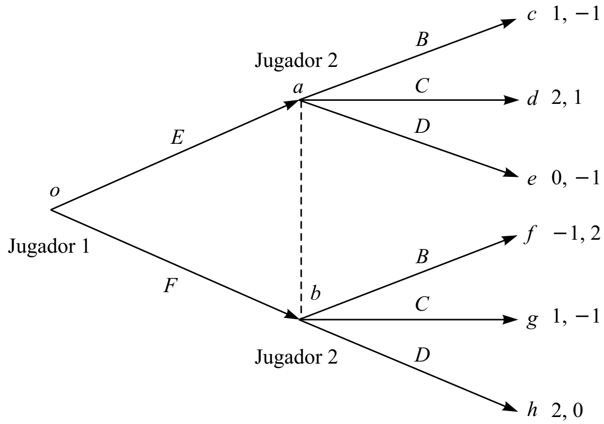


Figura 1.10 Juego del Ejercicio Propuesto 1.10.

1.12 Considere un parlamento en el cual están representados el partido A que tiene el 45% de los escaños, el partido B, con una representación del 30% y el partido C con el 25% de los escaños. Una proposición de ley, para ser aprobada, necesita al menos el 50% de los votos del parlamento. Supongamos que la utilidad es de uno para la coalición ganadora y de cero para la perdedora. Represente el juego en forma coalicional.

CAPÍTULO 2

Juegos estáticos con información completa (I)

En este capítulo comienza el estudio detallado de los modelos más simples de juego, los juegos estáticos con información completa. Estos juegos se representan de manera natural en forma estratégica, ya que los jugadores realizan sus jugadas de manera simultánea, y esta forma sencilla de representación es adecuada para iniciar el estudio de los conceptos de solución de un juego. En las secciones que siguen, y tras una sección introductoria, se abordan algunos conceptos de solución basados en la idea de dominación entre estrategias puras y el importante concepto de equilibrio de Nash en estrategias puras. Se estudian también algunas aplicaciones de las ideas introducidas: el mecanismo de Clark-Groves para la asignación de un bien público, el duopolio y el oligopolio de Cournot, el duopolio y el oligopolio de Bertrand y el problema de la sobreexplotación de los bienes comunales.

2.1. INTRODUCCIÓN

Tras el estudio en el Capítulo 1 de las formas de representación de distintas clases de juegos, en esta sección nos introducimos en los juegos estáticos con información completa. En primer lugar se estudia la notación y terminología adecuadas para estos juegos. Posteriormente se presentan algunos juegos importantes pertenecientes a esta familia. La sección finaliza con unas reflexiones sobre la idea de solución de un juego.

Notación y terminología

Como en otras clases de juegos, los elementos fundamentales de un juego estático con información completa son: **jugadores, estrategias disponibles** para cada jugador, y **ganancias o pagos** resultantes para cada jugador (utilidad que a cada uno reporta cada resultado del juego).

En este caso, los jugadores toman sus decisiones simultáneamente (o dicho con más precisión, sin conocer las decisiones de los otros) y de una sola vez, y a continuación reciben las ganancias, que dependen de la combinación de decisiones tomadas. Por esta razón, los juegos estáticos reciben también el nombre de «juegos con jugadas simultaneas». Además, se supone que es de **dominio público** el conocimiento de la estructura completa del juego. Es decir, todos los jugadores conocen las estrategias o acciones disponibles para cada jugador y las ganancias resultantes de cada combinación de acciones, y además todos saben que todos las conocen, y todos saben que todos saben que todos las conocen... y así sucesivamente.

Estos juegos suelen representarse mediante la llamada **forma estratégica**, de la que se dice que es la **representación normal** del juego, descrita en el capítulo inicial (Apartado 1.5). Para ello, se usa generalmente una bimatriz (si hay dos jugadores), o una representación análoga si hay más de dos jugadores. Recordemos que, en general, la representación en forma estratégica de un juego requiere especificar:

a) El conjunto $J = \{1, 2, ..., n\}$ de los **jugadores** (quiénes son).

b) El conjunto o espacio de **estrategias** de cada uno: S_i para cada i de J.

A cada n-pla $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$, donde cada s_i pertenece a S_i se la llama **combinación o perfil** de estrategias. Es un vector n-dimensional cuyas componentes son estrategias, una por cada jugador, y el conjunto de todos los perfiles s es $\boldsymbol{S} = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$. Al vector $(n - 1)$-dimensional obtenido a partir de $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ al suprimir s_i se le denota s_{-i}. El vector $s_{-i} = (s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$ es, por tanto, la combinación de estrategias jugadas por los demás jugadores. El conjunto de todas las combinaciones s_{-i} es

$$\boldsymbol{S}_{-i} = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$$

c) La función de **pagos o ganancias** de cada uno: u_i para cada i de J, que a cada combinación de estrategias $(s_1, s_2, ..., s_n)$ le asigna un número, $u_i(s_1, s_2, ..., s_n)$, que es la utilidad que al jugador i le reporta el resultado del juego cuando se realizan las jugadas de $(s_1, s_2, ..., s_n)$.

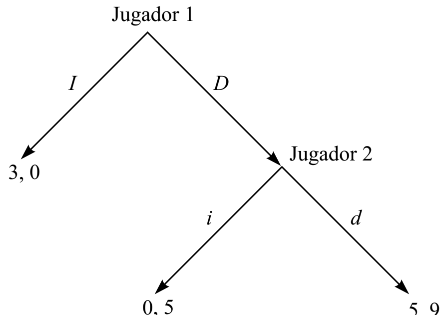
El juego así especificado puede denotarse $G = \{J; S_1, S_2, ..., S_n; u_1, u_2, ..., u_n\}$*.

Decimos que un juego G es finito cuando el número de jugadores y los conjuntos $S_1, S_2, ..., S_n$ son finitos, es decir, cada jugador tiene un número finito de estrategias disponibles.

Merece la pena, antes de terminar esta sección sobre terminología, precisar el significado de la expresión «información de dominio público», ya que se trata de un concepto muy importante en la Teoría de Juegos. En las situaciones de interacción entre individuos típicas de esta teoría, es obvio que no es lo mismo decir simplemente que dos jugadores conocen una información (por ejemplo, las consecuencias en pagos de determinadas acciones posibles en un juego), que decir que ambos la conocen y que además ambos saben que el otro la conoce.

Consideremos, a modo de ejemplo, el siguiente juego simple en forma extensiva:

* Se puede expresar también $G = \{S_1, S_2, ..., S_n; u_1, u_2, ..., u_n\}$, sin escribir J, ya que por los subíndices que afectan a S y a u queda claro que el conjunto de jugadores es $J = \{1, 2, ..., n\}$.



La hipótesis de que ambos jugadores conocen el pago que correspondería al jugador 2 tras *d* no permite el mismo análisis del juego, ni la misma predicción sobre su desarrollo esperable, que la hipótesis de que ambos jugadores conocen dicho pago y además saben que el otro lo conoce. En efecto, la segunda hipótesis permite predecir que el jugador 1 jugará *D* (basándonos en que dicho jugador razonaría que el jugador 2, si tuviera que optar entre *i* ó *d*, optaría por *d*, ya que sabe que le va a producir un pago mayor que *i*), mientras que la primera hipótesis no permite tal predicción. Puesto que esta distinción entre saber algo y saber que todos lo saben puede extenderse a sucesivos niveles de conocimiento mutuo (como saber que todos saben que todos lo saben) vamos a intentar una definición que contenga todos esos niveles, y de ese modo no permita nuevas ampliaciones.

Definición 2.1

Decimos que una información *I* es de dominio público o que es conocimiento común de un conjunto de jugadores *J* si ocurre lo siguiente:

- Todos los jugadores de *J* saben o conocen *I*.
- Todos los jugadores de *J* saben que todos ellos saben *I*.
- Todos los jugadores de *J* saben que todos ellos saben que todos ellos saben *I*.

Y así sucesivamente.

En el juego anterior, decir que los pagos son información de dominio público es una condición suficiente (aunque no necesaria) para que el desarrollo razonable y previsible del juego sea que el jugador 1 jugará *D* y a continuación el jugador 2 jugará *d*.

Descripción y representación de algunos ejemplos importantes de juegos

Merece la pena subrayar que los ejemplos que siguen a continuación, y muchos otros que se estudian en este libro, modelizan una gran variedad de problemas de interacción y conflicto mediante una simplificación, a veces drástica, de las situaciones reales. En consecuencia, no debería contemplarse el análisis formal de dichos ejemplos como un intento de solución completa de esos problemas, sino como un primer paso en su comprensión. Por otra parte, los detallados relatos que a veces les sirven de enunciado tienen una intención sobre todo pedagógica, en el sentido de ayudar a comprender y recordar la estructura lógica del juego.

Ejemplo 2.1

El dilema del prisionero es, probablemente, el juego más simple y famoso, y se basa en el siguiente relato ilustrativo:

Dos delincuentes habituales son apresados cuando acaban de cometer un delito grave. No hay prueba clara contra ellos, pero sí indicios fuertes de dicho delito y además hay pruebas de un delito menor. Son interrogados simultáneamente en habitaciones separadas. Ambos saben que si los dos se callan serán absueltos del delito principal por falta de pruebas, pero condenados por el delito menor (1 año de cárcel), que si ambos confiesan, serán condenados por el principal pero se les rebajará un poco la pena por confesar (4 años), y finalmente, que si sólo uno confiesa, él se librará de penas y al otro «se le caerá el pelo» (5 años).

La representación en forma estratégica es la siguiente:

Dilema del prisionero

		Preso 2	
		Callar	Confesar
Preso 1	Callar	$-1, -1$	$-5, \quad 0$
	Confesar	$0, -5$	$-4, -4$

Teniendo en cuenta el significado de los pagos, y en particular que son interpretables como utilidades de Von Neumann-Morgenstern y representables mediante una escala cardinal-intervalo, podemos aplicar a la escala de pagos de cada jugador una transformación afín positiva. Por ejemplo, sumemos 5 unidades a todos los pagos del juego.

Dilema del prisionero (escala estándar)

		Preso 2	
		Callar	Confesar
Preso 1	Callar	4, 4	0, 5
	Confesar	5, 0	1, 1

Para este juego, los conjuntos de jugadores y de estrategias, y las funciones de pagos son:

$$J = \{1, 2\},\ S_1 = S_2 = \{Callar,\ Confesar\}$$

$$\begin{array}{ll} u_1(Callar,\ Callar) = 4 & u_2(Callar,\ Callar) = 4 \\ u_1(Callar,\ Confesar) = 0 & u_2(Callar,\ Confesar) = 5 \\ u_1(Confesar,\ Callar) = 5 & u_2(Confesar,\ Callar) = 0 \\ u_1(Confesar,\ Confesar) = 1 & u_2(Confesar,\ Confesar) = 1 \end{array}$$

Ejemplo 2.2

En el juego exageradamente llamado la *batalla de los sexos*, dos enamorados se citan para salir a divertirse después del trabajo, si bien no se han decidido entre ir al cine o ir al fútbol, que comienzan a la misma hora. Llegada la hora de salir, no pueden comunicarse entre ellos, de modo que cada uno se ve obligado a ir directamente a un lugar, cine o fútbol, y a esperar que la decisión del otro sea la misma. Ambos prefieren ir juntos al sitio que sea antes que ir solos cada uno a un sitio, aunque el jugador 1 preferiría que ese lugar fuese el fútbol y la jugadora 2 desearía que fuese el cine.

A continuación se especifica la forma estratégica de este juego.

Batalla de los sexos

		Jugadora 2	
		Cine	Fútbol
Jugador 1	Cine	1, 2	0, 0
	Fútbol	0, 0	2, 1

Ejemplo 2.3 **Juego de las peticiones de Nash (reparto mediante peticiones simultáneas)**

Va a repartirse un pastel entre dos jugadores, de acuerdo con las siguientes reglas: ambos escriben, simultáneamente, un número entre 0 y 1, cuyo significado es la parte del pastel que reclaman. Si la suma de ambos números es igual o menor que 1, cada jugador recibe en pago la parte que ha solicitado. En caso contrario, ninguno de ellos recibe nada.

Por tener cada jugador infinitas acciones posibles, este juego no puede representarse en forma bimatricial. Sus elementos son:

$$J = \{1, 2\}, S_1 = S_2 = [0, 1]$$

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} s_1 & \text{si} \quad s_1 + s_2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad s_1 + s_2 > 1 \end{cases} \qquad u_2(s_1, s_2) = \begin{cases} s_2 & \text{si} \quad s_1 + s_2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad s_1 + s_2 > 1 \end{cases}$$

Ejemplo 2.4

Juego Halcón-Paloma

		Jugador 2	
		Paloma	Halcón
Jugador 1	Paloma	$V/2, V/2$	$0, \quad V$
	Halcón	$V, \quad 0$	$V/2\text{-}C, V/2\text{-}C$

(donde $V > 0$, $C > 0$)

Interpretación: dos seres vivos pueden comportarse de un modo violento y agresivo (halcón) o pacífico y sumiso (paloma) en un enfrentamiento por la posesión de un objeto de valor V. Ambos saben que si los dos se comportan agresivamente se enzarzan en una pelea que les acarrea unos determinados costes (C); si ambos se comportan amistosamente se reparten el objeto, pero si cada uno se comporta de un modo diferente, aquel que se comporta pacíficamente no obtiene nada y el agresivo se lo queda todo.

Ejemplo 2.5

La caza del ciervo

		Jugador 2	
		Cooperar	Buscar liebre
Jugador 1	Cooperar	V, V	0, $2W$
	Buscar liebre	$2W$, 0	W, W

(donde $V > 2W$, $W > 0$)

Interpretación: dos personas van de caza juntas a un coto privado. A cada una de ellas se le presenta la siguiente disyuntiva: permanecer en el puesto que tiene asignado con el objetivo de cazar un ciervo, o intentar cazar el ciervo, pero también estar atento a las liebres que le salen al paso. Saben que serán capaces de cazar el ciervo si ambos cazadores se mantienen en su puesto, olvidándose de las liebres. Sin embargo, si uno de los cazadores no coopera en tal objetivo e intenta cazar las liebres, les resultará imposible obtener la pieza mayor. Ambos prefieren un ciervo a las liebres, y las liebres a nada (que es lo que se lleva aquel que se dedica a la caza del ciervo en solitario).

Ejemplo 2.6 Juego de votación por mayoría

Toda votación simple puede interpretarse como un juego estático cuyos jugadores son los votantes, cuyas acciones o estrategias se identifican con las posibles papeletas de voto que cualquier votante puede depositar, cuyos resultados hacen referencia a las alternativas o candidatos que pueden resultar elegidos, y cuyos pagos están determinados por las preferencias de los votantes hacia los posibles resultados. Pensemos, por ejemplo, en un comité de tres personas C1, C2 y C3, encargado de seleccionar para un puesto a una persona, de entre tres candidatos A, B y C, mediante votación. Para especificar completamente las reglas del juego, supongamos:

— Que se vota escribiendo una papeleta con un sólo nombre, y no se puede votar en blanco.
— Que gana el candidato que obtenga una mayoría de los votos, y que en caso de empate decide el voto del presidente C1.

Así pues, los posibles resultados del juego son A, B y C.

Supongamos también que las preferencias de los votantes son:

Votante C1: A ≻ B ≻ C (donde ≻ significa «es estrictamente preferido a»)

Votante C2: B ≻ C ≻ A

Votante C3: C ≻ A ≻ B

lo que traduciremos a las siguientes funciones de ganancias:

$$u_1(\mathrm{A}) = u_2(\mathrm{B}) = u_3(\mathrm{C}) = 2$$
$$u_1(\mathrm{B}) = u_2(\mathrm{C}) = u_3(\mathrm{A}) = 1$$
$$u_1(\mathrm{C}) = u_2(\mathrm{A}) = u_3(\mathrm{B}) = 0$$

En este caso la forma estratégica del juego presenta tres trimatrices, una por cada jugada posible del tercer jugador. Se ha indicado entre paréntesis, junto a cada vector de pagos, el resultado del juego correspondiente (candidato vencedor).

Jugador C3 vota A		**Jugador C2**		
		Vota A	Vota B	Vota C
Jugador C1	Vota A	2, 0, 1 (A)	2, 0, 1 (A)	2, 0, 1 (A)
	Vota B	2, 0, 1 (A)	1, 2, 0 (B)	1, 2, 0 (B)
	Vota C	2, 0, 1 (A)	0, 1, 2 (C)	0, 1, 2 (C)

Jugador C3 vota B		**Jugador C2**		
		Vota A	Vota B	Vota C
Jugador C1	Vota A	2, 0, 1 (A)	1, 2, 0 (B)	2, 0, 1 (A)
	Vota B	1, 2, 0 (B)	1, 2, 0 (B)	1, 2, 0 (B)
	Vota C	0, 1, 2 (C)	1, 2, 0 (B)	0, 1, 2 (C)

Jugador C3 vota C		**Jugador C2**		
		Vota A	Vota B	Vota C
Jugador C1	Vota A	2, 0, 1 (A)	2, 0, 1 (A)	0, 1, 2 (C)
	Vota B	1, 2, 0 (B)	1, 2, 0 (B)	0, 1, 2 (C)
	Vota C	0, 1, 2 (C)	0, 1, 2 (C)	0, 1, 2 (C)

Solución de un juego

Los problemas de decisión individual, y en particular los que pertenecen al ámbito de la optimización, tienen una o varias soluciones que (en muchos casos) podemos hallar mediante técnicas apropiadas. En estos casos la palabra solución tiene un significado claro: se trata de la decisión óptima, la que más conviene al agente que se plantea el problema. Además, cuando hay varias soluciones todas ellas son igualmente deseables para el agente.

Sin embargo, en los juegos (problemas de decisión con varios agentes), la situación no suele ser tan sencilla. En general, aunque cada agente o jugador pueda identificar cuál o cuáles son los resultados óptimos para él, no puede asegurarse alcanzarlos mediante su decisión, puesto que el resultado final del juego depende también de cuál sea la decisión de los otros jugadores. Salvo en casos muy especiales en que hay concordancia entre las preferencias de todos los jugadores, lo habitual es que exista un conflicto entre las preferencias de unos y otros. En estas situaciones de conflicto puede decirse que no existe solución del juego en el sentido preciso en que existía en los problemas de decisión que conciernen a un sólo agente.

Así, en una minoría de juegos hay una solución clara, pero en una mayoría de ellos no existe tal.

No nos queda más remedio, por tanto, que atribuir a la palabra solución un significado menos preciso y evidente. En términos intuitivos, llamaremos **solución** de un juego a un conjunto de perfiles de estrategias tal que es razonable pensar que los jugadores tomarán decisiones pertenecientes a dicho conjunto, y llamaremos **concepto de solución** de un juego a un procedimiento que permita obtener, de manera precisa y bien argumentada, una solución.

En las páginas que siguen se proponen distintos conceptos de solución, basados en dos clases de argumentos, los argumentos de dominación y los argumentos de equilibrio.

2.2. SOLUCIONES DE UN JUEGO MEDIANTE ARGUMENTOS DE DOMINACIÓN

Intuitivamente hablando, una estrategia de un jugador se dice dominante si es tan buena o más que cualquier otra como respuesta a cualquier combinación de estrategias que elijan los demás jugadores, y una estrategia dada s_i de un jugador se dice que está dominada por otra estrategia s'_i del mismo jugador si la segunda le conviene más que la primera, independientemente de lo que hagan los otros jugadores. El argumento básico de dominación consiste en que un jugador racional no debería jugar estrategias dominadas y en que, en caso de saber que otros jugadores son racionales, debería suponer que éstos no van a jugar tal clase de estrategias.

Estrategias dominadas y estrategias estrictamente dominadas. Estrategias dominantes

Definición 2.2

En el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, sean s'_i y s''_i dos estrategias del jugador i.

a) Decimos que s_i' está **dominada,** o también **débilmente dominada,** por s_i'' cuando la desigualdad

$$u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, ..., s_n) \leqslant u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, ..., s_n)$$

se cumple para toda combinación de estrategias s_{-i} de los otros jugadores, y para alguna de esas combinaciones se cumple de modo estricto. Decimos de manera equivalente que s_i'' **domina** a s_i'.

(Es decir, siempre le conviene usar s_i'' al menos tanto como usar s_i', hagan lo que hagan los otros jugadores, y a veces le conviene más.)

b) Decimos que s_i' está **estrictamente dominada** por s_i'' cuando la desigualdad

$$u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, ..., s_n) < u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, ... , s_n)$$

se cumple para toda combinación de estrategias s_{-i} de los otros jugadores.

(Es decir, le conviene más usar s_i'' que s_i', hagan lo que hagan los otros jugadores.)

c) Decimos que s_i' es **no dominada** si no existe ninguna otra estrategia del jugador i que la domine, y decimos que s_i' es **no dominada estrictamente** si no existe ninguna otra estrategia del jugador i que la domine estrictamente.

Es evidente que el hecho de que, para un jugador, una estrategia domine estrictamente a otra (que reporta pagos estrictamente mayores para él que esa otra) implica que también la domina débilmente (pagos iguales o mayores). Parece razonable suponer que los jugadores racionales (que intentan maximizar sus pagos o ganancias, y son capaces de hacer todos los cálculos y razonamientos que les conduzcan a ello) no juegan o usan estrategias dominadas, y menos aún juegan estrategias estrictamente dominadas.

Merece la pena observar que si para un jugador una estrategia s_i' se encuentra estrictamente dominada por otra s_i'', dicho jugador no podrá formular ninguna conjetura sobre el comportamiento del resto de los jugadores, de acuerdo con la cual le resulte óptimo jugar la estrategia s_i', es decir, no existe ninguna forma de jugar de los demás jugadores a la cual este jugador pudiera responder de manera óptima jugando s_i'.

Por otra parte, el concepto de estrategia dominante, que se define a continuación, se aplica a una estrategia de un jugador cuando ésta es tan buena o más que cualquier otra como respuesta a cualquier combinación de estrategias que elijan los demás jugadores.

Definición 2.3

En el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, sea s_i' una estrategia del jugador i.

a) Decimos que s_i' es **dominante** cuando la desigualdad

$$u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, ..., s_n) \leqslant u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, ..., s_n)$$

se cumple para toda estrategia s_i de dicho jugador y para toda toda combinación de estrategias s_{-i} de los otros jugadores.

(Es decir, siempre le conviene usar la estrategia s_i' al menos tanto como cualquier otra, hagan lo que hagan los otros jugadores.)

b) Si todas las desigualdades se cumplen de manera estricta (para $s_i \neq s_i'$, decimos que s_i' es **estrictamente dominante.**

Obsérvese que, al no exigir en la definición de estrategia dominante que la desigualdad sea estricta en al menos un caso, puede ocurrir que un jugador tenga más de una estrategia dominante.

Ejemplo 2.7

a) En el dilema del prisionero

		Preso 2	
		Callar	Confesar
Preso 1	Callar	4, 4	0, 5
	Confesar	5, 0	1, 1

se observa que para el jugador 1:

$$u_1(Callar, Callar) = 4 < 5 = u_1(Confesar, Callar), \text{ y}$$

$$u_1(Callar, Confesar) = 0 < 1 = u_1(Confesar, Confesar)$$

y algo análogo ocurre para el otro jugador. Por tanto, para cualquier jugador, la estrategia *Callar* está estrictamente dominada por la estrategia *Confesar*, y en consecuencia ambos elegirán (si son racionales en el sentido anterior) *Confesar*.

b) En el juego Halcón-Paloma, siendo $0 < C \leqslant V/2$,

		Jugador 2	
		Paloma	Halcón
Jugador 1	Paloma	$V/2, V/2$	$0, \quad V$
	Halcón	$V, \quad 0$	$V/2 - C, V/2 - C$

se observa que para el jugador 1:

$$u_1(Paloma, Paloma) = V/2 < V = u_1(Halcón, Paloma), \text{ y}$$

$$u_1(Paloma, Halcón) = 0 \leqslant V/2 - C = u_1(Halcón, Halcón)$$

y que para el jugador 2:

$$u_2(Paloma, Paloma) = V/2 < V = u_2(Paloma, Halcón), \text{ y}$$

$$u_2(Halcón, Paloma) = 0 \leqslant V/2 - C = u_2(Halcón, Halcón)$$

Así pues, para cualquier jugador, la estrategia *Paloma* está dominada, aunque no estrictamente, por la estrategia *Halcón*, lo que hace de *Halcón* la estrategia dominante.

c) En el juego de votación por mayoría:
El jugador C1 tiene A como estrategia dominante, pues

$$u_1(\mathrm{B}, \mathrm{X}, \mathrm{Y}) \leqslant u_1(\mathrm{A}, \mathrm{X}, \mathrm{Y}) \text{ y } u_1(\mathrm{C}, \mathrm{X}, \mathrm{Y}) \leqslant u_1(\mathrm{A}, \mathrm{X}, \mathrm{Y})$$

para toda estrategia X de C2 e Y de C3.

El jugador C2 no tiene estrategia dominante, pero para él la estrategia B domina a A, pues

$$u_2(\mathrm{X}, \mathrm{A}, \mathrm{Y}) \leqslant u_1(\mathrm{X}, \mathrm{B}, \mathrm{Y})$$

para toda estrategia X de C1 e Y de C3.

El jugador C3 no tiene estrategia dominante, pero para él la estrategia C domina a B, pues

$$u_3(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{B}) \leqslant u_3(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{C})$$

para toda estrategia X de C1 e Y de C2.

d) En el resto de los juegos descritos en la Sección 2.1, ninguna estrategia de ningún jugador domina ni débil ni estrictamente a otra.

Primer concepto de solución: Uso de Estrategias Dominantes (UED)

Según este concepto de solución, **pertenecen a la solución del juego todos aquellos perfiles de estrategias en los cuales cada jugador usa una estrategia dominante.**

Naturalmente, en caso de ser aplicable, este concepto de solución es obvio, pues cualquier jugador racional jugará una estrategia dominante si dispone de ella, independientemente de cualquier otra consideración (y si tiene varias, jugará una de ellas). En particular lo hará independientemente de lo que sepa o suponga acerca de cómo van a jugar los otros jugadores, y de qué sepa acerca de las características de dichos jugadores. De hecho, incluso cabe la posibilidad de que los jugadores tengan un conocimiento muy limitado de aquellos aspectos del juego que afectan a los demás jugadores (por ejemplo, podrían no conocer los pagos de los otros), y aun así tender a jugar su estrategia dominante.

Por desgracia, este concepto de solución no siempre es aplicable. Los juegos en los que cada jugador tiene alguna estrategia dominante son más bien la excepción que la regla.

Ejemplo 2.8

En el dilema del prisionero, este concepto sí es aplicable, pues en este caso cada jugador tiene una estrategia estrictamente dominante, que es *Confesar*. La solución es el perfil (*Confesar*, *Confesar*).

En el juego Halcón-Paloma, siendo $C \leqslant V/2$, cada jugador tiene una estrategia débilmente dominante (estrictamente dominante si $C < V/2$), que es *Halcón*. La solución sería el perfil (*Halcón*, *Halcón*).

Por el contrario, en ninguno de los otros juegos descritos hasta ahora es aplicable esta solución, pues en cualquiera de ellos existe un jugador sin estrategia dominante.

Ejemplo 2.9

Juego 2.1

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	3, y	4, 2	1, x
	M	2, 4	3, 5	4, 0
	B	1, 0	2, 1	0, 3

En este juego, con $x = y = 1$, la estrategia B del jugador J1 está estrictamente dominada por las estrategias A y M. Pero ni A ni M son estrategias dominantes. Por otra parte, para el jugador J2 la estrategia I está estrictamente dominada por la estrategia C, pero ni C ni D son dominantes. Así pues, aunque el concepto de solución anterior no es aplicable, el argumento básico de dominación (ningún jugador racional debería jugar estrategias dominadas) nos permite concluir inmediatamente que ni J1 jugará B ni J2 jugará I, pero sólo nos permite esa conclusión.

Segundo concepto de solución: Eliminación Iterativa Estricta (EIE)

¿Qué ambiente de racionalidad es necesario para respaldar los argumentos de dominación y los conceptos de solución basados en ellos? Recordemos que consideramos racionales a aquellos jugadores que intentan maximizar sus pagos o ganancias, y que además son capaces de hacer todos los cálculos y razonamientos que les conduzcan a ello. Pues bien, el argumento básico de dominación, según el cual ningún jugador racional jugará una estrategia que esté estrictamente dominada, y el anterior concepto de solución, según el cual cualquier jugador racional jugará una estrategia dominante, si es que la tiene, sólo requieren para su validez una hipótesis de racionalidad mínima: que todos los jugadores sean racionales. Sin embargo, bastaría con proponer una hipótesis más fuerte, y aun así razonable, para conseguir en muchos casos unos resultados más precisos y satisfactorios. Por ejemplo, analicemos el juego siguiente, en el cual el primer concepto de solución no es aplicable.

Juego 2.2

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	0, 2	4, 100
	B	20, 40	8, 0

En este juego, y con la hipótesis de que ambos jugadores son racionales, el argumento básico de dominación permite descartar la estrategia A del jugador 1, ya que está estrictamente dominada por B, pero no permite avanzar más. Así pues, tanto (B, I) como (B, D) serían resultados aceptables. Sin embargo, bastaría con añadir la hipótesis de que el jugador 2 sabe que el jugador 1 es racional para que pudiéramos avanzar un paso y descartar la estrategia D del jugador 2, lo que permitiría concluir que la solución del juego es el perfil (B, I) y sólo ese perfil. Dicho perfil quedaría justificado por las anteriores hipótesis de racionalidad del siguiente modo:

«El jugador 1 sólo puede jugar la estrategia B, pues su racionalidad le impide jugar A. El jugador 2 sólo puede jugar I pues su conocimiento de la racionalidad del otro le permite deducir que el otro jugará B, lo cual le deja a él con la posibilidad de obtener un pago de 40 (jugando I) o un pago de 0 (jugando D), y su racionalidad le impide jugar D».

Nuevas hipótesis de ese estilo permitirían, en otros ejemplos, avanzar en dicho proceso de eliminación o descarte de estrategias. Para simplificar, aceptaremos a partir de ahora el supuesto de que no sólo los jugadores son racionales, sino que **es de dominio público el hecho de que todos los jugadores son racionales**. Este supuesto hace posible introducir el segundo concepto de solución, que se basa en la eliminación sucesiva que acabamos de ilustrar, por medio de la Definición 2.4:

Definición 2.4

Dado un juego finito o infinito $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, llamamos **Eliminación Iterativa Estricta**, o bien **Eliminación Iterativa de Estrategias Estrictamente Dominadas**, y lo denotamos abreviadamente por **EIE**, al proceso de eliminación siguiente:

Primer paso. De cada uno de los jugadores, y a la vez, se eliminan todas las estrategias que estén estrictamente dominadas en el juego inicial G. Se construye el juego reducido G_1 que resulta de tal eliminación.

Segundo paso. De cada uno de los jugadores, y a la vez, se eliminan todas las estrategias que estén estrictamente dominadas en el juego reducido G_1. Se construye el juego reducido G_2 que resulta de tal eliminación.

Y así sucesivamente. Se acaba el proceso cuando ya no quedan, para ningún jugador, estrategias que eliminar. Denotamos S_i^S al conjunto de las estrategias supervivientes del jugador i, y las llamamos estrategias iterativamente no dominadas.

Llamaremos estándar al algoritmo de eliminación recien descrito. Podemos imaginar muchos otros algoritmos que pongan en práctica la misma idea de eliminación reiterada. Por ejemplo, podríamos organizar las etapas o pasos del algoritmo de manera que en cada paso se eliminase una sola estrategia de cada jugador, o bien todas las estrategias dominadas de un solo jugador, en lugar de todas las estrategias dominadas de todos los jugadores. Cabe preguntarse, y es necesario hacerlo, si el resultado de este proceso eliminatorio será el mismo, independientemente del orden en que se han ido seleccionando jugadores y estrategias eliminables. La respuesta es afirmativa en este caso en que sólo se consideran estrategias estrictamente dominadas. Sin embargo, se demostrará más adelante que la respuesta sería negativa si, en este mismo proceso de eliminación iterativa, sustituimos la palabra «estrictamente» por la palabra «débilmente».

De acuerdo con este concepto de solución, **son soluciones todos los perfiles estratégicos constituidos por estrategias que sobreviven al proceso de eliminación iterativa estricta. Llamaremos S^{EIE} al conjunto de dichos perfiles estratégicos solución**.

Los siguientes ejemplos ilustran el proceso de cálculo de la solución EIE, el primero de ellos justificando de manera detallada el razonamiento.

Ejemplo 2.10

Dado el juego

Juego 2.3

		J2	
		Izquierda	Derecha
J1	Alta	4, 2	0, 1
	Media	1, 2	2, 4
	Baja	3, 3	4, 2

Puesto que la racionalidad de ambos jugadores es una información de dominio público, ambos jugadores son racionales y cada uno sabe que el otro lo es y además sabe que el otro lo sabe. En consecuencia, puede razonarse así:

El jugador J1, que es racional, elimina la estrategia *Media* porque está estrictamente dominada por *Baja* (pagos 1 frente a 3 y 2 frente a 4). El jugador J2 sabe que J1 es racional y por tanto sabe que J1 ha eliminado *Media*. Al comparar *Izquierda* con *Derecha* en ausencia de *Media* de J1, el jugador J2, que también es racional, deduce que *Izquierda* domina estrictamente a *Derecha* (pagos 2 frente a 1 y 3 frente a 2), por lo que elimina *Derecha*. El jugador J1 sabe que J2 es racional y que además J2 sabe que J1 es racional, y por tanto sabe que J2 ha eliminado *Derecha* como consecuencia de la eliminación por J1 de *Media*. Al comparar *Alta* con *Baja* en ausencia de *Derecha*, J1 deduce que *Alta* domina estrictamente a *Baja* (pago 4 frente a 3) por lo que elimina *Baja*.

En conclusión, las únicas estrategias supervivientes al proceso EIE son *Alta* de J1 e *Izquierda* de J2. Ambas constituyen el único perfil solución del juego, es decir, $\boldsymbol{S}^{\mathbf{EIE}} = \{(Alta,\ Izquierda)\}$.

Ejemplo 2.11

Sea el Juego 2.1 definido en el Ejemplo 2.9:

		J2		
		I	C	D
J1	A	3, y	4, 2	1, x
	M	2, 4	3, 5	4, 0
	B	1, 0	2, 1	0, 3

a) Si, como anteriormente, hacemos $x = y = 1$, la estrategia B del jugador J1 está estrictamente dominada por las estrategias A y M, mientras que, para el jugador J2, la estrategia I está estrictamente dominada por la estrategia C. Ambos jugadores saben que J1 es racional, y por tanto nunca jugará su estrategia B, y que J2 es racional, y por tanto nunca jugará su estrategia I. Lo anterior implica que les basta con analizar el juego reducido G_1 donde se han eliminado B e I. De igual modo, y ante el juego G_1, ambos jugadores saben que J2 es racional, y por tanto nunca jugará su estrategia D, lo que implica que les basta con analizar el juego reducido G_2. Procediendo repetidamente de esta manera, llegamos a un juego reducido, que llamamos residual, y que ya no es posible reducir más. Los detalles de las sucesivas etapas son:

Juego G

		J2		
		I	C	D
J1	A	3, 1	4, 2	1, 1
	M	2, 4	3, 5	4, 0
	B	1, 0	2, 1	0, 3

⇒
(Eliminar **B** de J1 e **I** de J2)

Juego G_1

		J2	
		C	D
J1	A	4, 2	1, 1
	M	3, 5	4, 0

⇒
(Eliminar **D** de J2)

Juego G_2

		J2
		C
J1	A	4, 2
	M	3, 5

⇒
(Eliminar **M** de J1)

Juego residual G_3 (perfil superviviente único)

		J2
		C
J1	A	4, 2

En conclusión, los conjuntos de estrategias supervivientes son $S_1^S = \{A\}$ y $S_2^S = \{C\}$, y la solución está constituida por el perfil único (A, C), es decir, $\mathbf{S^{EIE}} = \{(A, C)\}$.

b) Si en el Juego 2.1 hacemos $x = 3$ e $y = 1$, la eliminación iterativa estricta produciría la siguiente secuencia:

Juego *G*

		J2		
		I	C	D
J1	A	3, 1	4, 2	1, 3
	M	2, 4	3, 5	4, 0
	B	1, 0	2, 1	0, 3

$\Rightarrow$
(Eliminar **B** de J1 e **I** de J2)

Juego G_1 (irreducible)

		J2	
		C	D
J1	A	4, 2	1, 3
	M	3, 5	4, 0

Aquí se para el proceso. Los conjuntos de estrategias supervivientes son $S_1^S = \{A, M\}$ y $S_2^S = \{C, D\}$, y la solución la forman todos los perfiles constituidos por estrategias supervivientes, es decir, $\mathbf{S^{EIE}} = \{(A, C), (A, D), (M, C), (M, D)\}$. Así pues, en este caso, el segundo concepto de solución no es tan satisfactorio como en el caso anterior, pues es poco resolutivo. De hecho, ocurre a menudo que existen muchos perfiles constituidos por estrategias que sobreviven a este proceso de eliminación iterativa.

Ejemplo 2.12

a) En el Juego 2.4

Juego 2.4

		J2		
		I	C	D
J1	A	0, 4	4, 0	5, 3
	M	4, 0	0, 4	5, 3
	B	3, 5	3, 5	5, 6

ninguna estrategia está estrictamente dominada (ni tampoco débilmente), y por tanto el proceso de eliminación iterativa no consigue eliminar ninguna estrategia. Así pues, son soluciones los nueve perfiles existentes, es decir, $\mathbf{S}^{\mathbf{EIE}} = \mathbf{S}$.

b) Al aplicar este concepto de solución a los juegos descritos en el Apartado 2.1, es fácil concluir que en el dilema del prisionero la única solución sería (*Confesar*, *Confesar*), que en el juego Halcón-Paloma, siendo $C < V/2$, la única solución sería (*Halcón*, *Halcón*), y que en el resto de los juegos cualquier perfil estratégico sería solución.

Tercer concepto de solución: Eliminación Iterativa Débil (EID)

El proceso de eliminación anterior exige mucho para eliminar una estrategia (que ésta esté estrictamente dominada por otra), y eso hace posible a menudo que el proceso no funcione, al no haber estrategias que eliminar. En consecuencia, tiene sentido intentar poner en práctica la misma idea de eliminación, pero basándola en un concepto de dominación menos exigente, el de dominación débil, lo que hará el proceso de eliminación más efectivo, actuando en casos en que antes no lo hubiera hecho. Este intento da lugar al tercer concepto de solución, que es un refinamiento del segundo, en el sentido de que cualquier solución según el tercero lo es según el segundo.

Definición 2.5

Dado un juego finito o infinito $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, llamamos **Eliminación Iterativa Débil**, o bien **Eliminación Iterativa de Estrategias Débilmente Dominadas**, y lo denotamos abreviadamente por **EID**, al proceso de eliminación siguiente:

Primer paso. De cada uno de los jugadores, y a la vez, se eliminan todas las estrategias que estén débilmente dominadas en el juego inicial G. Se construye el juego reducido G_1 que resulta de tal eliminación.

Segundo paso. De cada uno de los jugadores, y a la vez, se eliminan todas las estrategias que estén débilmente dominadas en el juego reducido G_1. Se construye el juego reducido G_2 que resulta de tal eliminación.

Y así sucesivamente. Se acaba el proceso cuando ya no quedan, para ningún jugador i, estrategias que eliminar. Denotamos S_i^S al conjunto de las estrategias supervivientes del jugador i, y las llamamos estrategias iterativamente no dominadas.

Como anteriormente, llamaremos estándar a este algoritmo de eliminación, que es quizá el más natural de la amplia familia de algoritmos posibles. Desgraciadamente, y al contrario de lo que ocurre para los algoritmos de eliminación estricta, ahora el resultado final del proceso de eliminación sí depende del algoritmo utilizado, es decir, del orden y modo en que se han ido seleccionando las estrategias a eliminar.

Ejemplo 2.13

a) En los casos estudiados anteriormente ($x = y = 1$ en primer lugar; $x = 3$ e $y = 1$ en segundo lugar) del Juego 2.1, el proceso EID conduce a los mismos resultados ya obtenidos con el proceso EIE, pues no ocurre en ninguna etapa del proceso que una estrategia esté dominada débilmente, pero no estrictamente. Los conjuntos de estrategias supervivientes son $S_1^S = \{A\}$, $S_2^S = \{C\}$, en el primer caso, y $S_1^S = \{A, M\}$, $S_2^S = \{C, D\}$, en el segundo. Los conjuntos de soluciones son, en consecuencia, $\mathbf{S}^{\mathbf{EID}} = \{(A, C)\}$ y $\mathbf{S}^{\mathbf{EID}} = \{(A, C), (A, D), (M, C), (M, D)\}$, respectivamente.

b) Sin embargo, si especificamos los valores $x = 2$ e $y = 1$, tendríamos el siguiente juego:

		J2		
		I	C	D
J1	A	3, 1	4, 2	1, 2
	M	2, 4	3, 5	4, 0
	B	1, 0	2, 1	0, 3

En este caso, el proceso EID ya no conduce al mismo conjunto de soluciones que el EIE, sino a un subconjunto suyo. En efecto, el conjunto de las soluciones de EIE sería $\mathbf{S}^{\mathbf{EIE}} = \{(A, C), (A, D), (M, C), (M, D)\}$, puesto que las únicas estrategias eliminadas serían B de J1 e I de J2, ambas en la primera etapa. En cambio, la solución de EID es $\mathbf{S}^{\mathbf{EID}} = \{(A, C)\}$, pues se eliminan B de J1 e I de J2 en la primera etapa, D de J2 en la segunda etapa, y M de J1 en la tercera y última etapa.

Ejemplo 2.14

Dado el juego con tres jugadores:

Juego 2.5

Jugador 3: X		**Jugador 2**		
		I	M	D
Jugador 1	A	1, 3, 0	−1, 2, 3	−1, 0, −2
	B	2, 1, 1	4, 1, 3	0, 0, 1

Jugador 3: Y		**Jugador 2**		
		I	M	D
Jugador 1	A	0, 2, −1	4, 3, 2	1, 2, 0
	B	2, −2, 5	5, 5, 2	4, 6, 4

en el proceso de eliminación iterativa estricta EIE, se elimina A de J1 (dominada estrictamente por B) en la primera etapa y se acaba el proceso. En el proceso de eliminación iterativa débil EID, se elimina A de J1 (dominada estrictamente por B) en la primera etapa, se elimina I de J2 (dominada débilmente por M) en la segunda etapa, y se acaba el proceso. En conclusión, $\mathbf{S^{EIE}}$ = {(B, I, X), (B, I, Y), (B, M, X), (B, M, Y), (B, D, X), (B, D, Y)} y $\mathbf{S^{EID}}$ = {(B, M, X), (B, M, Y), (B, D, X), (B, D, Y)}.

Juegos resolubles por dominación

Cuando en un juego este algoritmo estándar de eliminación iterativa débil conduce a una solución en cierto modo única, es decir, que sólo sobrevive un único perfil de estrategias al proceso iterativo, o bien sobreviven varios perfiles, pero de modo que cada jugador se encuentra indiferente entre sus estrategias supervivientes, ya que todas ellas le producen a éste los mismos pagos con independencia de lo que hagan los demás, decimos que ese juego es **resoluble por dominación**.

Formalicemos la idea anterior:

Definición 2.6

En el juego finito o infinito $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, decimos que G es **resoluble por dominación** si en el proceso de eliminación iterativa débil, usando el algoritmo estándar, quedan como supervivientes únicamente las estrategias $S_1^S \subset S_1, ..., S_n^S \subset S_n$, de modo que se cumple lo siguiente para todo jugador i y para toda combinación s_{-i} de estrategias supervivientes de los demás:

$$s_i, s_i' \in S_i^S \text{ implica que } u_i(s_i, s_{-i}) = u_i(s_i', s_{-i})$$

En el caso en que G es resoluble por dominación, a cada perfil de estrategias superviviente $s^S \in S_1^S \times ... \times S_s^S$ se le llama **equilibrio sofisticado**.

Ejemplo 2.15

Dado el juego:

Juego 2.6

		J2		
		I	C	D
J1	A	2, 0	2, 0	2, 0
	M	2, 7	1, 8	1, 0
	B	2, 7	0, 1	9, 0

En él, el algoritmo estándar del proceso EID concluye en dos pasos o etapas: en la primera etapa se eliminan M de J1 y D de J2, y en la segunda se eliminan B de J1 y C de J2. Por tanto, se obtiene como resultado el perfil (A, I). Este juego es, por tanto, resoluble por dominación. Sin embargo, otros algoritmos de eliminación hubiesen conducido a diferentes resultados. Se hubiera obtenido como resultado el perfil (A, C) con el orden de eliminación D de J2, B de J1, I de J2 y, por último, M de J1; y se hubiera obtenido el perfil (B, I) con el orden de eliminación M de J1, C de J2, A de J1 y, por último, D de J2.

Ejemplo 2.16

Dado el juego:

Juego 2.7

		J2		
		I	C	D
J1	A	5, y	5, 4	9, 0
	M	1, 7	2, 5	8, 6
	B	2, 3	1, 4	8, 3

si $y = 4$, la eliminación EID con el algoritmo estándar concluye tras una etapa en que se eliminan M y B de J1, y D de J2, y las soluciones del juego son los perfiles (A, I) y (A, C). Si $y = 5$, la EID con el algoritmo estándar concluye en dos etapas: en la primera se eliminan M y B de J1, y D de J2, y en la segunda se elimina C de J2. La única solución del juego es ahora el perfil (A, I). En los dos casos, podemos decir que el juego es resoluble por dominación, aunque en el primero de ellos hay múltiples perfiles solución (todos ellos equilibrios sofisticados).

Ejemplo 2.17

En el juego de votación por mayoría, el proceso de Eliminación Iterativa Estricta (EIE) no conduce a nada, pues no existe ninguna estrategia estrictamente dominada.

En cuanto al proceso de Eliminación Iterativa Débil (EID), el algoritmo estándar opera así: en la primera etapa se eliminan las estrategias B y C del votante C1, la estrategia A del votante C2, y la estrategia B del votante C3, quedando el siguiente juego reducido:

Juego reducido G_1

Jugador C3 vota A:		**Jugador C2**	
		Vota B	Vota C
Jugador C1	Vota A	2, 0, 1 (A)	2, 0, 1 (A)

Jugador C3 vota C:		**Jugador C2**	
		Vota B	Vota C
Jugador C1	Vota A	2, 0, 1 (A)	0, 1, 2 (C)

En la segunda etapa se eliminan la estrategia B del votante C2, y la estrategia A del votante C3, quedando como solución el único perfil siguiente:

Juego residual

Jugador C3 vota C:		**Jugador C2**
		Vota C
Jugador C1	Vota A	0, 1, 2 (C)

Así pues, el juego es resoluble por dominación, y el perfil (A, C, C), por ser el único superviviente de la eliminación iterativa (con el algoritmo estándar), es el equilibrio sofisticado de este juego.

Comparación entre los anteriores conceptos de solución

El teorema siguiente establece algunas relaciones entre los tres conceptos de solución arriba definidos.

Teorema 2.1

En el juego finito $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, dado el perfil $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$,

a) Si s^* está constituido por estrategias s_i^* que dominan estrictamente a todas las demás del jugador i, es el único perfil que sobrevive al proceso de eliminación iterativa débil y al de eliminación iterativa estricta, cualquiera que sea el orden de eliminación.

b) Si s^* está constituido por estrategias s_i^* que dominan débilmente a todas las demás del jugador i, sobrevive a ambos procesos para cualquier orden de eliminación, pero no es necesariamente el único perfil superviviente.

Demostración:

a) Sea s^* constituido por estrategias s_i^* que dominan estrictamente a todas las demás del jugador i. Dado cualquier jugador i, y cualquier estrategia s_i de i distinta de s_i^*, s_i está estrictamente dominada por s_i^*, luego el proceso de eliminación iterativa, tanto estricta como débil, descartará a s_i en algún momento (ya que s_i sigue estando dominada estrictamente por s_i^* en todas las etapas del proceso). Por tanto, sólo el perfil s^* sobrevivirá.

b) Sea s* constituido por estrategias s_i^* que dominan débilmente a todas las demás del jugador i. Dado cualquier jugador i, y cualquier estrategia s_i de i distinta de s_i^*, s_i está débilmente dominada por s_i^*, por lo que no dominará débilmente a s_i^* en ninguna etapa del proceso de eliminación iterativa, sea estricta o sea débil. Así pues, ni el proceso de eliminación iterativa estricta ni el débil, descartarán nunca a s_i^*. Por otra parte, el siguiente juego es un contraejemplo de la afirmación según la cual sólo sobrevivirían los perfiles constituidos por estrategias dominantes:

Juego 2.8

		J2	
		I	D
J1	A	4, 2	5, 2
	B	4, 6	3, 1

En este juego, las estrategias A e I dominan débilmente a B y D, pero (A, I) no es el único perfil superviviente, pues en el proceso EIE sobreviven todos los perfiles, mientras que en el EID sobreviven (para el algoritmo que descarta en la primera etapa la estrategia B de J1), los perfiles (A, I) y (A, D).

2.3. APLICACIÓN: EL MECANISMO DE CLARK-GROVES PARA LA ASIGNACIÓN DE UN BIEN PÚBLICO

A pesar del poco recorrido que hemos realizado en el estudio de la teoría de juegos, ya podemos presentar una aplicación de lo estudiado que, a pesar de su simplicidad, resulta interesante en sí misma y sirve de primer ejemplo ilustrativo de un área muy importante de la teoría que se refiere al diseño de las reglas de decisión social.

Introducción a un problema de asignación de un bien público. Primer intento de resolución

Supongamos que un municipio está considerando la realización de obras de mejora en las infraestructuras de un polígono industrial con n empresas, referidas a un puente en el río que atraviesa el polígono. En concreto, y para simplificar, supongamos que las únicas opciones factibles son ampliar el puente viejo (opción A) o construir uno nuevo (opción C) en un emplazamiento ya identificado que es mejor, y que ambas opciones tienen el mismo coste. Con el fin de no despilfarrar recursos, el municipio se propone elegir la opción que maximiza la suma de los beneficios de las empresas. En consecuencia, envía un formulario a cada empresa i preguntándole cuál es su beneficio adicional esperado g_i, con respecto a la opción A, si se elige la opción C (o lo que es lo mismo, cuál es la diferencia entre el beneficio que le aporta C y el que le aporta A), y hace público un comunicado en el que anuncia que elegirá C si la suma de los beneficios declarados es estrictamente positiva, y A en caso contrario. Por razones prácticas, en dicho formulario se limita la cantidad a escribir al intervalo entre —999.999 euros y +999.999 euros.

Con estas reglas, la situación puede modelizarse como un juego estático $G = \{J; S_1, S_2, ..., S_n; u_1, u_2, ..., u_n\}$, donde la estrategia s_i de cada empresa consiste en el beneficio que declara, es decir, el número g_i que escribe en el formulario, y las ganancias u_i del juego dependen de los beneficios reales de C, que denotamos $\widehat{\mathbf{g}}_i$, y del resultado del juego, de la siguiente manera: cada jugador i obtiene una ganancia 0 si el resultado es A, y una ganancia $\widehat{\mathbf{g}}_i$ si el resultado es C.

Formalmente:

$$S_i = [-999.999,\ \ 999.999],\ \forall\ i \in \{1, 2, ..., n\}$$

$$u_i(g_1, ..., g_i, ..., g_n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{n} g_j \leqslant 0 \ \text{ (es elegida A)} \\ \widehat{\mathbf{g}}_i & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{n} g_j > 0 \quad \text{(es elegida C)} \end{cases}$$

Analicemos ahora la solución de este juego, suponiendo que todos los jugadores son racionales. Es fácil razonar desde el punto de vista de cada empresa. Si una empresa i prefiere C antes que A concluirá que, independientemente de cómo actúen las demás, le conviene realizar aquella acción que más la ayude a conseguir C, y dicha acción es $g_i = 999.999$; en caso contrario, la acción que más le conviene es $g_i = -999.999$. En ambos casos, la estrategia o acción descrita domina débilmente a todas las demás. Así pues, cada empresa tiene una estrategia dominante (consistente en exagerar hasta el límite en su declaración los beneficios o perjuicios esperados), y el perfil constituido por dichas estrategias es una solución en estrategias dominantes, que además es la única.

Parece, a primera vista y debido a lo simple de la situación, que nada más tiene que aportar la teoría de juegos a su análisis, pero no es así, como se verá a continuación. ¿Qué es de prever que ocurra en la práctica en una situación como ésta? Tanto la teoría, que predice que los jugadores declararán beneficios extremos g_i que sobrevaloran o infravaloran escandalosamente los beneficios reales $\widehat{\mathbf{g}}_i$, como la experiencia, coinciden en que los jugadores no dirán la verdad y, en consecuencia, el resultado elegido será muy a menudo un despilfarro, como ilustra el ejemplo siguiente:

Ejemplo 2.18

Supongamos que hay 3 empresas, E1, E2 y E3, y que los beneficios reales son $\widehat{\mathbf{g}}_1 = 1.000$, $\widehat{\mathbf{g}}_2 = 2.000$ y $\widehat{\mathbf{g}}_3 = -5.000$. En este caso, a las tres les conviene seguir sus estrategias dominantes, que son $g_1 = 999.999$, $g_2 = 999.999$ y $g_3 = -999.999$. Y si así lo hacen, el resultado del juego será que se elige la opción C, puesto que $\sum_{j=1}^{n} g_j = 999.999 > 0$, y conseguirán las ganancias finales:

$$u_1(999.999,\ 999.999,\ -999.999) = \widehat{\mathbf{g}}_1 = 1.000$$

$$u_2(999.999,\ 999.999,\ -999.999) = \widehat{\mathbf{g}}_2 = 2.000$$

$$u_3(999.999,\ 999.999,\ -999.999) = \widehat{\mathbf{g}}_3 = -5.000$$

Y sin embargo, los beneficios totales reales que ocasiona C, que son $\sum_{j=1}^{n} \widehat{\mathbf{g}}_j = -2.000$, son negativos, y por tanto el resultado ha sido contrario a los deseos de la autoridad municipal. No se trata de que haya habido errores de cálculo sino que ha habido un error en el diseño de las reglas, debido a que se han identificado implícitamente beneficios reales con beneficios declarados, quizás pensando que las empresas declararían la verdad. Y no han declarado la verdad porque maximizaban sus ganancias declarando cantidades distintas de las verdaderas.

Estamos inmersos en un problema correspondiente al campo del llamado diseño de mecanismos, y este es un campo en el que la aplicación de la teoría de juegos es muy fructífera. La pregunta que se plantearía la autoridad municipal es la siguiente: ¿cómo podría redactar las preguntas del formulario, y qué reglas de juego habría de establecer, para que las empresas contesten verazmente a la pregunta de los beneficios esperados?

Nuevas reglas: solución de Clark-Groves

Vamos a suponer que el municipio actúa de la misma forma, salvo que en el comunicado que hace público añade ahora que va a cobrar un impuesto t_i a cada empresa i, cuya cuantía dependerá del siguiente modo de lo declarado por ésta y de la opción finalmente elegida:

$$t_i(g_1, ..., g_i, ..., g_n) = \begin{cases} \max\left\{0, \sum_{j \neq i} g_j\right\} & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{n} g_j \leqslant 0 \quad \text{(es elegida A)} \\ \max\left\{0, \sum_{j \neq i} g_j\right\} - \sum_{j \neq i} g_j & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{n} g_j > 0 \quad \text{(es elegida C)} \end{cases}$$

Esta función podría expresarse también así, en función de las cuatro posibilidades lógicas:

1. Si $\sum_{j=1}^{n} g_j \leqslant 0$ y $\sum_{j \neq i} g_j > 0$ (es elegida A, pero no lo sería si i no hubiese participado),

$$t_i(g_1, ..., g_i, ..., g_n) = \sum_{j \neq i} g_j$$

2. Si $\sum_{j=1}^{n} g_j \leqslant 0$ y $\sum_{j \neq i} g_j \leqslant 0$ (es elegida A, y lo sería también si i no hubiese participado),

$$t_i(g_1, ..., g_i, ..., g_n) = 0$$

3. Si $\sum_{j=1}^{n} g_j > 0$ y $\sum_{j \neq i} g_j \leqslant 0$ (es elegida C, pero no lo sería si i no hubiese participado),

$$t_i(g_1, ..., g_i, ..., g_n) = -\sum_{j \neq i} g_j$$

4. Si $\sum_{j=i}^{n} g_j > 0$ y $\sum_{j \neq i} g_j > 0$ (es elegida C, y lo sería también si i no hubiese participado),

$$t_i(g_1, ..., g_i, ..., g_n) = 0$$

Puede describirse del siguiente modo, más comprensible: la empresa i sólo ha de pagar un impuesto en el caso de que sea ***pivote***, es decir, que a consecuencia de su declaración la opción elegida sea diferente (posibilidades lógicas 1 y 3), y en ese caso ha de pagar una cuantía igual al perjuicio total que, según declaran dichas empresas, les ha ocasionado dicho cambio de opción elegida.

Con estas nuevas reglas, la situación puede modelizarse como un juego estático $G = \{J; S_1, S_2, ..., S_n; u_1, u_2, ..., u_n\}$, donde las estrategias o acciones de cada empresa son los beneficios declarados, es decir, los números g_i que escribe en el formulario, y las ganancias u_i del juego dependen de los beneficios adicionales reales de C, que denotamos $\widehat{\mathbf{g}}_i$, del resultado del juego y de los impuetos, de la siguiente manera:

Cada jugador i obtiene una ganancia de $-t_i(g_1, ..., g_i, ..., g_n)$ si el resultado es A, y una ganancia $\widehat{\mathbf{g}}_i - t_i(g_1, ..., g_i, ..., g_n)$ si el resultado es C.

Formalmente:

$$S_i = [-999.999, 999.999], \ \forall \ i \in \{1, 2, ..., n\}$$

$$u_i(g_1, ..., g_i, ..., g_n) = \begin{cases} -t_i(g_1, ..., g_i, ..., g_n) & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{n} g_j \leqslant 0 \quad \text{(es elegida A)} \\ \widehat{\mathbf{g}}_i - t_i(g_1, ..., g_i, ..., g_n) & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{n} g_j > 0 \quad \text{(es elegida C)} \end{cases}$$

Analicemos ahora la solución de este nuevo juego. En primer lugar, volvamos a la situación del ejemplo anterior.

Ejemplo 2.19

Las 3 empresas del Ejemplo 2.18, E1, E2 y E3, tenían beneficios reales $\widehat{\mathbf{g}}_1 = 1.000$, $\widehat{\mathbf{g}}_2 = 2.000$ y $\widehat{\mathbf{g}}_3 = -5.000$ y dedujimos que sus estrategias $g_1 = 999.999$, $g_2 = 999.999$ y $g_3 = -999.999$ eran dominantes. Veamos que ahora ya no lo son. La combinación de acciones (999.999, 2.000, -5.000) conduce a la elección de C al hacer E1 de pivote, y la ganancia para E1 es

$$u_1(999.999, 2.000, -5.000) = 1.000 - t_1(999.999, 2.000, -5.000) =$$
$$= 1.000 - (-2.000 + 5.000) = -2.000$$

Sin embargo, si E1 rectificara, declarando 1.000, obtendría una ganancia u_1(1.000, 2.000, 5.000) = 0 al ser elegida A. Es decir, a E1 le conviene más declarar verazmente 1.000 que mentir con 999.999.

Propiedades de la solución de Clark-Groves

Volvamos al análisis general. ¿Existirán ahora estrategias dominantes? El importante, e incluso sorprendente, resultado del análisis es el siguiente:

Teorema 2.2

Declarar la verdad, es decir, $g_i = \widehat{\mathbf{g}}_i$, es una estrategia dominante para cada empresa.

Demostración:

Dada una empresa cualquiera i, y suponiendo que las restantes empresas declaran $g^*_{-i} = (g^*_1, ..., g^*_{i-1}, g^*_{i+1}, ..., g^*_n)$, vamos a comparar, siguiendo el hilo de las anteriores cuatro posibilidades lógicas aplicadas a la combinación $(g^*_1, ..., g^*_{i-1}, \widehat{\mathbf{g}}_i, g^*_{i+1}, ..., g^*_n)$, la ganancia que obtiene i al declarar su verdadero beneficio $\widehat{\mathbf{g}}_i$ con la que obtendría si declarara cualquier otra cosa g_i.

Sea

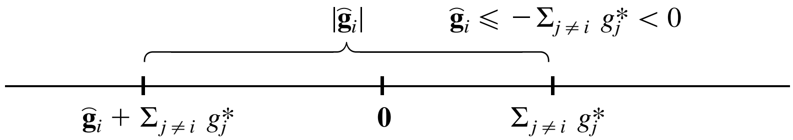
1ª posibilidad (pivote negativo, evitando que sea elegida C):

$$g^*_1 + \cdots + g^*_{i-1} + \widehat{\mathbf{g}}_i + g^*_{i+1} + \cdots + g^*_n \leqslant 0 \quad \text{(con } i \text{ es elegida A)}$$

y

$$g^*_1 + \cdots + g^*_{i-1} + g^*_{i+1} + \cdots + g^*_n > 0 \quad \text{(sin } i \text{ hubiera sido elegida C)}$$

Gráficamente:



En este caso, declarando $\widehat{\mathbf{g}}_i$ obtiene la ganancia:

$$u_i(g^*_1, ..., g^*_{i-1}, \widehat{\mathbf{g}}_i, g^*_{i+1}, ..., g^*_n) = -t_i(g^*_1, ..., g^*_{i-1}, \widehat{\mathbf{g}}_i, g^*_{i+1}, ..., g^*_n) =$$
$$= -(g^*_1 + \cdots + g^*_{i-1} + g^*_{i+1} + \cdots + g^*_n) \geqslant \widehat{\mathbf{g}}_i$$

Si declara cualquier otra cosa g_i, obtiene la misma ganancia si

$$g_i \leqslant -(g^*_1 + \cdots + g^*_{i-1} + g^*_{i+1} + \cdots + g^*_n)$$

en cuyo caso sigue haciendo de pivote negativo, y obtiene $\widehat{\mathbf{g}}_i$, que es una ganancia igual o menor, en el caso $g_i > -(g^*_1 + \cdots + g^*_{i-1} + g^*_{i+1} + \cdots + g^*_n)$, pues en ese caso no hace de pivote, y no tiene que pagar impuesto.

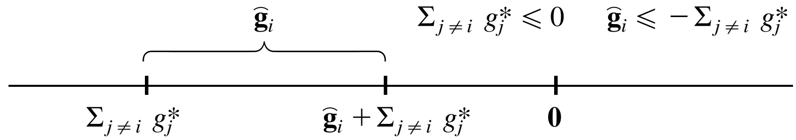
2ª posibilidad (no es pivote, pues con i o sin i, es elegida A):

$$g^*_1 + \cdots + g^*_{i-1} + \widehat{\mathbf{g}}_i + g^*_{i+1} + \cdots + g^*_n \leqslant 0 \quad \text{(con } i \text{ es elegida A)}$$

y

$$g^*_1 + \cdots + g^*_{i-1} + g^*_{i+1} + \cdots + g^*_n \leqslant 0 \quad \text{(sin } i \text{ también hubiera sido elegida A)}$$

Gráficamente:



En este caso, declarando $\widehat{\mathbf{g}}_i$ obtiene: $u_i(g_1^*, ..., g_{i-1}^*, \widehat{\mathbf{g}}_i, g_{i+1}^*, ..., g_n^*) = \widehat{\mathbf{g}}_i$, pues no hace de pivote y no tiene que pagar impuesto.

Si declara cualquier otra cosa g_i, obtiene la misma ganancia si

$$g_i \leqslant -(g_1^* + \cdots + g_{i-1}^* + g_{i+1}^* + \cdots + g_n^*)$$

en cuyo caso sigue sin hacer de pivote, y obtiene

$$u_i(g_1^*, ..., g_{i-1}^*, g_i, g_{i+1}^*, ..., g_n^*) = \widehat{\mathbf{g}}_i - t_i(g_1^*, ..., g_{i-1}^*, g_i, g_{i+1}^*, ..., g_n^*) =$$
$$= \widehat{\mathbf{g}}_i + (g_1^* + \cdots + g_{i-1}^* + g_{i+1}^* + \cdots + g_n^*)$$

que es una ganancia igual o menor que $\widehat{\mathbf{g}}_i$, si

$$g_i > -(g_1^* + \cdots + g_{i-1}^* + g_{i+1}^* + \cdots + g_n^*)$$

en cuyo caso hace de pivote positivo.

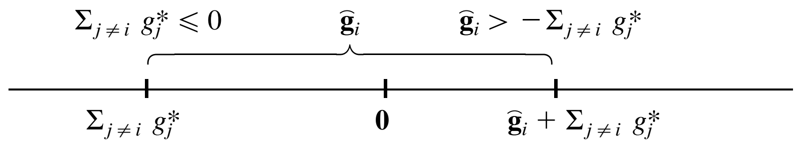
3ª posibilidad (pivote positivo, causando la elección de C):

$$g_1^* + \cdots + g_{i-1}^* + \widehat{\mathbf{g}}_i + g_{i+1}^* + \cdots + g_n^* > 0 \quad \text{(con } i \text{ es elegida C)}$$

y

$$g_1^* + \cdots + g_{i-1}^* + g_{i+1}^* + \cdots + g_n^* \leqslant 0 \quad \text{(sin } i \text{ hubiera sido elegida A)}$$

Gráficamente:



En este caso, declarando $\widehat{\mathbf{g}}_i$ obtiene la ganancia:

$$u_i(g_1^*, ..., g_{i-1}^*, \widehat{\mathbf{g}}_i, g_{i+1}^*, ..., g_n^*) = \widehat{\mathbf{g}}_i - t_i(g_1^*, ..., g_{i-1}^*, \widehat{\mathbf{g}}_i, g_{i+1}^*, ..., g_n^*) =$$
$$= \widehat{\mathbf{g}}_i + (\mathrm{g}_1^* + ... + \mathrm{g}_{i-1}^* + g_{i+1} + ... + g_n^*) > 0$$

Si declara cualquier otra cosa g_i, obtiene la misma ganancia si

$$g_i > -(g_1^* + \cdots + g_{i-1}^* + g_{i+1}^* + \cdots + g_n^*)$$

en cuyo caso sigue haciendo de pivote positivo, y obtiene 0, que es una ganancia menor, en el caso de que $g_i \leqslant -(g_1^* + \cdots + g_{i-1}^* + g_{i+1}^* + \cdots + g_n^*)$, pues en ese caso no altera la elección de A y no tiene que pagar impuesto.

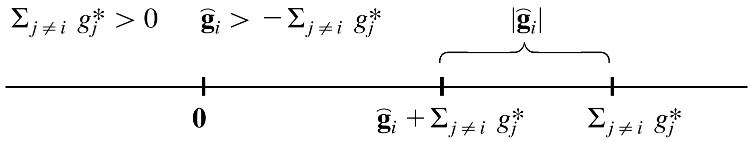
4ª posibilidad (no es pivote, pues con i o sin i, es elegida C):

$$g_1^* + \cdots + g_{i-1}^* + \widehat{\mathbf{g}}_i + g_{i+1}^* + \cdots + g_n^* > 0 \quad \text{(con } i \text{ es elegida C)}$$

y

$$g_1^* + \cdots + g_{i-1}^* + g_{i+1}^* + \cdots + g_n^* > 0 \quad \text{(sin } i \text{ también hubiera sido elegida C)}$$

Gráficamente:



En este caso, declarando $\widehat{\mathbf{g}}_i$ obtiene: $u_i(g_1^*, ..., g_{i-1}^*, \widehat{\mathbf{g}}_i, g_{i+1}^*, ..., g_n^*) = \widehat{\mathbf{g}}_i$, pues no hace de pivote y no tiene que pagar impuesto.

Si declara cualquier otra cosa g_i, obtiene la misma ganancia si

$$g_i > -\,(g_1^* + \cdots + g_{i-1}^* + g_{i+1}^* + \cdots + g_n^*)$$

en cuyo caso sigue sin hacer de pivote, y obtiene

$$u_i(g_1^*, ..., g_{i-1}^*, g_i, g_{i+1}^*, ..., g_n^*) = 0 - (g_1^* + \cdots + g_{i-1}^* + g_{i+1}^* + \cdots + g_n^*)$$

que es una ganancia menor, si $g_i \leqslant -\,(g_1^* + \cdots + g_{i-1}^* + g_{i+1}^* + \cdots + g_n^*)$, en cuyo caso hace de pivote negativo.

Resumiendo la argumentación de los cuatro casos, mentir nunca le beneficia a la empresa i, pues las nuevas reglas establecen que ha de compensar a las demás por el perjuicio que a estas les ocasionaría que se alterara la opción elegida por causa de i. Si mintiendo no cambia su naturaleza de pivote, dicha mentira no afecta a su ganancia. Si, por el contrario, mintiendo sí altera su naturaleza de pivote, dicha mentira le perjudica estrictamente. En efecto, si declara un beneficio demasiado alto o demasiado bajo, podría causar la elección de C o la de A, imponiendo un perjuicio a las demás empresas que, siendo mayor que el beneficio de i, ésta ha de compensar.

Ilustrémoslo con la situación del Ejemplo 2.19. El beneficio real de C para la segunda empresa E2 es 2.000 euros. Si la suma Σ_0 de declaraciones de las otras es estrictamente positiva, E2 consigue su ganancia máxima de 2.000, siendo elegida C y sin pagar impuestos, declarando 2.000 (conseguiría lo mismo con cualquier declaración $g > -\Sigma_0$, y conseguiría una ganancia menor con cualquier declaración $g \leqslant -\Sigma_0$, que provocaría la elección de A). Si Σ_0 está en el intervalo $(-2.000, 0]$, E2 consigue su ganancia máxima de $2.000 + \Sigma_0$, siendo elegida C y pagando un impuesto $-\Sigma_0$, declarando 2.000 (conseguiría lo mismo con cualquier declaración $g > -\Sigma_0$, y conseguiría una ganancia menor con cualquier declaración $g \leqslant -\Sigma_0$, que no permitiría elegir C). Por último, si Σ_0 es igual o menor que -2.000, E2 consigue su ganancia máxima de 0, siendo elegida A y sin pagar impuestos, declarando 2.000 (conseguiría lo mismo con cualquier declaración $g \leqslant -\Sigma_0$, y conseguiría una ganancia menor con cualquier declaración $g > -\Sigma_0$, que causaría la elección de C, pero obligándole a pagar un impuesto mayor de 2.000).

2.4. SOLUCIONES DE UN JUEGO MEDIANTE ARGUMENTOS DE EQUILIBRIO. EL EQUILIBRIO DE NASH

Este es quizá el más importante concepto de solución. Según él, lo razonable es esperar que los jugadores jueguen un perfil de estrategias que constituya un equilibrio de Nash, tal como se define a continuación. Se pretende que este nuevo concepto de solución sea un refinamiento, constituido por modos razonables de jugar, de los conceptos de solución basados en la eliminación iterativa de estrategias dominadas.

Hasta ahora hemos hecho un análisis relativo a la dominación, es decir, hemos intentado eliminar del análisis aquellas estrategias que pensamos que no deberían ser jugadas nunca por jugadores racionales. Dicho de otro modo, nos hemos limitado a resolver la cuestión sobre qué estrategias no debería jugar un individuo racional y hemos considerado que era razonable suponer que un jugador racional nunca utilizará estrategias que le produzcan unas ganancias inferiores ante cualquier creencia que pueda tener sobre el comportamiento de los rivales (ante cualquier elección que pudieran hacer los rivales), es decir, nunca jugará estrategias estrictamente dominadas. Además hemos «exprimido» un poco más este concepto para indicar que si añadimos el supuesto de conocimiento común de la racionalidad de todos los jugadores, un jugador racional no debería esperar que sus rivales jueguen estrategias estrictamente dominadas, es decir, no debería suponer en sus rivales un comportamiento en el que éstos juegan estrategias dominadas, ni debería esperar que los otros esperen que alguien juegue estrategias dominadas... y así sucesivamente.

Este tipo de análisis no nos ha permitido alcanzar un resultado claro en la mayoría de las situaciones, sino que como norma general ha simplificado en alguna medida los elementos a analizar.

Lo que se propone a continuación es un enfoque completamente diferente al de la dominación de estrategias, una línea de análisis en la cual la cuestión clave es: ¿qué propiedades debería tener un perfil de estrategias para constituirse en solución de un juego?, ¿qué propiedades debe tener un perfil de estrategias para que podamos pensar que es una buena predicción del comportamiento de jugadores racionales? Procedemos por tanto, a realizar un análisis de equilibrio. Dicho análisis nos proporciona el concepto de equilibrio de Nash como condición necesaria (y en algunos casos también suficiente) para que un perfil de estrategias sea la solución del juego, es decir, una predicción válida sobre el comportamiento de jugadores racionales.

El Equilibrio de Nash (EN) en estrategias puras

Definición 2.7

En el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, decimos que el perfil de estrategias puras $(s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ es un **Equilibrio de Nash** (EN) si para cada jugador i,

$u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*) \geqslant u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$ para todo s_i de S_i.

Es decir, para cada jugador i, s_i^* es una solución del problema

$\max u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$ donde s_i es la variable de decisión y pertenece a S_i.

O dicho de otro modo, para cada jugador i, s_i^* es una respuesta óptima a s_{-i}^*.

De esta definición se deduce que un Equilibrio de Nash (EN) es un perfil de estrategias del que ningún jugador desearía desviarse unilateralmente, es decir, ninguno se arrepiente de la decisión tomada, dadas las estrategias decididas por el resto de los jugadores. Un EN está formado por estrategias que son óptimas para cada jugador dadas las estrategias del resto de jugadores.

Esto no significa que en un EN cada jugador esté alcanzando el mejor resultado posible, sino el mejor resultado condicionado por el hecho de que los demás jugadores jueguen las estrategias indicadas para ellos en dicho perfil.

Puede haber múltiples equilibrios de Nash en un juego y, por analogía con la notación $\mathbf{S}^{EIE}$ utilizada para referirnos al conjunto de perfiles constituidos por estrategias que sobreviven al proceso EIE, llamaremos $\mathbf{S}^{EN}$ al conjunto de perfiles que son equilibrios de Nash.

Cálculo de los EN (en estrategias puras) en los juegos anteriores

Ejemplo 2.20

Para el dilema del prisionero, y siguiendo la definición, vamos a intentar encontrar el equilibrio de Nash. Ello nos obliga a enumerar todos los perfiles de estrategias posibles y ver si fijada una estrategia del perfil para un jugador, la otra estrategia maximiza los pagos del otro jugador.

Dilema del Prisionero

		Preso 2	
		Callar	Confesar
Preso 1	Callar	4, 4	0, 5
	Confesar	5, 0	1, 1

El dilema del prisionero presenta cuatro perfiles como posibles soluciones EN del juego: (*Callar*, *Callar*), (*Callar*, *Confesar*), (*Confesar*, *Callar*) y (*Confesar*, *Confesar*).

Comencemos analizando el perfil (*Callar*, *Callar*) y supongamos que es un EN. Si J1 prevé que J2 jugará *Callar*, ¿le interesará a J1 seguir pensando en jugar *Callar*? La respuesta es no. Dada o fijada la estrategia *Callar* de J2, el jugador J1 preferirá desviarse de la estrategia indicada para él en el perfil propuesto como solución puesto que con la estrategia *Confesar* obtiene un pago superior u_1(*Confesar*, *Callar*) $= 5 > 4 =$ u_1(*Callar*, *Callar*). Este argumento también es aplicable al jugador J2 (por la simetría del juego).

Supongamos que se propone como solución EN el perfil (*Confesar*, *Callar*). En este caso, si el jugador J2 supusiera que J1 iba a jugar *Confesar*, a él le convendría jugar la estrategia *Confesar* pues con ello maximiza su utilidad en este caso particular (u_2(*Confesar*, *Confesar*) $= 1 > 0 =$ u_2(*Confesar*, *Callar*)). Por tanto, el perfil (*Confesar*, *Callar*) tampoco es un EN.

El caso (*Callar*, *Confesar*) es análogo al anterior intercambiando la posición de los jugadores.

Finalmente, nos queda el caso (*Confesar*, *Confesar*). Este sí que es un perfil de equilibrio, un equilibrio de Nash, ya que ninguno de los jugadores tiene incentivo para desviarse de un modo unilateral de la estrategia que se propone. Si alguno de los jugadores decidiera seguir la estrategia *Callar* en solitario, perdería utilidad en relación al perfil (*Confesar*, *Confesar*), puesto que $u_1(Callar, Confesar) = 0 < 1 = u_1(Confesar, Confesar)$ y $u_2(Confesar, Callar) = 0 < 1 = u_2(Confesar, Confesar)$.

En el cuadro siguiente se utilizan flechas para señalar, en cada caso, el sentido de la desviación deseada por cada jugador desde cada perfil de estrategias. El único EN es el perfil (*Confesar*, *Confesar*), que es el único perfil desde el cual no sale ninguna flecha.

Dilema del Prisionero (desviaciones deseadas)

		J2		
		Callar		Confesar
J1	Callar	4, 4	$\Rightarrow$	0, 5
		$\Downarrow$		$\Downarrow$
	Confesar	5, 0	$\Rightarrow$	1, 1

Hay otra manera sencilla y eficaz de visualizar, en la propia representación bimatricial o trimatricial de un juego, la búsqueda y obtención de los EN. Consiste en comparar, para cualquier combinación de estrategias de sus contrincantes, los pagos que un jugador obtendría si jugara cada una de sus estrategias, y subrayar el pago (o pagos) máximo alcanzable, que corresponden a la estrategia (o las estrategias) de respuesta óptima a dicha combinación. Un perfil de estrategias es EN si y sólo si el vector de pagos correspondiente tiene todos sus pagos subrayados. En el cuadro siguiente se ejemplifica el procedimiento:

Dilema del Prisionero (pagos subrayados)

		Preso 2	
		Callar	Confesar
Preso 1	Callar	4, 4	0, $\underline{5}$
	Confesar	$\underline{5}$, 0	$\underline{1}$, $\underline{1}$

$\Rightarrow$ (*Confesar*, *Confesar*) es el EN

Supuesto que el Preso 2 juegue *Callar*, se comparan los pagos 4 y 5 del Preso 1, y se subraya el máximo que es 5, indicando que la respuesta óptima es *Confesar*. Supuesto que el Preso 2 juegue *Confesar*, se comparan los pagos 0 y 1 del Preso 1, y se subraya el máximo que es 1, indicando que la respuesta óptima es también *Confesar*. Procediendo de manera análoga con los pagos del Preso 2, se llega a la conclusión de que el único EN es el perfil (*Confesar*, *Confesar*), único perfil en cuyo vector de pagos están todos los pagos subrayados. Es decir, $\mathbf{S}^{EN} = \{(Confesar, Confesar)\}$.

Ejemplo 2.21

En el Juego 2.1 ($x = 1$, $y = 3$) hay nueve posibles soluciones, correspondientes a los nueve perfiles de estrategias posibles: (A, I), (A, C), (A, D), (M, I), (M, C), (M, D) (B, I), (B, C) y (B, D). Véanse las desviaciones deseadas, visualizadas por medio de flechas:

Juego 2.1 ($x = 1, y = 3$) (desviaciones deseadas)

		Jugador J2				
		I		C		D
Jugador J1	A	3, 3	⇐	4, 2	⇐	1, 1
		⇑		⇑		⇓
	M	2, 4	⇒	3, 5	⇐	4, 0
		⇑		⇑		⇑
	B	1, 0	⇒	2, 1	⇒	0, 3

Tal y como indican las flechas, en todos los perfiles, excepto en el perfil (A, I), al menos un jugador tiene interés en desviarse de una manera unilateral del perfil propuesto como solución. Así, por ejemplo, dado el perfil (M, C), el jugador J1 tiene interés en jugar A en lugar de M, pues dada la estrategia C de J2 obtiene una ganancia de 4 en lugar de 3. En consecuencia, el EN es el perfil (A, I), el único desde el cual no sale ninguna flecha. En el cuadro siguiente se muestran las estrategias de respuesta óptima subrayando los pagos correspondientes.

Juego 2.1 ($x = 1, y = 3$) (pagos subrayados)

		Jugador J2		
		I	C	D
Jugador J1	A	$\underline{3}$, $\underline{3}$	$\underline{4}$, 2	1, 1
	M	2, 4	3, $\underline{5}$	$\underline{4}$, 0
	B	1, 0	2, 1	0, $\underline{3}$

⇒ (A, I) es el EN

En conclusión, $\mathbf{S}^{EN} = \{(A, I)\}$.

Ejemplo 2.22

Se muestran a continuación, subrayando los pagos pertinentes, las estrategias de respuesta óptima y los EN del juego de la caza del ciervo (Ejemplo 2.5) y del Juego 2.5 (Ejemplo 2.14).

a)

La caza del ciervo (pagos subrayados)

(donde $V > 2W$, $W > 0$)		**Jugador 2**	
		Cooperar	Buscar liebre
Jugador 1	Cooperar	$\underline{V}$, $\underline{V}$	0, $2W$
	Buscar liebre	$2W$, 0	$\underline{W}$, $\underline{W}$

⇒ (*Cooperar*, *Cooperar*) y (*Buscar Liebre*, *Buscar Liebre*) son los EN en estrategias puras

b)

Juego 2.5 (pagos subrayados)

Jugador 3: X		**Jugador 2**		
		I	M	D
Jugador 1	A	1, $\underline{3}$, $\underline{0}$	−1, 2, $\underline{3}$	−1, 0, −2
	B	$\underline{2}$, $\underline{1}$, 1	$\underline{4}$, $\underline{1}$, $\underline{3}$	$\underline{0}$, 0, 1

Jugador 3: Y		**Jugador 2**		
		I	M	D
Jugador 1	A	0, 2, −1	4, $\underline{3}$, 2	1, 2, $\underline{0}$
	B	$\underline{2}$, −2, $\underline{5}$	$\underline{5}$, 5, 2	$\underline{4}$, $\underline{6}$, $\underline{4}$

Los únicos perfiles en los que la estrategia de cada jugador es respuesta óptima a las de los otros dos son el (B, M, X) y el (B, D, Y), en los cuales los tres pagos están subrayados. Por tanto, $\mathbf{S}^{EN}$ = {(B, M, X), (B, D, Y)}. Merece la pena observar que ambos perfiles son supervivientes a los procesos de eliminación iterativa EIE y EID.

Ejemplo 2.23

Se muestran igualmente, para el juego de la votación por mayoría, las estrategias de respuesta óptima y los EN de juego.

Juego de la votación por mayoría

Jugador C3 vota A		**Jugador C2**		
		Vota A	Vota B	Vota C
Jugador C1	Vota A	$\underline{2}$, $\underline{0}$, $\underline{1}$ (A)	$\underline{2}$, $\underline{0}$, $\underline{1}$ (A)	$\underline{2}$, $\underline{0}$, 1 (A)
	Vota B	$\underline{2}$, 0, $\underline{1}$ (A)	1, $\underline{2}$, $\underline{0}$ (B)	1, $\underline{2}$, 0 (B)
	Vota C	$\underline{2}$, 0, 1 (A)	0, $\underline{1}$, $\underline{2}$ (C)	0, $\underline{1}$, $\underline{2}$ (C)

Jugador C3 vota B		**Jugador C2**		
		Vota A	Vota B	Vota C
Jugador C1	Vota A	$\underline{2}$, 0, $\underline{1}$ (A)	$\underline{1}$, $\underline{2}$, 0 (B)	$\underline{2}$, 0, 1 (A)
	Vota B	1, $\underline{2}$, 0 (B)	$\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{0}$ (B)	1, $\underline{2}$, 0 (B)
	Vota C	0, 1, $\underline{2}$ (C)	$\underline{1}$, $\underline{2}$, 0 (B)	0, 1, $\underline{2}$ (C)

Jugador C3 vota C		**Jugador C2**		
		Vota A	Vota B	Vota C
Jugador C1	Vota A	$\underline{2}$, 0, $\underline{1}$ (A)	$\underline{2}$, 0, $\underline{1}$ (A)	$\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$ (C)
	Vota B	1, $\underline{2}$, 0 (B)	1, $\underline{2}$, $\underline{0}$ (B)	$\underline{0}$, 1, $\underline{2}$ (C)
	Vota C	0, $\underline{1}$, $\underline{2}$ (C)	0, $\underline{1}$, $\underline{2}$ (C)	$\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$ (C)

El conjunto de los EN del juego es $\mathbf{S}^{EN}$ = **{(A, A, A), (A, B, A), (B, B, B), (A, C, C), (C, C, C)}**. Merece la pena destacar que no figura entre los EN del juego el perfil (A, B, C), que podríamos decir que es el más natural, ya que en él cada votante vota a su opción o candidato favorito (como consecuencia de la regla de desempate aplicada). Por el contrario, en algunos de los EN del juego hay un votante que realiza lo que ha dado en llamarse **voto útil** o **voto estratégico.** Así ocurre en los perfiles de equilibrio (A, B, A) y (A, C, C). Por ejemplo, en el perfil (A, C, C) se observa que el votante 2 vota C en lugar de votar B, aun cuando su preferido es B, porque de este modo consigue que el resultado sea C, que le proporciona un pago de 1, mientras que si hubiera votado B, el resultado hubiese sido A, que le proporciona un pago de 0. De este modo, sin dejarse llevar por sus preferencias verdaderas, vota tras un razonamiento estratégico y, como consecuencia, obtiene un resultado que es preferido a aquel que obtendría en el caso de haber votado a su candidato favorito (voto llamado sincero). Es por ello por lo que a esta acción se la llama voto estratégico. Otra interpretación de esta situación, que permite llamarla voto útil, es que el votante 2 observa que, supuesto que los otros votan A y C, votar B sería un despilfarro, pues sólo serviría para que venciera el candidato menos querido, que es el A, y le es más útil votar C, pues así ayudaría a C a vencer, arrebatándole a A el triunfo. Quizás merezca la pena observar también que, puesto que no existe ningún equilibrio en que todos voten directamente a su favorito, todos los equilibrios tienen algo de especial. Efectivamente, de dos de ellos ya hemos dicho que reflejan un llamado voto útil. En cuanto a los otros tres, (A, A, A), (B, B, B) y (C, C, C), reflejan un voto que podríamos llamar de resignación, en el cual un votante, sabiendo que su voto ya no puede cambiar un resultado que ya han determinado los otros dos votantes, y que es su peor resultado posible, vota también al candidato que peor valora. Podríamos decir, en cierto sentido que será precisado en el capítulo siguiente al refinar el concepto de EN, que los equilibrios con voto útil son los más razonables de este juego, ya que en ellos ningún jugador juega una estrategia que esté débilmente dominada.

Correspondencia de respuesta óptima

El proceso de cálculo de los EN en estrategias puras de un juego depende, lógicamente, de las características de dicho juego. En los juegos finitos y de tamaño reducido, como el dilema del prisionero o el Juego 2.1, es fácil hacer una comprobación en detalle de todas las posibilidades, mientras que en los juegos infinitos suele ser necesario un planteamiento más analítico, que habitualmente requiere resolver varios problemas de optimización simultáneos (uno por cada jugador).

Sin embargo, en todos los casos es conveniente organizar la búsqueda de los EN de manera sistemática, calculando la(s) estrategia(s) óptima(s) que cada jugador podría elegir en respuesta a cualquier combinación de estrategias que puedan elegir los otros jugadores.

Se busca, por tanto, dado un jugador i y para cada combinación s_{-i} de estrategias de los demás jugadores, un conjunto de estrategias de éste, que llamaremos $R_i(s_{-i})$. La regla que a cada s_{-i} (lo que podrían hacer los demás) le asigna $R_i(s_{-i})$ (lo que le conviene hacer a él) recibe el nombre de correspondencia de respuesta óptima del jugador i.

Definición 2.8

En el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, y para cada jugador i, llamamos **correspondencia de respuesta óptima** de dicho jugador a la regla o correspondencia que asigna, a cualquier combinación de estrategias $s_{-i} = (s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$, el conjunto $R_i(s_{-i})$ de estrategias de i que son respuesta óptima a s_{-i}, es decir, que cumplen:

$$s_i' \in R_i(s_{-i}) \quad \text{si y sólo si}$$

$$u_i(s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, ..., s_n) \geqslant u_i(s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, ..., s_n) \text{ para todo } s_i \text{ de } S_i.$$

A partir de la definición anterior, se obtiene de manera inmediata el siguiente resultado:

Teorema 2.3

En el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, el perfil de estrategias

$$s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$$

es un equilibrio de Nash si y sólo si $s_i^* \in R_i(s_{-i}^*)$ para cada jugador i.

Podemos ahora automatizar el cálculo de los EN mediante un proceso en dos etapas:

- Para cada jugador i, y para cualquier conjetura que pueda formarse sobre la actuación de los demás jugadores (o lo que es lo mismo, para cualquier combinación de estrategias de éstos) se calcula la estrategia de respuesta óptima de i. De este modo tenemos la correspondencia de respuesta óptima de cada jugador.
- Identificamos los EN como los perfiles estratégicos que son puntos de intersección de todas las correspondencias de respuesta óptima.

Ejemplo 2.24

Definamos el juego siguiente, al que llamaremos **juego de la mayor diferencia:**

Dos jugadores escriben, simultáneamente, un número entre 0 y 1. Los pagos dependen de la diferencia entre ambos números, así:

$$u_1(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2) = (s_1 - s_2)^2$$

En este juego, a cada jugador le conviene, en respuesta a un hipotético número x que pudiera haber escrito el otro, escribir un número a la mayor distancia posible de x. Por ejemplo, la respuesta óptima a $s_2 = 3/4$ sería $s_1 = 0$. Formalmente, el jugador 1 (y análogamente razonaría el jugador 2) determinaría su respuesta óptima a cualquier estrategia s_2 del jugador 2 resolviendo:

$$\begin{gathered}\max_{s_1} \ (s_2 - s_1)^2 \\ \text{sujeto a}: \ 0 \leqslant s_1 \leqslant 1\end{gathered}$$

El conjunto de las soluciones s_1^* obtenidas es $R_1(s_2)$. En consecuencia, las correspondencias de respuesta óptima son:

$$\text{Para J1:} \quad R_1(s_2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad s_2 > 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad s_2 < 1/2 \\ \{0, \ 1\} & \text{si} \quad s_2 = 1/2 \end{cases}$$

$$\text{Para J2:} \quad R_2(s_1) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad s_1 > 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad s_1 < 1/2 \\ \{0, \ 1\} & \text{si} \quad s_1 = 1/2 \end{cases}$$

El conjunto de los EN es $\mathbf{S}^{\text{EN}} = \{(1, 0), (0, 1)\}$, pues estos dos son los únicos perfiles en que se intersecan $R_1(s_2)$ y $R_2(s_1)$, es decir, en que cada estrategia del perfil es respuesta óptima a la otra.

Ejemplo 2.25

En el juego de las peticiones de Nash, introducido en el Ejemplo 2.3, a cada jugador le conviene, en respuesta a un hipotético número x que pudiera haber escrito el otro, escribir un número y lo más grande posible de modo que $x + y$ no exceda de 1. Por ejemplo, la respuesta óptima a $s_2 = 2/3$ sería $s_1 = 1/3$. Formalmente, el jugador 1 (y análogamente razonaría el jugador 2) determinaría su respuesta óptima a cualquier estrategia s_2 del jugador 2 resolviendo:

$$\begin{gathered}\max_{s_1} \ (s_1) \\ \text{sujeto a}: \ 0 \leqslant s_1 \leqslant 1 \quad \text{y} \quad s_1 + s_2 \leqslant 1\end{gathered}$$

y el conjunto de las soluciones s_1^* obtenidas es $R_1(s_2)$. Así pues, las correspondencias de respuesta óptima son:

Para J1: $R_1(s_2) = \begin{cases} 1 - s_2 & \text{si} \quad s_2 < 1 \\ [0,\ 1] & \text{si} \quad s_2 = 1 \end{cases}$ Para J2: $R_2(s_1) = \begin{cases} 1 - s_1 & \text{si} \quad s_1 < 1 \\ [0,\ 1] & \text{si} \quad s_1 = 1 \end{cases}$

El conjunto de los EN es $\mathbf{S}^{\text{EN}} = \{(s_1,\ s_2) \text{ tales que } s_1 + s_2 = 1\} \cup \{(1,\ 1)\}$, pues éstos son los únicos perfiles en que cada estrategia es respuesta óptima a la otra.

En la Figura 2.1 se visualizan gráficamente las correspondencias de respuesta óptima, respectivamente, del juego de la mayor diferencia y del juego de las peticiones de Nash. Las estrategias de los jugadores 1 y 2 se representan, respectivamente, en los ejes horizontal y vertical. La gráfica de la correspondencia de respuesta óptima del jugador 1 se muestra en trazo continuo, y la del jugador 2 en trazo discontinuo. Se han señalado los puntos $A_1(0,\ 3/4)$ y $A_2(3/4,\ 0)$ en el primer juego y el punto $B(3/4,\ 1/4)$ en el segundo. El punto $A_1(0,\ 3/4)$ pertenece a la correspondencia $R_1(s_2)$ del primer juego porque la estrategia 0 del jugador 1 es respuesta óptima a la estrategia 3/4 del jugador 2, y el punto $A_2(3/4,\ 0)$ pertenece a la correspondencia $R_2(s_1)$ porque la estrategia 0 del jugador 2 es respuesta óptima a la estrategia 3/4 del jugador 1. El punto $B(3/4,\ 1/4)$ pertenece a las correspondencias $R_1(s_2)$ y $R_2(s_1)$ del segundo juego porque la estrategia 3/4 del jugador 1 es respuesta óptima a la estrategia 1/4 del jugador 2, y al mismo tiempo la estrategia 1/4 del jugador 2 es respuesta óptima a la estrategia 3/4 del jugador 1.

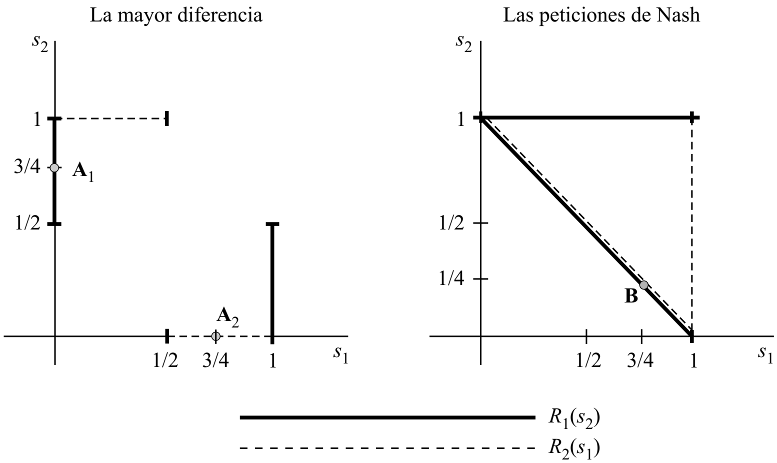


Figura 2.1 Correspondencias de respuesta óptima.

Ejemplo 2.26

Definamos el juego siguiente, al que llamaremos **juego básico de Cournot:**

Dos jugadores, J1 y J2, escriben, simultáneamente, un número entre 0 y 1, q_1 y q_2. Los pagos se determinan así:

$$u_1(q_1,\ q_2) = q_1(1 - q_1 - q_2), \qquad u_2(q_1,\ q_2) = q_2(1 - q_1 - q_2)$$

La correspondencia $R_1(q_2)$ de respuesta óptima de J1 se obtiene resolviendo, para cada $q_2 \in [0, 1]$, el problema de optimización:

$$\max_{q_1} \; u_1(q_1, q_2) = q_1(1 - q_1 - q_2)$$
$$\text{sujeto a: } 0 \leqslant q_1 \leqslant 1$$

La condición de primer orden de dicho problema (sin considerar las restricciones) es

$$\partial u_1(q_1, q_2)/\partial q_1 = 1 - 2q_1 - q_2 = 0$$

de donde se deduce que $q_1 = R_1(q_2) = (1 - q_2)/2$, que pertenece al intervalo [0, 1] ya que $q_2 \in [0, 1]$.

(La condición de segundo orden es $\partial_2 u_1(q_1, q_2)/\partial q_1^2 = -2 < 0$, correspondiente a un máximo.)

Análogamente, la correspondencia $R_2(q_1)$ de respuesta óptima de J2 se obtiene resolviendo, para cada $q_1 \in [0, 1]$, el problema de optimización:

$$\max_{q_2} \; u_2(q_1, q_2) = q_2(1 - q_1 - q_2)$$
$$\text{sujeto a: } 0 \leqslant q_2 \leqslant 1$$

Procediendo como en el caso de J1, se deduce $q_2 = R_2(q_1) = (1 - q_1)/2$, que pertenece al intervalo [0, 1] ya que $q_1 \in [0, 1]$.

El conjunto de los EN es $\mathbf{S}^{\mathrm{EN}} = \{(q_1^* = 1/3, q_2^* = 1/3)\}$, pues éste es el único perfil en que cada estrategia es respuesta óptima a la otra, es decir, la única solución del sistema de ecuaciones:

$$q_1 = (1 - q_2)/2$$
$$q_2 = (1 - q_1)/2$$

La representación gráfica de las correspondencias de respuesta óptima, cuya intersección es el EN del juego, se ve en la Figura 2.2.

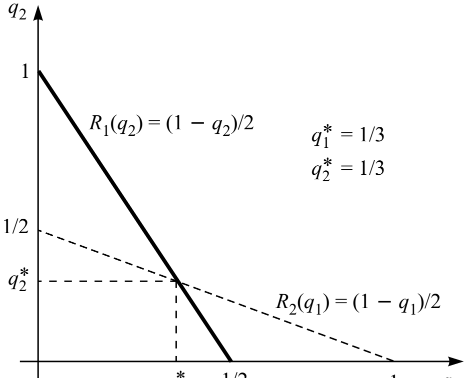


Figura 2.2 Correspondencia de respuesta óptima del juego básico de Cournot.

Ejemplo 2.27

Calculemos ahora las correspondencias de respuesta óptima, y los equilibrios de Nash, de los juegos definidos en el Apartado 2.1:

a) Dilema del prisionero:

En este juego, a cada jugador le conviene, en respuesta a cualquiera de las estrategias del otro, jugar su estrategia *Confesar*. Por tanto, las correspondencias de respuesta óptima son:

$$\text{Para el preso 1:} \quad R_1(s_2) = \textit{Confesar}, \quad \forall s_2 \in \{\textit{Confesar}, \textit{Callar}\}$$

$$\text{Para el preso 2:} \quad R_2(s_1) = \textit{Confesar}, \quad \forall s_1 \in \{\textit{Confesar}, \textit{Callar}\}$$

En consecuencia, el conjunto de los EN es $\mathbf{S}^{\text{EN}} = \{(\textit{Confesar}, \textit{Confesar})\}$.

b) Batalla de los sexos:

En este juego, a cada jugador le conviene, en respuesta a cualquiera de las estrategias puras del otro, jugar la misma estrategia. Por tanto, las correspondencias de respuesta óptima son:

$$\text{Para el jugador 1:} \quad R_1(s_2) = s_2, \quad \forall s_2 \in \{\textit{Cine}, \textit{Fútbol}\}$$

$$\text{Para la jugadora 2:} \quad R_2(s_1) = s_1, \quad \forall s_1 \in \{\textit{Cine}, \textit{Fútbol}\}$$

En consecuencia, el conjunto de los EN (en estrategias puras) es $\mathbf{S}^{\text{EN}} = \{(\textit{Cine}, \textit{Cine}), (\textit{Fútbol}, \textit{Fútbol})\}$.

c) Juego Halcón-Paloma:

Si $V/2 > C$, a cada jugador le conviene, en respuesta a cualquiera de las estrategias del otro, jugar su estrategia *Halcón*. Por tanto, las correspondencias de respuesta óptima son:

$$\text{Para el jugador 1:} \quad R_1(s_2) = \textit{Halcón}, \quad \forall s_2 \in \{\textit{Halcón}, \textit{Paloma}\}$$

$$\text{Para el jugador 2:} \quad R_2(s_1) = \textit{Halcón}, \quad \forall s_1 \in \{\textit{Halcón}, \textit{Paloma}\}$$

En consecuencia, el conjunto de los EN es $\mathbf{S}^{\text{EN}} = \{(\textit{Halcón}, \textit{Halcón})\}$.

Si $V/2 < C$, a cada jugador le conviene, en respuesta a cualquiera de las estrategias del otro, jugar la estrategia contraria. Por tanto, las correspondencias de respuesta óptima son:

$$\text{Para el jugador 1:} \quad R_1(\textit{Halcón}) = \textit{Paloma} \text{ y } R_1(\textit{Paloma}) = \textit{Halcón}$$

$$\text{Para el jugador 2:} \quad R_2(\textit{Halcón}) = \textit{Paloma} \text{ y } R_2(\textit{Paloma}) = \textit{Halcón}$$

En consecuencia, el conjunto de los EN es $\mathbf{S}^{\text{EN}} = \{\{(\textit{Halcón}, \textit{Paloma}), (\textit{Paloma}, \textit{Halcón})\}$.

Ejemplo 2.28

En cuanto al juego de las monedas, definido en el Capítulo 1, Ejemplo 1.12:

		Jugador 2	
		Cara	Cruz
Jugador 1	Cara	1, −1	−1, 1
	Cruz	−1, 1	1, −1

al jugador 1 le conviene, en respuesta a cualquiera de las estrategias puras del otro, jugar la misma estrategia. Sin embargo, al jugador 2 le conviene, en respuesta a cualquiera de las estrategias puras del otro, jugar la estrategia contraria. Por tanto, las correspondencias de respuesta óptima son:

para el jugador 1:

$R_1(s_2) = s_2, \forall s_2 \in \{Cara, Cruz\}$, es decir, $R_1(Cara) = Cara$ y $R_1(Cruz) = Cruz$

para el jugador 2:

$R_2(s_1) = t_1 \neq s_1, \forall s_1 \in \{Cara, Cruz\}$, es decir, $R_2(Cara) = Cruz$ y $R_2(Cruz) = Cara$

Por tanto, no existen perfiles de estrategias puras en los que cada una de ellas sea respuesta óptima a la otra. En consecuencia, no existe ningún EN (en estrategias puras). Es decir, $\mathbf{S}^{EN} = \varnothing$.

Algunos comentarios adicionales sobre el significado del equilibrio de Nash

Si analizamos detenidamente la definición de equilibro de Nash, veremos que incluye dos requisitos indispensables:

1. Cada jugador debe jugar una respuesta óptima ante una conjetura (o creencia) relativa al comportamiento del resto de jugadores.
2. Las conjeturas de cada jugador sobre el comportamiento del resto de jugadores han de ser correctas (en el sentido de ser compartidas por todos los jugadores).

Dicho con otras palabras, el equilibrio de Nash requiere que la estrategia de cada jugador sea una respuesta que maximice los pagos de dicho jugador dadas las estrategias que conjeture o prediga que van a ser usadas por el resto de jugadores, y además que esas predicciones sean correctas.

El equilibrio de Nash ha de ser consistente en sus predicciones sobre la manera en que se jugará el juego, es decir, si todos los jugadores predicen que un determinado equilibrio de Nash va a ser jugado, entonces ningún jugador debe tener incentivos para jugar de un modo diferente, ningún jugador debe tener interés en desviarse de la predicción.

Así, sólo un perfil que sea equilibrio de Nash tiene la propiedad de que los jugadores pueden predecirlo, de predecir que el resto de jugadores lo predecirán, etc. Por el contrario, una predicción sobre cualquier perfil que no sea EN implica que al menos un jugador tomará una decisión diferente a la prevista, ya sea porque no está de acuerdo con la predicción hecha sobre el juego del resto de jugadores o bien (dadas esas predicciones) porque no se estaban optimizando sus pagos.

Kreps (1994 y 1995) considera el equilibrio de Nash como una condición necesaria para la existencia de un modo evidente de jugar el juego, si bien se puede ver enormemente entorpecida cuando nos encontramos con una multiplicidad de equilibrios (por ejemplo, la batalla de los sexos o el juego Halcón-Paloma en que $V/2 < C$), pues en ese caso no es tan evidente cuál es la solución del juego, siendo necesario apelar a una condición más fuerte (un refinamiento) para poder determinar ese modo evidente de jugar. Otro tipo de situación problemática se da en aquellos casos, como el juego de las monedas, en que no existe ningún equilibrio de Nash.

Relación entre el equilibrio de Nash y los anteriores conceptos de solución

Los teoremas siguientes nos vienen a decir, grosso modo, que el nuevo concepto de solución, el equilibrio de Nash, es una generalización del uso de estrategias dominantes y una especialización o refinamiento de la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas. Por otra parte, establecen una cierta relación, pero no de generalización ni de especialización, con la eliminación iterativa de estrategias débilmente dominadas.

Teorema 2.4

Sea $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ un juego finito o infinito, y $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ un perfil de estrategias.

Si s^* está constituido por estrategias dominantes, entonces es un equilibrio de Nash (aunque no necesariamente el único).

Demostración:

Si las estrategias de $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ son dominantes, cualquiera de ellas s_i^* es respuesta óptima, por parte del correspondiente jugador i, a cualquier combinación de estrategias que pudieran jugar los otros jugadores, y en particular es respuesta óptima a s_{-i}^*, y por tanto s^* es un EN. El siguiente contraejemplo muestra que tal equilibrio de Nash no es necesariamente único.

Juego 2.9

		Jugador J2	
		I	D
Jugador J1	A	2, 1	1, 0
	B	1, 1	1, 1

En este juego las estrategias A de J1 e I de J2 son dominantes, pero hay dos EN, el perfil (A, I) y el (B, D), lo cual demuestra que el equilibrio en estrategias dominantes no es necesariamente el único equilibrio de Nash del juego. Obsérvese además que el perfil (B, D) es un EN cuyas estrategias constituyentes son todas débilmente dominadas.

Si el perfil s^* está constituido por estrategias dominantes, recibe el nombre de **equilibrio en estrategias dominantes**. El teorema anterior nos permite asegurar que el equilibrio de Nash es un concepto de solución que generaliza el de uso de estrategias dominantes.

Teorema 2.5

Sea $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ un juego finito, y $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ un perfil de estrategias.

a) Si s^* forma un equilibrio de Nash, las estrategias que lo constituyen sobreviven al proceso de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas (aunque no necesariamente al proceso de eliminación iterativa de estrategias débilmente dominadas).

b) Si s^* está constituido por las únicas estrategias que sobreviven al proceso de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas, dicho perfil s^* es el único equilibrio de Nash del juego.

Demostración:

a) Sea $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ un EN. Para todo jugador i, la estrategia s_i^* es respuesta óptima a la combinación $s_{-i}^* = (s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$, y por tanto sólo podría ser eliminada en una etapa del proceso de eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas, si alguna de las estrategias s_{-i}^* ha sido eliminada en una etapa anterior. En consecuencia, ninguna estrategia de s^*, ni ningún grupo de ellas, puede ser la primera en ser eliminada. Luego ninguna puede ser eliminada, es decir, todas sobreviven al proceso de eliminación.

Sin embargo, en el Juego 2.9 el perfil (B, D) es un EN cuyas estrategias constituyentes son todas débilmente dominadas, y por tanto ninguna sobrevive al proceso de eliminación iterada de estrategias débilmente dominadas.

b) Sea $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ el único perfil que sobrevive al proceso de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas. Supongamos que no es EN, e intentemos deducir de ello una contradicción.

Si s^* no es EN, existe al menos una estrategia s_i^* que no es respuesta óptima a la combinación de estrategias s_{-i}^*. Sea s_i' una estrategia del jugador i, distinta de s_i^*, que sí es respuesta óptima a s_{-i}^*. En ese caso ha tenido que ser eliminada en etapas anteriores pues s_i^* ha sido la única superviviente de i. Pero es imposible que s_i' haya sido eliminada en etapas anteriores, pues ninguna estrategia de i la dominaría estrictamente estando presentes las estrategias en s_{-i}^* de los demás jugadores, que han sobrevivido hasta el final.

La Figura 2.3 da una idea de las relaciones de inclusión entre los conjuntos de perfiles correspondientes a los conceptos de solución estudiados.

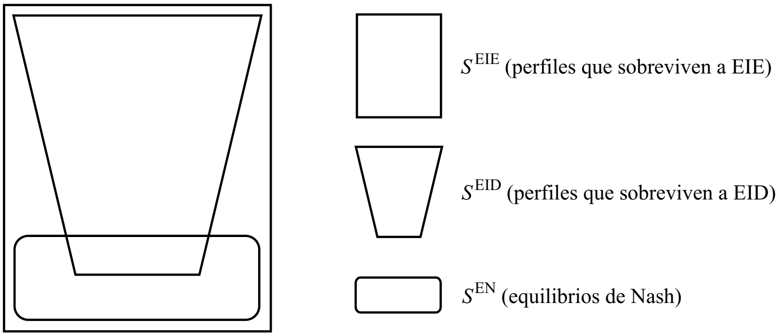


Figura 2.3 Relaciones de inclusión.

El siguiente ejemplo permite asimismo ilustrar y verificar los teoremas anteriores.

Ejemplo 2.29

En algunos juegos, como el dilema del prisionero, el conjunto de los EN coincide con el conjunto de los perfiles que sobreviven a EIE, mientras que en otros, como la batalla de los sexos y el juego de votación por mayoría, el conjunto de los EN está estrictamente contenido en el conjunto de los perfiles que sobreviven a EIE.

Sin embargo, en el juego de votación por mayoría el conjunto de los EN contiene estrictamente, para el proceso estándar, al conjunto de los perfiles que sobreviven a EID, conjunto que para dicho proceso está formado únicamente por (A, C, C).

Aunque los teoremas anteriores se han enunciado para juegos finitos, los procesos de eliminación iterativa EIE y EID también son aplicables a juegos infinitos. El siguiente ejemplo nos muestra que el juego básico de Cournot es resoluble por dominación.

Ejemplo 2.30

En el juego básico de Cournot, en el cual los espacios de estrategias son $S_1 = S_2 = [0, 1]$, apliquemos el proceso EIE.

En una primera etapa, y para cualquier jugador i, podemos eliminar cualquier estrategia $q_i > 1/2$, ya que está estrictamente dominada por $q_i = 1/2$. Efectivamente, haciendo los cálculos para el jugador 1 sin perder generalidad,

$$u_1(q_1, q_2) = q_1(1 - q_1 - q_2)$$

es decreciente en el intervalo $(1/2, +\infty)$ ya que su derivada

$$\partial u_1(q_1, q_2)/\partial q_1 = 1 - 2q_1 - q_2$$

es estrictamente negativa. Por tanto, $u_1(1/2, q_2) > u_1(q_1, q_2)\ \forall q_2 \geqslant 0,\ \forall q_1 > 1/2$. Quedan, por tanto, los espacios de estrategias $S_1^1 = S_2^1 = [0, 1/2]$.

En una segunda etapa, y para cualquier jugador i, podemos eliminar cualquier estrategia $q_i < 1/4$, ya que está estrictamente dominada por $q_i = 1/4$. Efectivamente, haciendo los cálculos para el jugador 1 sin perder generalidad,

$$u_1(q_1, q_2) = q_1(1 - q_1 - q_2)$$

es creciente en el intervalo (0, 1/4) ya que su derivada $\partial u_1(q_1, q_2)/\partial q_1 = 1 - 2q_1 - q_2$ es estrictamente positiva por ser $q_2 \leqslant 1/2$. Por tanto,

$$u_1(1/4, q_2) > u_1(q_1, q_2), \ \forall q_2 \leqslant 1/2, \ \forall q_1 < 1/4$$

Quedan, por tanto, los espacios de estrategias $S_1^2 = S_2^2 = [1/4, 1/2]$.

En las sucesivas etapas, eliminaríamos de modo análogo, y alternativamente, las mitades derecha e izquierda del espacio de estrategias no dominadas vigente (en la tercera etapa, la porción a la derecha del punto medio del intervalo entre 1/4 y 1/2), y de ese modo nos iríamos quedando con intervalos $S_1^k = S_2^k$ cada vez más pequeños, de tal modo que un solo número, el 1/3, pertenece a todos ellos. Así pues, cualquier estrategia que no sea $q_1 = 1/3$, resultará eliminada en este proceso al cabo de un número finito de etapas.

Por tanto, el único perfil superviviente al proceso EIE es (1/3, 1/3).

Eficiencia de Pareto. Relación entre los equilibrios de Nash y la eficiencia de Pareto

Definición 2.9

Dado el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$,

a) Decimos que el perfil de estrategias $s = (s_1, s_2, ..., s_i, ..., s_n)$ **está dominado en el sentido de Pareto** por el perfil $s' = (s'_1, s'_2, ..., s'_i, ..., s'_n)$ si y sólo si la desigualdad $u_i(s'_1, ..., s'_n) \geqslant u_i(s_1, ..., s_n)$ se cumple para todo jugador i, y para alguno de ellos se cumple de modo estricto.

b) Decimos que el perfil de estrategias $s = (s_1, s_2, ..., s_i, ..., s_n)$ es un **óptimo de Pareto** (o que es **eficiente en sentido de Pareto**) si y sólo si no está dominado en el sentido de Pareto por ningún otro perfil. Diremos que es **ineficiente en el sentido de Pareto** si algún otro lo domina.

Es decir, si un perfil de estrategias es eficiente no se puede cambiar a ningún otro perfil, de modo que ningún jugador salga perdiendo y alguno salga ganando estrictamente.

Este concepto de dominación hace referencia a perfiles completos que aluden a todos los jugadores a la vez, mientras que el concepto de estrategia dominada se refería a cada jugador individual. Mientras la dominación de Pareto es un concepto de análisis de la eficiencia social, relevante para el grupo de jugadores como tal grupo, la dominación de estrategias es un concepto de análisis de la eficiencia individual, relevante para cada uno de los jugadores como agente individual. No es de extrañar, por tanto, que ambos conceptos resulten totalmente independientes, como se verá en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 2.31

De manera aparentemente sorprendente, en el dilema del prisionero, el único perfil constituido por estrategias no estrictamente dominadas (y por tanto el único EN), que es *(Confesar, Confesar)*, es ineficiente en el sentido de Pareto. Efectivamente, el perfil *(Callar, Callar)* lo domina en el sentido de Pareto.

Ejemplo 2.32

En la batalla de los sexos (Ejemplo 2.2) y en el juego de la mayor diferencia (Ejemplo 2.24), los perfiles eficientes en el sentido de Pareto coinciden con los EN.

En el juego de las peticiones de Nash (Ejemplo 2.3), todos los EN del juego a excepción del perfil (1, 1) son eficientes en el sentido de Pareto.

En el juego de la votación por mayoría (Ejemplo 2.6), todos los perfiles son óptimos de Pareto.

Algunos comentarios sobre cooperación y conflicto

El análisis del dilema del prisionero nos muestra una posible debilidad del concepto de solución EN (y también del resultante de la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas). El perfil propuesto como solución es ineficiente en el sentido de Pareto. Dicho de otro modo, ¿cómo van a jugar *(Confesar, Confesar)* tal como prescribe la solución EN, si jugando *(Callar, Callar)* consiguen ambos un pago mayor?

La clave para entender esta aparente paradoja estriba en comprender que el resultado *(Callar, Callar)* es el apropiado desde el punto de vista social, es decir, del conjunto de los jugadores, mientras que el perfil *(Confesar, Confesar)* es el apropiado desde el punto de vista individual.

Hay quien se sorprende de esta contradicción entre lo individual y lo social, pero este sencillo juego pone de manifiesto que tal contradicción existe.

Y bien, ¿cuál es el resultado predecible del juego si dos personas lo juegan efectivamente en la práctica? La respuesta depende del contexto particular. Supongamos que el contexto es lo más parecido posible al del modelo matemático al que llamamos «Dilema del Prisionero», es decir, que se juega una sola vez y ambos jugadores lo saben, que no pueden comunicarse antes de decidir su jugada y que ambos son racionales (saben razonar y se preocupan sólo por su propio pago). En nuestra opinión, el resultado predecible sería el perfil EN. Sin embargo, bastaría modificar alguna de las suposiciones anteriores para que ganara posibilidades el resultado cooperativo. En particular, si lo jugaran un padre y un hijo (ambos típicos, no raros), el resultado predecible sería *(Callar, Callar)*.

Otros comentarios sobre el concepto de solución EN

La idea de proponer el concepto de EN como solución de un juego tiene una ventaja y un inconveniente con respecto a los conceptos de solución anteriores. La ventaja reside en que es más resolutivo, pues el conjunto de los perfiles EN es un subconjunto (a veces muy pequeño) del conjunto de los perfiles que sobreviven a la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas. El inconveniente es que se pierde seguridad al proponer como razonable que el resultado del juego va a coincidir con algún EN.

En efecto, prever que ninguno de los jugadores va a jugar una estrategia que resulte eliminable en el proceso de eliminación EIE es, si se cumplen las hipótesis adecuadas sobre racionalidad y conocimiento, una cuestión evidente, de sentido común. Sin embargo, aun bajo esas mismas hipótesis, prever que se va a jugar un EN no es en absoluto evidente.

Por ejemplo, suponer que en el juego de la batalla de los sexos se va a jugar o bien (Cine, Cine) o bien (Fútbol, Fútbol), requiere no sólo que ambos jugadores sean racionales y lo sepan. Requiere además que se produzca un proceso de coordinación de expectativas (ella piensa «espero que él vaya al fútbol, luego a mí me interesa ir al fútbol», mientras él piensa «espero que ella vaya al fútbol, luego a mí me interesa ir al fútbol») que no tiene por qué producirse en principio.

Pero a pesar de todo, un perfil que es EN es «algo más» que un perfil que no es EN. Cabe pensar varios contextos en los que un resultado EN es más probable que uno que no lo sea. Por ejemplo:

a) Cuando un árbitro neutral informa a los jugadores por anticipado de las intenciones de los otros, y el resultado según dichas intenciones es un EN, dicha información adicional los anima a cumplir sus intenciones, refuerza sus propósitos iniciales.

En concreto, si un espectador honesto y respetado dijera a ambos jugadores de la batalla de los sexos que sabe que la otra persona tiene intención de ir al cine, lo más probable es que se jugara (Cine, Cine). Sin embargo, si les dijera a ambos jugadores que sabe que el varón tiene intención de ir al fútbol y la mujer tiene intención de ir al cine, ya no sería tan probable que se jugara (Fútbol, Cine), pues ambos se sentirían insatisfechos con el resultado previsto. Es esa propiedad mutuamente sostenible de las estrategias en los EN la que les distingue de otros perfiles.

b) Cuando varios jugadores ya han jugado varias veces a un juego y les toca jugar otra vez, es razonable prever lo siguiente: si la última vez jugaron un EN, volverán a jugarlo, porque cada jugador piensa que si los demás repiten a él también le conviene repetir. Pero si la última vez jugaron un perfil que no es EN, no lo repetirán, porque algún jugador va a pensar que si los demás repiten a él **no** le conviene repetir. De este modo, es razonable pensar que los perfiles EN tienen un plus de predecibilidad a largo plazo del que carecen los otros perfiles.

2.5. APLICACIONES: EL OLIGOPOLIO DE COURNOT

Una de las aplicaciones más fructíferas de la teoría de juegos es la relativa al estudio de la organización industrial en entornos con un número de agentes no muy grande, en particular el estudio de modelos de mercado con un número reducido de empresas. Los modelos de duopolio constituyen una aplicación pionera de este tipo.

Cournot fue uno de los precursores de la teoría de juegos. En un trabajo realizado en 1838 propuso lo que ahora se llama el modelo clásico de Cournot, en el que un pequeño número de empresas compiten en el mercado de un producto homogéneo, decidiendo simultáneamente qué cantidades de producción van a aportar al mercado, y el precio de mercado queda determinado por la cantidad total aportada de acuerdo con la función de demanda inversa. Aunque el mecanismo mediante el cual se vacía el mercado vendiendo toda la producción aportada no se especifica, es útil imaginar una subasta entre compradores de la producción total. Al equilibrio resultante de ese modelo se le ha llamado tradicionalmente el equilibrio de Cournot, y se llama a veces equilibrio de Cournot-Nash para indicar que se trata del equilibrio de Nash del juego definido por el modelo de Cournot.

Duopolio de Cournot. Modelo simplificado

En un mercado hay sólo dos empresas, $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$, que fabrican un determinado producto homogéneo y compiten en cantidades. Sean q_1 y q_2 las cantidaes que producen $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$**,** respectivamente. Supongamos que la función de demanda inversa es decreciente y lineal en el intervalo $[0, a/b]$, que los costes marginales de cada empresa son constantes, menores que a e iguales para ambas, sin que haya costes fijos, y que en dicho mercado se vende toda la cantidad producida. En concreto, sea la función de demanda inversa:

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & \text{si} \quad bQ < a \\ 0 & \text{si} \quad bQ \geqslant a \end{cases} \quad (\text{donde } b > 0 \text{ y } Q = q_1 + q_2)$$

y sean las funciones de costes:

$$C_1(q_1) = cq_1, \qquad C_2(q_2) = cq_2 \quad \text{donde} \quad c < a$$

Los beneficios serán, por tanto:

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2) - cq_1 = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c)$$
$$\pi_2(q_1, q_2) = q_2(a - bq_1 - bq_2) - cq_2 = q_2(a - bq_1 - bq_2 - c)$$

Resumiendo, este juego tiene dos jugadores, $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$, con espacios de estrategias $S_1 = S_2 = [0, a/b]$, y con funciones de pagos o ganancias, suponiendo que las utilidades coincidan con los beneficios (es decir, que se trate de jugadores con utilidades de VN-M, y neutrales al riesgo):

$$u_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c)$$
$$u_2(q_1, q_2) = q_2(a - bq_1 - bq_2 - c)$$

Cálculo del Equilibrio de Nash

La respuesta óptima de $\mathbf{E_1}$ a una acción cualquiera, prefijada, q_2 de $\mathbf{E_2}$, se obtiene resolviendo:

$$\max_{q_1} \ u_1(q_1, \ q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c)$$
$$\text{sujeto a: } 0 \leqslant q_1 \leqslant a/b$$

Supongamos que la solución es interior, es decir, la suma $q_1^* + q_2$ pertenece al intervalo abierto $(0, a/b)$.

La condición de primer orden es

$$\partial u_1(q_1, q_2)/\partial q_1 = q_1(-b) + (a - bq_1 - bq_2 - c) = 0; \qquad q_1 = \frac{a - c - bq_2}{2b}$$

Y la condición de segundo orden es $\partial^2 u_1(q_1, q_2)/\partial q_1^2 = -2b < 0$ (condición suficiente de máximo).

Así pues, la correspondencia de respuesta óptima, o función de reacción, de $\mathbf{E_1}$ es:

$$R_1(q_2) = \frac{a - c - bq_2}{2b}$$

Análogamente, la respuesta óptima de $\mathbf{E_2}$ a una acción cualquiera, q_1 de $\mathbf{E_1}$, se obtiene resolviendo:

$$\begin{aligned} &\max_{q_2} \ u_2(q_1, \ q_2) = q_2(a - bq_1 - bq_2 - c) \\ &\text{sujeto a}: \ 0 \leqslant q_2 \leqslant a/b \end{aligned}$$

Y razonando del mismo modo se deduce que la correspondencia de respuesta óptima, o función de reacción, de $\mathbf{E_2}$ es:

$$R_2(q_1) = \frac{a - c - bq_1}{2b}$$

Si (q_1^*, q_2^*) ha de ser EN, q_1^* será respuesta óptima a q_2^*, y q_2^* lo será de q_1^*, por tanto:

$$q_1^* = \frac{a - c - bq_2^*}{2b}, \qquad q_2^* = \frac{a - c - bq_1^*}{2b}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior:

$$q_2^* = \frac{a - c - b\,\dfrac{a - c - bq_2^*}{2b}}{2b} = \frac{a - c + bq_2^*}{4b}; \qquad q_2^* = \frac{a - c}{3b}$$

Análogamente,

$$q_1^* = \frac{a - c}{3b}$$

En conclusión, el conjunto de los puntos de equilibrio es:

$$\mathbf{S}^{\text{EN}} = \left\{\left(q_1^* = \frac{a - c}{3b}, \qquad q_2^* = \frac{a - c}{3b}\right)\right\}$$

La cantidad total producida en equilibrio es $Q^* = 2\,\dfrac{a - c}{3b}$ y el precio en equilibrio es

$$P^* = a - bQ^* = \frac{a + 2c}{3}$$

Por otra parte, los beneficios en equilibrio son

$$u_1^* = u_1(q_1^*, q_2^*) = q_1^*\left(a - \frac{a-c}{3} - \frac{a-c}{3} - c\right) = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

y análogamente, $u_2^* = \dfrac{(a-c)^2}{9b}$ y en consecuencia, el beneficio total en equilibrio es $U^* = \dfrac{2(a-c)^2}{9b}$. En la Figura 2.4 puede verse una representación gráfica de las correspondencias de respuesta óptima y del equilibrio.

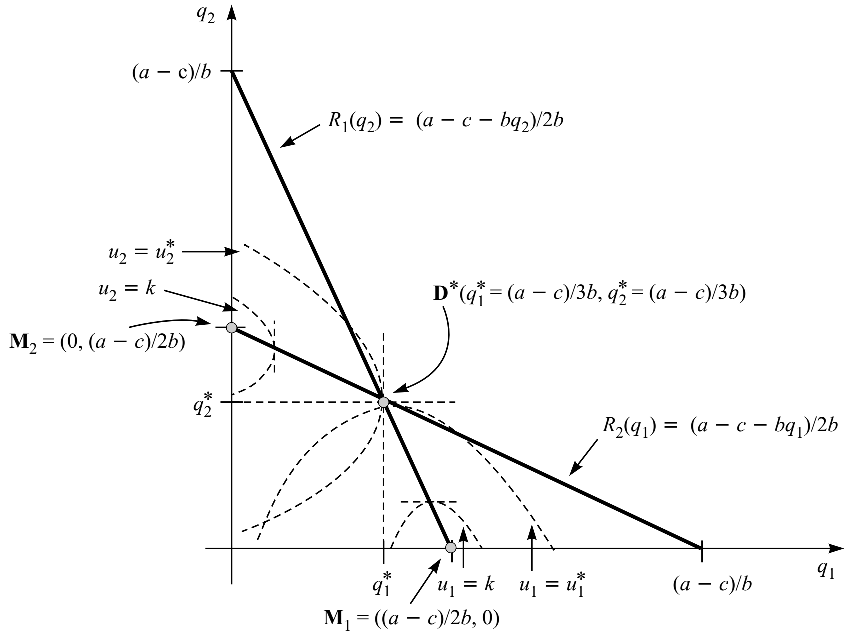


Figura 2.4 Correspondencias de respuesta óptima.

En la Figura 2.4, el punto **D*** corresponde al equilibrio de Nash, mientras que los puntos $\mathbf{M_1}$ y $\mathbf{M_2}$ podrían llamarse puntos de monopolio de cada empresa. En efecto, el punto $\mathbf{M_2}$, por ejemplo, corresponde al vector de cantidades $\left(0, \dfrac{a-c}{2b}\right)$ en que la empresa $\mathbf{E_2}$ responde óptimamente a la cantidad 0 de la empresa $\mathbf{E_1}$, es decir, actúa óptimamente si «se queda sola» en el mercado. Las curvas en trazo delgado discontinuo en dicha figura son curvas de isobeneficio de cada empresa. Obsérvese que dichas curvas isobeneficio corresponden a niveles de beneficio más altos conforme se contraen a los puntos $\mathbf{M_1}$ y $\mathbf{M_2}$. En efecto, el nivel de beneficio de la curva $u_1 = k$ de la figura es mayor que el de $u_1 = u_1^*$, porque dado un punto cualquiera $\mathrm{A}(q_1, q_2)$ de la primera, podemos encontrar un punto $\mathrm{A}'(q_1, q_2')$ de la segunda, donde $q_2' > q_2$, en el que la empresa $\mathbf{E_1}$ obtendría un beneficio menor que en A, ya que $\mathbf{E_1}$ produce lo mismo en ambos puntos, mientras que $\mathbf{E_2}$ produce más en A′ que en A. Obsérvese también que la curva de respuesta óptima o de reacción de cada empresa, pasa por los puntos máximos de las curvas isobeneficio de dicha empresa. La razón de ello puede visualizarse en el punto $\mathbf{D^*}(q_1^*, q_2^*)$, pues la empresa $\mathbf{E_1}$, para responder óptimamente a la cantidad q_2^* de $\mathbf{E_2}$, ha de elegir un punto (q_1, q_2^*) en la recta horizontal $q_2 = q_2^*$ situado en aquella curva de isobeneficio que corresponda a un nivel de beneficios máximo, y eso sólo lo consigue eligiendo $\mathbf{D^*}$, que es el punto de tangencia de una de dichas curvas con esa recta horizontal.

Oligopolio de Cournot. Modelo simplificado

Extendamos al caso de n empresas $\mathbf{E_1, E_2, ..., E_n}$, el modelo simplificado anterior. Sea q_i la cantidad que produce la empresa $\mathbf{E_i}$ para $i = 1, 2, ..., n$. Supongamos ahora que la función de demanda inversa es:

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & \text{si} \quad bQ < a \\ 0 & \text{si} \quad bQ \geqslant a \end{cases} \quad (\text{donde } b > 0 \text{ y } Q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n)$$

y las funciones de costes son

$$C_i(q_i) = cq_i, \quad \text{donde} \quad c < a, \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

Por tanto, las funciones de ganancias serán:

$$u_i(q_1, q_2, ..., q_n) = q_i \cdot P(q_i + Q_{-i}) - C_i(q_i) = q_i(a - b(q_i + Q_{-i}) - c) \qquad [2.1]$$

donde $Q_{-i} = q_1 + \cdots + q_{i-1} + q_{i+1} + \cdots + q_n$, $\forall i \in \{1, 2,..., n\}$.

Cálculo del equilibrio de Nash

La respuesta óptima de una empresa cualquiera dada $\mathbf{E_i}$ a una combinación cualquiera de acciones prefijada, $q_{-i} = (q_1, ..., q_{i-1}, q_{i+1}, ..., q_n)$ del resto de las empresas, se obtendrá resolviendo:

$$\begin{aligned} &\max_{q_i} \ u_i(q_1, \ ..., \ q_i, \ ..., \ q_n) = q_i(a - b(q_i + Q_{-i}) - c) \\ &\text{sujeto a}: \ 0 \leqslant q_i \leqslant a/b \end{aligned}$$

Supongamos, como anteriormente, que la solución es interior. Derivando en [2.1] e igualando a cero, tendremos:

que la condición de primer orden es

$$\partial u_i(q_i, q_{-i})/\partial q_i = P(q_i + Q_{-i}) - \partial C_i(q_i)/\partial q_i + q_i \partial P(q_i + Q_{-i})/\partial q_i = 0 \qquad [2.2]$$

que se concreta en

$$\begin{aligned} &a - b(q_i + Q_{-i}) - c + q_i(-b) = 0; \\ &a - 2bq_i - bQ_{-i} - c = 0 \qquad [2.3] \end{aligned}$$

Y la condición de segundo orden es $\partial^2 u_i(q_i, q_{-i})/\partial q_i^2 = -2b < 0$ (condición suficiente de máximo).

Merece la pena observar que la expresión [2.2] de la condición de primer orden tiene una interpretación interesante. La resta de los dos primeros términos del primer miembro, $P(q_i + Q_{-i}) - \partial C_i(q_i)/\partial q_i$, es la rentabilidad directa para la empresa $\mathbf{E}_i$ de producir una unidad adicional, mientras que el tercer término, $q_i \partial P(q_i + Q_{-i})/\partial q_i$, es el efecto (negativo) que esa unidad adicional causa en la rentabilidad de las unidades ya producidas por $\mathbf{E}_i$. Así pues, al producir una unidad más, la empresa compensa exactamente con dicha rentabilidad positiva directa la rentabilidad negativa indirectamente ocasionada. Por otra parte, el hecho de que $\mathbf{E}_i$ compense mediante su rentabilidad positiva directa únicamente el efecto negativo que a ella le causa dicha producción adicional, $q_i(\partial P(q_i + Q_{-i})/\partial q_i)$, en lugar de compensar el efecto negativo causado a toda la industria, $(q_i + Q_{-i})(\partial P(q_i + Q_{-i})/\partial q_i)$, pone de manifiesto la externalidad negativa creada entre las empresas al decidir su producción.

También puede hacerse la siguiente interpretación de la Ecuación [2.2]. La resta $P(q_i + Q_{-i}) - \partial C_i(q_i)/\partial q_i$ es el exceso del precio de mercado P con respecto al coste marginal de $\mathbf{E}_i$. Dicho exceso es proporcional a la cantidad q_i producida por $\mathbf{E}_i$, y el factor de proporcionalidad es $-\partial P(q_i + Q_{-i})/\partial q_i$, es decir, la pendiente cambiada de signo de la función inversa de demanda.

Volviendo al cálculo del equilibrio, $(q_1^*, ..., q_i^*, ... , q_n^*)$ es un equilibrio de Nash si cumple las n condiciones de primer orden:

$$a - 2bq_i^* - bQ_{-i}^* - c = 0, \ \forall i = 1, 2, ..., n$$

Teniendo en cuenta que, por razones de simetría, $q_i^* = q_j^*$, y por tanto $(n - 1)q_i^* = Q_{-i}^*$, obtenemos:

$$a - 2bq_i^* - b(n - 1)q_i^* - c = 0; \ b(n + 1)q_i^* = a - c;$$

$$q_i^* = \frac{a - c}{(n + 1)b}, \ \forall i = 1, 2, ..., n$$

En conclusión, hay un único equilibrio, que es

$$\left(q_1^* = \frac{a - c}{(n + 1)b}, ..., q_i^* = \frac{a - c}{(n + 1)b}, ..., q_n^* = \frac{a - c}{(n + 1)b}\right)$$

La cantidad total producida en equilibrio es $Q^* = n\,\dfrac{a - c}{(n + 1)b}$, el precio en equilibrio es $P^* = a - bQ^* = \dfrac{a + nc}{n + 1}$, los beneficios en equilibrio son:

$$u_i^* = q_i^*(a - b(q_i^* + Q_{-i}^*) - c) = q_i^*\left(a - n\,\frac{a - c}{n + 1} - c\right) = \frac{(a - c)^2}{(n + 1)^2 b}, \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

y el beneficio total en equilibrio es $U^* = u_1^* + \cdots + u_n^* = \dfrac{n(a - c)^2}{(n + 1)^2 b}$

Comparación de los resultados anteriores con los correspondientes a los casos de monopolio y de competencia perfecta en cantidades

Las dos situaciones hipotéticas extremas en cuanto al grado de competencia en el mercado del producto homogéneo considerado, y en las cuales no son literalmente aplicables los conceptos de equilibrio de la teoría de juegos, son la de monopolio y la de competencia perfecta. Veamos, no obstante, que los resultados que la microeconomía obtiene para ambas situaciones podrían obtenerse asimismo como casos particulares de los arriba obtenidos, mediante el equilibrio de Nash, para el caso de oligopolio.

Monopolio

Si hay una sola empresa produciendo ese bien homogéneo para ese mercado, no tenemos un verdadero juego, sino una situación de decisión individual. Dicha empresa tomará decisiones óptimas de producción, teniendo en cuenta que las condiciones de demanda en dicho mercado determinarán un precio al cual se vende toda la producción. Suponiendo las mismas condiciones de demanda y de costes, tendremos que:

la función de demanda inversa es:

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & \text{si} \quad bQ < a \\ 0 & \text{si} \quad bQ \geqslant a \end{cases} \quad \text{(donde } Q \text{ es la cantidad producida)}$$

La función de costes es:

$$C(Q) = cQ \quad \text{donde se supone} \quad c < a$$

Los beneficios o ganancias serán, por tanto:

$$U(Q) = \pi(Q) = Q(a - bQ) - cQ = Q(a - c - bQ)$$

Calculemos la decisión óptima del monopolio, que será producir la cantidad Q^* que maximiza $\pi(Q)$:

Condición de primer orden (suponiendo que el óptimo es interior):

$$\partial\pi(Q)/\partial Q = Q(-b) + (a - c - bQ) = 0; \qquad a - c - 2bQ = 0; \qquad Q = \frac{a - c}{2b}$$

Condición de segundo orden:

$$\partial^2\pi(Q)/\partial Q^2 = -2b < 0 \quad \text{(Máximo)}$$

Así pues, la cantidad producida óptima es $Q^* = \dfrac{a - c}{2b}$, que determina un precio $P^* = a - bQ^* = \dfrac{a + c}{2}$, obteniendo un beneficio máximo $U^* = \dfrac{(a - c)^2}{4b}$.

Competencia perfecta

Si hay muchas empresas, de tal modo que la cantidad producida por cada una de ellas tiene un peso insignificante en la cantidad producida agregada, y por tanto no afecta al precio determinado por la igualdad entre la demanda y esa cantidad agregada (podríamos decir, para abreviar, que hay infinitas empresas pequeñas), cada empresa producirá una cantidad q_i^* que maximice sus beneficios supuesto fijo el precio. Sea P^* dicho precio, y sea la función de costes de cada empresa $C_i(q_i) = c_i q_i$. El problema de optimización de $\mathbf{E}_i$ es

$$\max \pi_i(q_i) = (P^* - c_i)q_i \quad \text{en la variable} \quad q_i$$

La única posibilidad que, siendo compatible con esta situación, tenga una cierta estabilidad, se produce cuando $P^* = c_i$. En efecto, la posibilidad $P^* < c_i$ implica beneficios negativos para la empresa $\mathbf{E}_i$ que obligarían a ésta a abandonar el mercado ($q_i^* = 0$), mientras que la posibilidad $P^* > c_i$ implica que la empresa $\mathbf{E}_i$ sólo consigue acercarse a su cantidad óptima ($q_i^* = +\infty$) produciendo cantidades tan grandes que contradicen su supuesta insignificancia. Por tanto, $P^* = c_i$ para cualquier empresa.

Suponiendo las mismas condiciones de demanda y de costes que en los modelos anteriores, la función de demanda inversa es:

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & \text{si} \quad bQ < a \\ 0 & \text{si} \quad bQ \geqslant a \end{cases} \quad \text{(donde } Q \text{ es la cantidad total producida)}$$

y la función de costes de cada empresa es $C_i(q_i) = cq_i$ (donde $c < a$). Así pues, tendríamos el precio de equilibrio $P^* = c$, la cantidad total de equilibrio $Q^* = \dfrac{a-c}{b}$ (puesto que $P(Q^*) = a - b\dfrac{a-c}{b} = c$), y una ganancia global en equilibrio nula. Resumiendo, cada empresa producirá una cantidad tal que su coste marginal iguale a P^*, obteniendo así un beneficio neto nulo, y la suma Q^* de las cantidades así producidas va a ser precisamente aquella que determina, a través de la función de demanda inversa, el precio P^* que vacía el mercado.

Características de los EN según el número de empresas

Merece la pena que nos hagamos la siguiente pregunta: ¿los resultados en cantidades, precios y ganancias que acabamos de obtener para el caso de monopolio y de competencia perfecta, podrán encontrarse como los casos particulares en que $n = 1$ y $n = \infty$, respectivamente, de los equilibrios de Nash deducidos para el oligopolio de Cournot con n empresas? En la Tabla 2.1 se demuestra que la respuesta es afirmativa, al dar las características del equilibrio según los valores de n.

Vemos en la Tabla 2.1 que cuanto mayor es el número de empresas (intensificando así la competencia en este mercado), menor es el beneficio total de éstas y mayor es, en consecuencia, el excedente del consumidor. Obsérvese que en un oligopolio de Cournot con n empresas, el equilibrio de Nash, donde cada empresa produce $q_i^* = \dfrac{a-c}{(n+1)b}$

Tabla 2.1 Resultados de equilibrio, según el número de empresas.

	Monopolio ($n = 1$)	**Duopolio ($n = 2$)**	**Oligopolio (n cualquiera)**	**Competencia perfecta ($n = \infty$)**
Producción individual	$q_i^* = \dfrac{a-c}{2b}$	$q_i^* = \dfrac{a-c}{3b}$	$q_i^* = \dfrac{a-c}{(n+1)b}$	
Producción total	$Q^* = \dfrac{a-c}{2b}$	$Q^* = 2\,\dfrac{a-c}{3b}$	$Q^* = n\,\dfrac{a-c}{(n+1)b}$	$Q^* = \dfrac{a-c}{b}$
Precio	$P^* = \dfrac{a+c}{2}$	$P^* = \dfrac{a+2c}{3}$	$P^* = \dfrac{a+nc}{n+1}$	$P^* = c$
Beneficio individual	$u_i^* = \dfrac{(a-c)^2}{2^2b}$	$u_i^* = \dfrac{(a-c)^2}{3^2b}$	$u_i^* = \dfrac{(a-c)^2}{(n+1)^2b}$	$u_i^* = 0$
Beneficio total	$U^* = \dfrac{(a-c)^2}{2^2b}$	$U^* = \dfrac{2(a-c)^2}{3^2b}$	$U^* = \dfrac{n(a-c)^2}{(n+1)^2b}$	$U^* = 0$
Excedente del consumidor	$E^* = \dfrac{(a-c)^2}{2\cdot 2^2b}$	$E^* = \dfrac{2^2(a-c)^2}{2\cdot 3^2b}$	$E^* = \dfrac{n^2(a-c)^2}{2\cdot(n+1)^2b}$	$E^* = \dfrac{(a-c)^2}{2b}$

y obtiene una ganancia $u_i^* = \dfrac{(a-c)^2}{(n+1)^2b}$, no es un óptimo de Pareto. Dicho óptimo (desde el punto de vista de la industria, sin considerar a los consumidores) se conseguiría por colusión simulando un monopolio, de modo que cada empresa produjera $q_i^* = \dfrac{a-c}{2nb}$ y obtuviera una ganancia $u_i^* = \dfrac{(a-c)^2}{2^2nb}$. Sin embargo, esta combinación estratégica no es equilibrio de Nash, porque cada empresa de modo individual tiene incentivos para aumentar su producción si prevé que las demás van a cumplir el acuerdo de colusión. En el caso particular del duopolio, las cantidades de equilibrio $q_1^* = q_2^* = \dfrac{a-c}{3b}$ constituyen el punto de equilibrio **D*** de la Figura 2.5 y les proporcionan unas ganancias $u_1^* = u_2^* = \dfrac{(a-c)^2}{9b}$, mientras que en un acuerdo colusivo las cantidades serían $q_1 = q_2 = q_{m/2}$, que constituyen el punto **M***, que Pareto-domina a **D*** al conseguirse allí las ganancias $u_1' = u_2' = \dfrac{(a-c)^2}{8b}$ (en realidad, todos los puntos de la región, sombreada en la figura, encerrada por las curvas de isobeneficio $u_1 = u_1^*$ y $u_2 = u_2^*$, corresponden a resultados que Pareto-dominan a **D***). Sin embargo, **M*** no es un equilibrio de Nash, ya que la respuesta óptima de $\mathbf{E_2}$ a la acción $q_1 = q_{m/2}$ de $\mathbf{E_1}$ no es $q_2 = q_{m/2}$, sino $q_2 = q_r > q_{m/2}$.

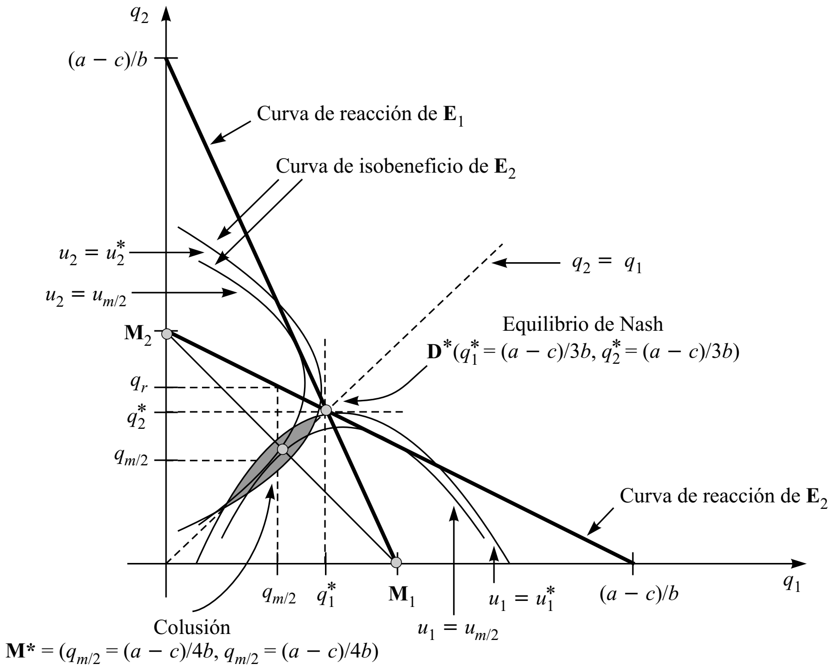


Figura 2.5 Ineficiencia del equilibrio en el duopolio de Cournot.

En la Figura 2.6 se ha representado la curva de demanda inversa $P(Q) = a - bQ$, situando sobre su gráfica los puntos (Q, P) correspondientes a las situaciones estudiadas: monopolio ($\mathbf{M}^*$), duopolio ($\mathbf{D}^*$), oligopolio con tres y con n empresas ($\mathbf{O}_3^*$ y $\mathbf{O}_n^*$) y el

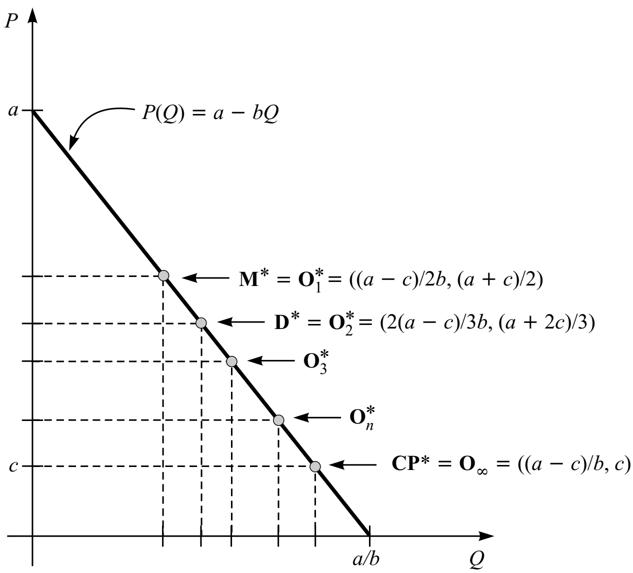


Figura 2.6 Cantidad y precio de equilibrio, según el número de empresas.

caso de competencia perfecta (**CP***). Se observa también aquí que conforme aumenta la competencia (a través del número de empresas), aumenta la cantidad total producida y disminuye el precio de mercado que esta cantidad determina. Dicho de otro modo, a medida que aumenta la competencia, el equilibrio va situándose sobre zonas cada vez más elásticas de la función de demanda.

Oligopolio de Cournot. Modelo general

Adoptemos ahora hipótesis más generales, pero relativamente simples, sobre las funciones de demanda y de costes, como por ejemplo que las funciones de costes de cada empresa sean crecientes y convexas, y que la función de demanda inversa sea estrictamente decreciente y cóncava. Concretando, supongamos ahora que existe un valor $Q_0 > 0$ de la cantidad total tal que:

$$P'(Q) < 0,\ P''(Q) \leqslant 0,\ \forall Q \in [0, Q_0), \quad \text{y} \quad P(Q) = 0,\ \forall Q \geqslant Q_0 \qquad [2.4]$$

$$C_i'(q_i) \geqslant 0 \quad \text{y} \quad C_i''(q_i) \geqslant 0,\ \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \qquad [2.5]$$

$$C_i(q_i) \text{ y } P(Q) \text{ son continuas en } [0, +\infty), \text{ y } C_i''(q_i) \text{ y } P''(Q) \text{ son continuas en } [0, Q_0) \qquad [2.6]$$

Sean $q_{-i} = (q_1, ..., q_{i-1}, q_{i+1}, ..., q_n)$ y $Q_{-i} = \sum_{j \neq i} q_j$. Las funciones de ganancias son

$$u_i(q_1, q_2, ..., q_n) = u_i(q_i, q_{-i}) = q_iP(Q) - C_i(q_i) = q_iP(q_i + Q_{-i}) - C_i(q_i) \qquad [2.7]$$

Cada una de estas funciones u_i es estrictamente cóncava en la región

$$A = \{(q_1, q_2, ..., q_n) \in \mathbf{R}^n \mid q_i > 0 \text{ y } \sum_j q_j \leqslant Q_0\}$$

con respecto a la variable q_i, ya que

$$\partial^2 u_i(q_i, q_{-i})/\partial q_i^2 = q_i P''(Q) + 2P'(Q) - C_i''(q_i) < 0$$

En la Figura 2.7, se muestra una gráfica de la función de ganancias u_i de la empresa $\mathbf{E}_i$, supuesto que el vector q_{-i} de las cantidades producidas por las otras empresas está dado, y su suma Q_{-i} es estrictamente menor que Q_0. Se observa que, para funciones típicas $P(Q)$ y $C_i(q_i)$ que cumplan estos supuestos, la función de ganancias tiene un máximo único en $R_i(Q_{-i})$.

Cálculo del equilibrio de Nash

Como antes, la respuesta óptima de una empresa cualquiera dada $\mathbf{E}_i$ a una combinación cualquiera de acciones prefijada, $q_{-i} = (q_1, ..., q_{i-1}, q_{i+1}, ..., q_n)$ del resto de las empresas, se obtendrá resolviendo:

$$\max\ u_i(q_1, q_2, ..., q_n) = q_i(P(Q)) - C_i(q_i) \text{ en la variable de decisión } q_i \qquad [2.8]$$

que tiene una solución única $q_i^* = R_i(Q_{-i})$, siempre que Q_{-i} sea menor que Q_0, por ser u_i estrictamente cóncava con respecto a la variable q_i. En general, aunque no siempre,

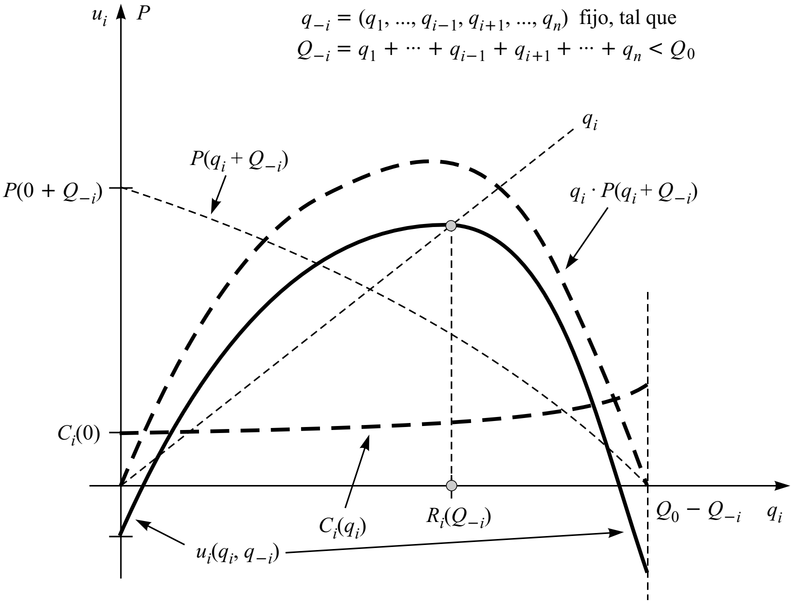


Figura 2.7

dicha solución q_i^* será interior, y en ese caso será solución (también única) de la condición de primer orden

$$\partial u_i(q_i, q_{-i})/\partial q_i = q_i P'(Q) + P(Q) - C_i'(q_i) = 0 \qquad [2.9]$$

Así pues, $(q_1^*, ..., q_i^*, ... , q_n^*)$ es un equilibrio de Nash si sus componentes son soluciones de los problemas de optimización [2.8]. En general, dichas soluciones son interiores y podremos decir que $(q_1^*, ..., q_i^*, ... , q_n^*)$ es un equilibrio de Nash si cumple las n condiciones de primer orden [2.9], o lo que es lo mismo, si

$$q_i^* = R_i(Q_{-i}^*) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

siendo $R_i(Q_{-i})$ las funciones de respuesta óptima implícitamente definidas en dichas condiciones de primer orden.

Observación 2.1:

La solución q_i^* que maximiza $u_i(q_1, q_2, ..., q_n) = q_i(P(Q)) - C_i(q_i)$, pertenece al interior del intervalo $[0, Q_0 - Q_{-i}]$ si, siendo Q_{-i} menor que Q_0, la función derivada $\partial u_i(q_i, q_{-i})/\partial q_i$ (que sabemos que es continua y estrictamente decreciente en q_i en dicho intervalo) es estrictamente positiva en $q_i = 0$, es decir, si

$$\partial u_i(0, q_{-i})/\partial q_i = P(Q_{-i}) - C_i'(0) > 0$$

En efecto, puesto que su valor en $q_i = Q_0 - Q_{-i}$ es

$$\partial u_i(Q_0 - Q_{-i}, q_{-i})/\partial q_i = (Q_0 - Q_{-i})P(Q_0) + P(Q_0) - C_i'(Q_0 - Q_{-i}) < 0$$

el teorema del valor intermedio permite asegurar que dicha función se anula en un punto interior (único) del intervalo $[0, Q_0 - Q_{-i}]$, y ese punto interior se convierte en la única solución del problema de maximización.

Veamos que la situación estudiada en el modelo simplificado (con funciones de demanda inversa y de costes lineales) es un caso particular de la considerada en este modelo más general.

En efecto, la función de demanda inversa era

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & \text{si} \quad bQ < a \\ 0 & \text{si} \quad bQ \geqslant a \end{cases} \quad (\text{donde } b > 0 \text{ y } Q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n)$$

que cumple, si definimos $Q_0 = a/b$,

$$P'(Q) = -b < 0 \quad \text{y} \quad P''(Q) = 0 \leqslant 0, \quad \forall Q \in [0, Q_0)$$

$$P(Q) = 0, \quad \forall Q \geqslant Q_0,$$

y además

$$P(Q) \text{ es continua en } [0, +\infty) \text{ y } P''(Q) \text{ es continua en } [0, Q_0)$$

Y por último, las funciones de costes eran

$$C_i(q_i) = cq_i, \quad \text{donde } c < a, \quad \forall\, i \in \{1, 2, ..., n\}$$

que cumplen

$$C_i'(q_i) = c \geqslant 0 \quad \text{y} \quad C_i''(q_i) = 0 \geqslant 0, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \text{ y además}$$

$$C_i(q_i) \text{ es continua en } [0, +\infty) \quad \text{y} \quad C_i''(q_i) \text{ es continua en } [0, Q_0), \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

Podría asegurarse la existencia y unicidad del equilibrio de Nash incluso con hipótesis más generales que las dadas anteriormente [2.4] a [2.7]. Por ejemplo, supongamos que existe un valor $Q_0 > 0$ de la cantidad total tal que:

$$P(Q) > 0 \quad \text{y} \quad P'(Q) < 0, \quad \forall Q \in [0, Q_0) \quad \text{y} \quad P(Q) = 0, \quad \forall Q \geqslant Q_0 \qquad [2.10]$$

$$\log(P) \text{ es cóncava en } [0, Q_0) \qquad [2.11]$$

$$C_i''(q_i) - P'(q_i + Q_{-i}) > 0 \text{ en } [0, Q_0), \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \qquad [2.12]$$

$$C_i(q_i) \text{ y } P(Q) \text{ son continuas en } [0, +\infty), \text{ y } C_i''(q_i) \text{ y } P''(Q) \text{ son continuas en } [0, Q_0) \qquad [2.13]$$

Las funciones de ganancias son

$$u_i(q_1, q_2, ..., q_n) = u_i(q_i, q_{-i}) = q_i \cdot P(Q) - C_i(q_i) = q_i \cdot P(q_i + Q_{-i}) - C_i(q_i) \qquad [2.14]$$

Pues bien, concluimos esta sección con un teorema de existencia y unicidad, que no demostramos, que hace uso de estas hipótesis. Véase, por ejemplo, Vives (2001) o Wolfstetter (2000) para un análisis exhaustivo de éste y otros modelos de oligopolio.

Teorema 2.6

En el oligopolio de Cournot, con funciones de ganancia $u_i(q_1, ..., q_n)$, de demanda inversa $P(Q)$ y de costes $C_i(q_i)$, cumpliendo las condiciones [2.10] a [2.14], existe un equilibrio de Nash en estrategias puras $(q_1^*, ..., q_i^*, ..., q_n^*)$ con cantidades q_i^* estrictamente positivas. Además, dicho equilibrio es único.

2.6. APLICACIONES: EL OLIGOPOLIO DE BERTRAND

Cuatro décadas después de la publicación del modelo clásico de Cournot, Bertrand propuso un nuevo modelo de oligopolio, que llamaremos modelo de Bertrand. En él las empresas compiten en precios y se comprometen a servir, al precio que ellas proponen, toda la cantidad que los consumidores demanden a dicho precio. Análogamente al caso del modelo de Cournot, el equilibrio de Bertrand es el equilibrio de Nash del juego definido por el modelo de Bertrand.

Duopolio de Bertrand. Modelo continuo en productos homogéneos

En un mercado hay sólo dos empresas maximizadoras de beneficios, $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$, que fabrican un determinado producto homogéneo y compiten en precios. Sea $q(p)$ la función de demanda de dicho producto, y supongamos que

- Los consumidores sólo compran a la empresa que establece un precio más bajo, o a ambas, en cantidades iguales, si los precios son iguales.
- La función $q(p)$ es estrictamente decreciente para precios entre 0 y p_C, y nula para precios iguales o superiores a p_C.
- Ambas empresas tienen la misma función de costes, sin costes fijos y con costes marginales constantes e iguales a c.
- Se cumple $0 < c < p_M < p_C$, donde p_M es el precio óptimo de monopolio, es decir, el precio que maximizaría el beneficio de una cualquiera de las empresas si la otra se retirase del mercado.

Concretemos los elementos del juego definido por las hipótesis anteriores. La demanda q_i a la que se enfrenta la empresa $\mathbf{E}_i$ está segmentada en función de si el precio al que vende el bien está por encima, por debajo o coincide con el precio de la rival:

$$q_i(p_i, p_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p_i > p_j \\ q(p_i) & \text{si} \quad p_i < p_j \\ \dfrac{q(p_i)}{2} & \text{si} \quad p_i = p_j \end{cases}$$

Las funciones de costes son

$$C_1(q_1) = cq_1, \qquad C_2(q_2) = cq_2$$

Los beneficios serán, por tanto:

$$u_i(p_i, p_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p_i > p_j \\ (p_i - c)q(p_i) & \text{si} \quad p_i < p_j \\ \dfrac{(p_i - c)q(p_i)}{2} & \text{si} \quad p_i = p_j \end{cases}$$

Resumiendo, este juego tiene dos jugadoras, $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$, con espacios de estrategias $S_1 = S_2 = [0, +\infty)$, y con funciones de ganancias $u_i(p_1, p_2)$ para $i = 1, 2$.

Cálculo del equilibrio de Nash

Vamos a demostrar que el único equilibrio de Nash de este juego es aquel en el que ambas empresas deciden un precio igual al coste marginal común. Es decir, EN = $\{(p_1^* = c, p_2^* = c)\}$.

Para este modelo, el equilibrio de Nash es un par de precios (p_i^*, p_j^*) tal que el precio de cada empresa es el que genera un mayor beneficio dado el precio de la otra empresa. Es decir,

$$u_i(p_i^*, p_j^*) \geqslant u_i(p_i, p_j^*), \ \forall i, j = 1, 2, \ \forall p_i \in S_i$$

Por otra parte, a diferencia de lo que ocurre en el modelo de Cournot con productos homogéneos, en éste la demanda a la que se enfrenta cada empresa es discontinua, lo que a su vez causa que las funciones de beneficios que obtenemos sean discontinuas, a pesar de que el conjunto de estrategias de cada empresa es un intervalo continuo. Esta discontinuidad de las funciones de beneficios va a impedir que podamos determinar el EN utilizando el cálculo diferencial tal y como hacíamos en el duopolio de Cournot para calcular las funciones de respuesta óptima. En consecuencia, tenemos que utilizar otro procedimiento para obtener ese único EN. Seguiremos la estrategia de razonamiento de Tirole (1990, pág. 320).

Una forma de demostrar que el único EN es aquel en el que ambas empresas deciden fijar un precio igual a su coste marginal, es considerar de un modo genérico todas las situaciones posibles y descartar aquellas que no cumplan nuestra definición (es decir, descartar aquellas situaciones en las que alguna empresa pudiera conseguir un beneficio mayor alterando la situación mediante el cambio de su precio). De un modo genérico, y dada la simetría del juego, podemos decir que las situaciones posibles en las que podrían encontrarse las empresas son las cuatro siguientes:

1. $p_j^* > p_i^* = c$ (el precio fijado por cada empresa es diferente y mientras una de ellas lo fija en el coste marginal la otra lo fija por encima).
2. $p_j^* > p_i^* > c$ (el precio fijado por cada empresa es diferente y además en ambos casos superior al coste marginal).
3. $p_j^* = p_i^* > c$ (precios iguales y superiores al coste marginal).
4. $p_j^* = p_i^* = c$ (precios iguales e iguales al coste marginal).

En realidad existen otras situaciones posibles. Por ejemplo, $c > p_j^* > p_i^*$ y $c > p_j^* = p_i^*$, en las que ambas empresas obtienen un beneficio negativo. No las consideraremos, porque usan estrategias dominadas. Por otra parte, no consideraremos precios superiores a p_C, pues complicaría el razonamiento sin afectar a los resultados. La Figura 2.8 representa la función de demanda de mercado y los beneficios que obtendría la empresa $\mathbf{E}_j$ en función de su precio p_j, en el caso de que se hiciera con todo el mercado (cosa que ocurrirá si $p_j < p_i$), bajo el supuesto de una demanda decreciente en $p \in (0, p_C)$. Dicha figura, en la que se dibuja una función de demanda lineal por razones de sencillez, podría ser útil para visualizar algunos de los razonamientos que siguen.

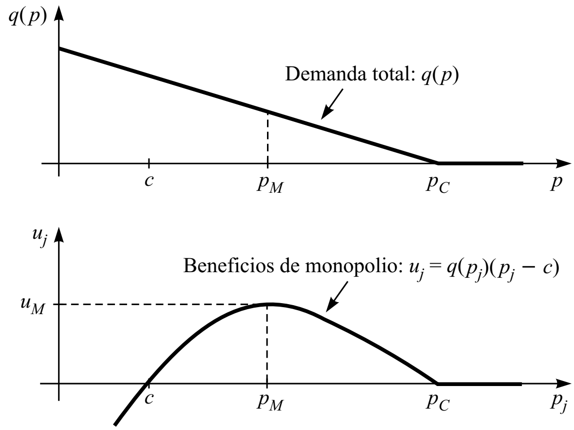


Figura 2.8 Función de demanda y función de beneficios de monopolio.

Comprobemos si alguna de estas cuatro situaciones es un equilibrio de Nash:

1. Supongamos $p_j^* > p_i^* = c$. Los beneficios de esta situación son:

$$u_i(p_i^*, p_j^*) = q(p_i^*)(p_i^* - c) = q(c)(c - c) = 0$$
$$u_j(p_i^*, p_j^*) = 0$$

Si la empresa $\mathbf{E}_i$ eligiera un precio superior a c pero inferior a p_j^*, por ejemplo, si $p_i' = p_j^* - \varepsilon > c$ tendríamos:

$$u_i(p_i', p_j^*) = q(p_i')\ (p_i' - c) > 0$$

Por tanto, la empresa $\mathbf{E}_i$ tiene incentivos para desviarse de la situación considerada, lo que significa que la situación $p_j^* > p_i^* = c$ no es un EN.

2. Supongamos $p_j^* > p_i^* > c$. Los beneficios de cada empresa son:

$$u_i(p_i^*, p_j^*) = q(p_i^*)(p_i^* - c) > 0$$
$$u_j(p_i^*, p_j^*) = 0$$

Dado que $p_j^* > p_i^*$, la empresa $\mathbf{E}_j$ no obtiene beneficios. Sin embargo, si dicha empresa reduce su precio fijándolo en $p_j' = p_i^* - \varepsilon > c$, obtiene

$$u_j(p_i^*, p_j') = q(p_j')(p_j' - c) = q(p_j')(\underbrace{p_i^* - \varepsilon}_{> c} - c) > 0$$

Así pues, la empresa $\mathbf{E}_j$ obtiene un beneficio positivo con esta nueva estrategia y, por tanto, esta situación no constituye un EN.

3. $p_j^* = p_i^* > c$. En este caso los beneficios que obtienen las empresas $\mathbf{E}_i$ y $\mathbf{E}_j$ son:

$$u_i(p_i^*, p_j^*) = q(p_i^*)(p_i^* - c)/2 > 0$$
$$u_j(p_i^*, p_j^*) = q(p_i^*)(p_j^* - c)/2 > 0$$

Ambas empresas se reparten el mercado y venden a un precio superior al coste marginal, por lo que ambas obtienen beneficios positivos. Sin embargo, esta situación no es un EN ya que si una de las empresas modifica su precio marginalmente a la baja, por ejemplo, $p_i' = p_i^* - \varepsilon < p_j^*$, siendo $p_i' > c$ (donde ε es un número estrictamente positivo, pero muy pequeño), encontramos que puede casi duplicar su beneficio:

$$u_i(p_i', p_j^*) = q(p_i^* - \varepsilon)(p_i^* - \varepsilon - c) \approx 2u_i(p_i^*, p_j^*) > u_i(p_i^*, p_j^*)$$

con lo cual, cualquiera de las dos empresas tiene incentivos para modificar su precio a la baja y por tanto, $p_j^* = p_i^* > c$ no es un perfil de precios que sea EN.

4. $p_j^* = p_i^* = c$. En este caso, ninguna de las empresas tiene incentivos para cambiar de precio, dado el precio de su rival, a pesar de que sus beneficios son nulos:

$$u_i(p_i^*, p_j^*) = 0$$
$$u_j(p_i^*, p_j^*) = 0$$

Cualquier modificación unilateral del precio por alguna de las empresas es incapaz de conseguir que el beneficio de ésta aumente. Efectivamente, si la empresa $\mathbf{E}_i$ fijara un precio inferior al coste marginal c su situación empeoraría, pues se apropiaría toda la demanda, pero obteniendo beneficios negativos, y si lo fijara por encima de c su situación no mejoraría, ya que se quedaría sin demanda.

En conclusión, **($p_1^* = c, p_2^* = c$) es el único equilibrio de Nash**.

Si razonáramos en términos de correspondencias de respuesta óptima, tendríamos:

- Si el precio p_i fijado por la empresa $\mathbf{E}_i$ es menor que c, cualquier respuesta $p_j > p_i$ de la empresa $\mathbf{E}_j$ es óptima (pues le proporciona un beneficio nulo, mientras que con las respuestas $p_j \leqslant p_i$ obtendría beneficios estrictamente negativos).
- Si el precio p_i fijado por la empresa $\mathbf{E}_i$ es igual a c, cualquier respuesta $p_j \geqslant c$ de la empresa $\mathbf{E}_j$ es óptima (pues le proporciona un beneficio nulo, mientras que con las respuestas $p_j < c$ obtendría beneficios estrictamente negativos).
- Si el precio p_i fijado por la empresa $\mathbf{E}_i$ es mayor que c, pero menor o igual que p_M, no existe una respuesta p_j de la empresa $\mathbf{E}_j$ que sea óptima. En efecto, conforme p_j aumenta acercándose a p_i, el beneficio de $\mathbf{E}_j$ aumenta acercándose al beneficio de monopolio correspondiente a p_i, que es igual a $q(p_i)(p_i - c)$, pero en $p_j = p_i$ salta discontinuamente a la mitad, y a cero, donde permanece para $p_j > p_i$. De ese modo se observa que, dado el precio del rival p_i, siempre es beneficioso elegir un precio ligeramente inferior, pero al no existir ningún valor p_j que sea menor que p_i y el más cercano a p_i (por ser p_j un número real), no existe respuesta óptima.
- Y si el precio p_i fijado por la empresa $\mathbf{E}_i$ es mayor que p_M, la respuesta $p_j = p_M$ de la empresa $\mathbf{E}_j$ es la única respuesta óptima (pues le proporciona el beneficio máximo posible u_M).

La Figura 2.9 representa, para los casos anteriores, los beneficios que obtendría la empresa $\mathbf{E}_j$ en función de su respuesta p_j al precio p_i fijado por la empresa $\mathbf{E}_i$.

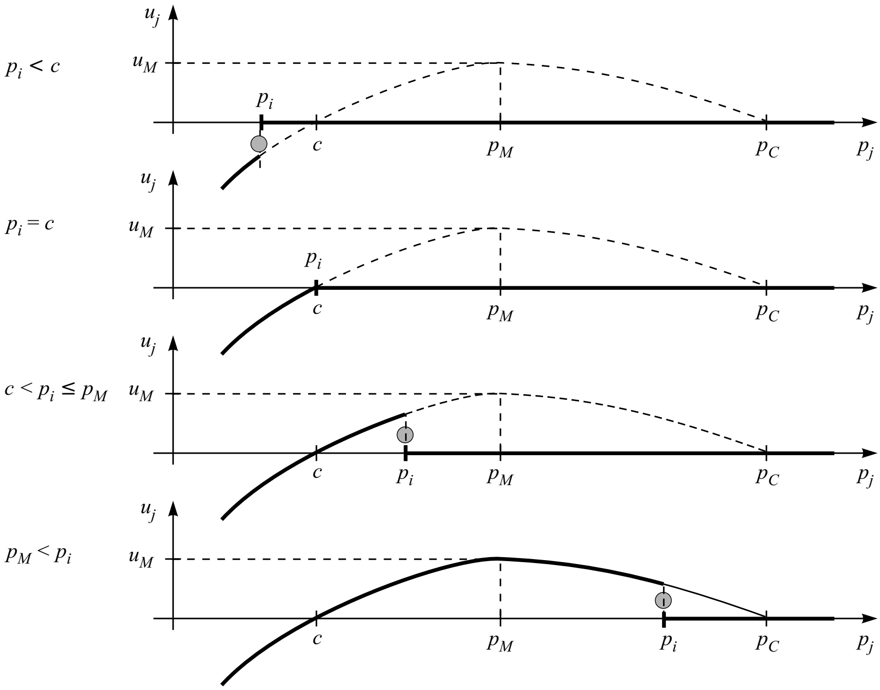


Figura 2.9 Beneficios de $\mathbf{E}_j$ en función de su respuesta p_j a p_i.

Merece la pena señalar que se trata de un equilibrio cuyas estrategias están débilmente dominadas. En efecto, para la empresa $\mathbf{E}_i$ su estrategia pura $\boldsymbol{p_i^*} = \boldsymbol{c}$ está débilmente dominada por cualquier estrategia $p_i > c$ tal que $q(p_i) > 0$, ya que esta nueva estrategia le reportaría un beneficio estrictamente positivo si $\mathbf{E}_j$ decidiera un precio $p_j \geqslant p_i$, y un beneficio nulo si $\mathbf{E}_j$ decidiera un precio $p_j < p_i$.

Tal como dice Varian (1992), el modelo de Bertrand puede concebirse como una subasta de venta de primer precio en sobre cerrado, donde cada una de las empresas presenta una puja en un sobre cerrado en la que se especifica el precio de venta y donde aquel postor con precio más bajo se queda con el mercado (como en las licitaciones públicas).

Duopolio de Bertrand. Modelo discreto en productos homogéneos

Al igual que en el caso anterior, sólo hay dos empresas maximizadoras de beneficios, $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$, que fabrican un determinado producto homogéneo y compiten en precios, $q(p)$ es la función de demanda de dicho producto, y se supone que:

a) Los consumidores sólo compran a la empresa que establece un precio más bajo, o a ambas, en cantidades iguales, si los precios son iguales.

b) $q(p)$ es estrictamente decreciente para precios entre 0 y p_C, y nula para precios iguales o superiores a p_C.

c) Ambas empresas tienen la misma función de costes, sin costes fijos y con costes marginales constantes e iguales a c, y además $0 < c < p_M < p_C$, donde p_M es el precio óptimo de monopolio, como en el caso continuo.

Sin embargo, ahora supondremos que el espacio de las estrategias puras es el siguiente conjunto discreto de precios: $A = \{0, p_m, 2p_m, 3p_m, ..., kp_m, ...\}$, donde p_m (interpretable como la unidad monetaria mínima) es positivo y muy pequeño, donde c, p_M y p_C pertenecen a A y donde $0 < p_m < c$.

En este modelo, el juego tiene dos jugadoras, $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$, con espacios de estrategias $S_1 = S_2 = A$, y con funciones de ganancias

$$u_i(p_i, p_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p_i > p_j \\ (p_i - c)q(p_i) & \text{si} \quad p_i < p_j \\ \dfrac{(p_i - c)q(p_i)}{2} & \text{si} \quad p_i = p_j \end{cases}, \quad \forall p_i, p_j \in A$$

Cálculo del equilibrio de Nash

Vamos a demostrar que este juego tiene **dos** equilibrios de Nash en estrategias puras, el equilibrio $(p_1^* = c, p_2^* = c)$ en el que ambas empresas deciden un precio igual al coste marginal común c, y el equilibrio $(p_1^* = c + p_m, p_2^* = c + p_m)$ en el que ambas empresas deciden un precio igual al coste marginal común c sumado con la unidad monetaria mínima p_m.

Las situaciones posibles a analizar en este caso, y no coincidentes con ninguno de los dos supuestos equilibrios de Nash, son las siguientes (al igual que hicimos en el caso anterior, no consideraremos precios estrictamente inferiores a c ni estrictamente superiores a p_C):

1. $p_j^* \geqslant p_i^* + 2p_m$ y $p_i^* = c$ (el precio fijado por cada empresa es diferente y mientras una de ellas lo fija en el coste marginal, la otra lo fija al menos dos unidades monetarias mínimas por encima). En esta situación la empresa $\mathbf{E}_i$ obtiene una ganancia nula, que aumentaría si eligiera un precio $p_i' = c + p_m$, ya que

$$u_i(p_i', p_j^*) = q(p_i')(p_i' - c) = q(p_i')(p_m) > 0$$

Por tanto, no es un EN.

2. $p_j^* = p_i^* + p_m$ y $p_i^* = c$ (el precio fijado por cada empresa es diferente y mientras una de ellas lo fija en el coste marginal, la otra lo fija en una unidad monetaria mínima por encima). En esta situación la empresa $\mathbf{E}_i$ obtiene una ganancia nula, que aumentaría si eligiera un precio $p_i' = c + p_m$, ya que

$$u_i(p_i', p_j^*) = q(p_i')(p_i' - c)/2 = q(p_i')(p_m)/2 > 0$$

Por tanto, no es un EN.

3. $p_j^* > p_i^* > c$ (el precio fijado por cada empresa es diferente y además en ambos casos superior al coste marginal). En esta situación la empresa $\mathbf{E}_j$ obtiene una ganancia nula, que aumentaría si eligiera un precio $p_j' = p_i^*$, igual al de su rival, ya que

$$u_j(p_i^*, p_j') = q(p_j')(p_j' - c)/2 > 0$$

Por tanto, no es un EN.

4. $p_j^* = p_i^* \geqslant c + 2p_m$ (precios iguales y superiores al coste marginal en al menos dos unidades monetarias mínimas). En esta situación la empresa $\mathbf{E}_i$ obtiene una ganancia positiva $u_i(p_i^*, p_i^*) = q(p_i^*)(p_j^* - c)/2 \geqslant q(p_i^*)(2p_m)/2 > 0$, pero ésta aumentaría si eligiera un precio $p_i' = p_i^* - p_m$, ya que

$$u_i(p_i', p_j^*) = q(p_i')(p_i' - c) = q(p_i^* - p_m)(p_i^* - p_m - c)$$

es mayor que

$$u_i(p_i^*, p_i^*) = q(p_i^*)(p_i^* - c)/2$$

debido a que p_m es muy pequeño por hipótesis. Por tanto, no es un EN.

Sólo nos queda ahora comprobar que las dos situaciones que quedan son equilibrios de Nash.

5. $p_j^* = p_i^* = c + p_m$ (precios iguales y superiores al coste marginal en una unidad monetaria mínima). En esta situación ambas empresas obtienen ganancias positivas

$$u_i(p_i^*, p_i^*) = u_j(p_i^*, p_i^*) = q(p_i^*)(p_i^* - c)/2 = q(c + p_m)(p_m)/2 > 0$$

y ninguna conseguiría aumentarlas modificando su precio. En efecto, si $\mathbf{E}_i$ aumentara su precio obtendría una ganancia nula (al perder toda la demanda), y si $\mathbf{E}_i$ disminuyera su precio hasta c obtendría también una ganancia nula (al vender a un precio igual a su coste marginal). Por tanto, $p_j^* = p_i^* = c + p_m$ **sí es un EN**.

6. $p_j^* = p_i^* = c$ (precios iguales e iguales al coste marginal). En esta situación ambas empresas obtienen ganancias nulas, pero ninguna conseguiría aumentarlas modificando su precio. En efecto, si $\mathbf{E}_i$ aumentara su precio obtendría una ganancia nula (al perder toda la demanda), y si $\mathbf{E}_i$ disminuyera su precio obtendría una ganancia negativa (al vender a un precio menor que su coste marginal). Por tanto, $p_j^* = p_i^* = c$ **también es un EN**.

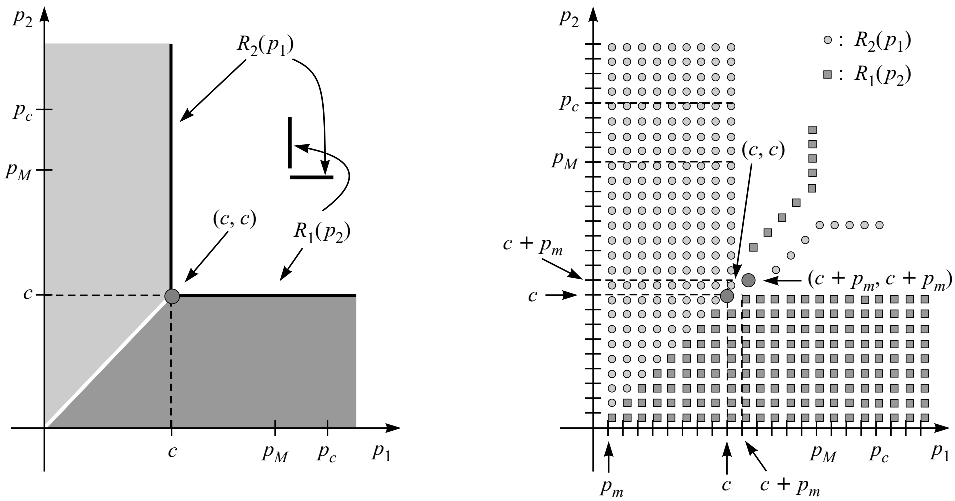
En conclusión, **los dos equilibrios de Nash en estrategias puras son** $(\boldsymbol{p_1^* = c, p_2^* = c})$ **y** $(\boldsymbol{p_1^* = c + p_m, p_2^* = c + p_m})$**.**

Si razonáramos en términos de correspondencias de respuesta óptima, tendríamos:

- Si el precio p_i fijado por la empresa $\mathbf{E}_i$ es menor que c, cualquier respuesta $p_j > p_i$ de la empresa $\mathbf{E}_j$ es óptima (pues le proporciona un beneficio nulo, mientras que con las respuestas $p_j \leqslant p_i$ obtendría beneficios estrictamente negativos).
- Si el precio p_i fijado por la empresa $\mathbf{E}_i$ es igual a c, cualquier respuesta $p_j \geqslant c$ de la empresa $\mathbf{E}_j$ es óptima (pues le proporciona un beneficio nulo, mientras que con las respuestas $p_j < c$ obtendría beneficios estrictamente negativos).

- Si el precio p_i fijado por la empresa $\mathbf{E}_i$ es igual a $c + p_m$, la respuesta $p_j = c + p_m$ de la empresa $\mathbf{E}_j$ es la única respuesta óptima.
- Si el precio p_i fijado por la empresa $\mathbf{E}_i$ es mayor que $c + p_m$, pero menor o igual que p_M, la única respuesta óptima de la empresa $\mathbf{E}_j$ es $p_j = p_i - p_m$.
- Y si el precio p_i fijado por la empresa $\mathbf{E}_i$ es mayor que p_M, la respuesta $p_j = p_M$ de la empresa $\mathbf{E}_j$ es la única respuesta óptima (pues le proporciona el beneficio máximo posible u_M).

En la Figura 2.10 puede verse una representación gráfica de las correspondencias de respuesta óptima y del equilibrio de Nash de los modelos continuo y discreto del duopolio de Bertrand.



(a) Modelo continuo de duopolio
$S^{EN} = \{(c, c)\}$

(b) Modelo discreto de duopolio
$S^{EN} = \{(c, c), (c + p_m, c + p_m)\}$

Figura 2.10 Modelos continuo y discreto del duopolio de Bertrand.

Oligopolio de Bertrand. Modelo continuo en productos homogéneos

Vamos a suponer ahora que hay n empresas maximizadoras de beneficios, $\mathbf{E_1}$, ..., $\mathbf{E_n}$, que fabrican un determinado producto homogéneo y compiten en precios, manteniendo inalteradas las hipótesis sobre precios factibles p_i, demanda $q(p)$ y costes C_i del modelo continuo del duopolio de Bertrand, y suponiendo que, en el caso en que haya varias empresas con el precio más bajo, la demanda se reparte entre ellas a partes iguales.

Concretando:

- $q(p)$ es continua en $[0, \infty)$, estrictamente decreciente en $[0, p_C]$ y nula en $[p_C, \infty)$. [2.15]
- $p_i \in [0, \infty), \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ [2.16]
- $C_i(q_i) = cq_i, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, donde $0 < c < p_C$ [2.17]

- Las funciones de ganancias son

$$u_i(p_1, ..., p_n) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad \exists\, p_j \text{ tal que } p_i > p_j \\ (p_i - c)q(p_i), & \text{si} \quad \forall\, p_j,\ p_i < p_j \\ \dfrac{(p_i - c)\cdot(p_i)}{k}, & \text{si} \quad \forall\, p_j,\, p_i \leqslant p_j, \text{ y para } k \text{ empresas } p_i = p_j \end{cases} \qquad [2.18]$$

Formalmente, se trata de un juego con n jugadoras, $\mathbf{E_1}$, ..., $\mathbf{E}_n$, con espacios de estrategias $S_i = [0, +\infty)$ $\forall\, i = 1, ..., n$, y con funciones de ganancias $u_i(p^1, p_2, ..., p_n)$ $\forall\, i = 1, ..., n$.

En este caso, podría demostrarse (pero no lo haremos) el siguiente teorema, mediante razonamientos análogos a los usados en el duopolio:

Teorema 2.7

En el oligopolio de Bertrand, con funciones de ganancia $u_i(p_1, ..., p_n)$, de demanda $q(p)$ y de costes $C_i(q_i)$, cumpliendo las condiciones [2.15] a [2.18]:

a) Los únicos equilibrios de Nash en estrategias puras son los perfiles de precios $(p_1^*, ..., p_i^*, ..., p_n^*)$ en los que todos los precios p_i^* son iguales o mayores que el coste marginal común c y al menos dos empresas tienen precio igual a c. Sólo están activas (en el sentido de producir una cantidad estrictamente positiva) en dichos equilibrios las empresas cuyo precio es c.

b) El único equilibrio de Nash en estrategias puras simétrico, es decir, en el que todas las estrategias de equilibrio son iguales, es $(p_1^* = c, p_2^* = c, ..., p_n^* = c)$.

Al igual que en el caso del duopolio, los equilibrios de Nash encontrados en este modelo resultan tener alguna estrategia débilmente dominada.

Merece la pena observar una característica que los modelos de Bertrand anteriores ponen de manifiesto, según la cual los resultados de la competencia en precios entre unas pocas empresas, cuando los productos son homogéneos, son mucho más favorables al consumidor (y duros con las empresas en competencia) que los resultados de la competencia en cantidades. En efecto, mientras que en el oligopolio de Cournot los precios de equilibrio se sitúan en una zona intermedia entre los de competencia perfecta y los de monopolio (estando los del duopolio de Cournot muy cerca de los correspondientes al caso del monopolio), en el oligopolio de Bertrand los precios de equilibrio son, incluso para dos empresas, los de competencia perfecta.

Sin embargo esta sorprendente característica no es robusta, pues basta que modifiquemos algún aspecto del modelo para que desaparezca. Si, por ejemplo, no todas las empresas tienen el mismo coste marginal c, o hay problemas de capacidad que impiden a la empresa con precio más bajo satisfacer toda la demanda, aparecen resultados de equilibrio en los que algunas empresas cargan precios por encima de sus costes marginales. También desaparece esa característica cuando el producto no es perfectamente homogéneo, como ocurre en el modelo que estudiaremos a continuación, el duopolio de Bertrand con productos diferenciados.

Duopolio de Bertrand con productos diferenciados. Modelo simplificado

En este modelo con dos empresas maximizadoras de beneficios, $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$, y que compiten en precios, supondremos que existen ciertas características de los bienes que éstas producen que los hacen diferentes a los ojos de los consumidores. En tal caso, podemos pensar intuitivamente que el producto de cada empresa es en cierto modo único, lo que le proporcionará a ésta un cierto poder de mercado sobre dicho producto, permitiéndole beneficiarse de dicho poder mediante un precio más alto que su coste marginal.

Concretando, supongamos que los precios p_1 y p_2 pertenecen a $[0, \infty)$, que las funciones de demanda de ambos productos dependen del vector de precios (p_1, p_2) del siguiente modo:

$$q_1(p_1, p_2) = a - p_1 + bp_2$$
$$q_2(p_1, p_2) = a - p_2 + bp_1$$

que las funciones de costes son

$$C_1(q_1) = cq_1$$
$$C_2(q_2) = cq_2$$

y que los parámetros a, b y c cumplen:

$$0 < c < a \quad \text{y} \quad 0 < b < 2$$

En este caso, los beneficios son:

$$u_1(p_1, p_2) = q_1(p_1, p_2)(p_1 - c) = (a - p_1 + bp_2)(p_1 - c)$$
$$u_2(p_1, p_2) = q_2(p_1, p_2)(p_2 - c) = (a - p_2 + bp_1)(p_2 - c)$$

Cálculo del equilibrio de Nash

Respuesta óptima de $\mathbf{E_1}$ a una acción cualquiera p_2 de $\mathbf{E_2}$:

Si $\mathbf{E_2}$ establece el precio p_2 para su producto, la respuesta óptima de $\mathbf{E_1}$ se obtiene resolviendo

$$\max u_1(p_1, p_2) = (a - p_1 + bp_2)(p_1 - c) \text{ en la variable de decisión } p_1$$

La condición de primer orden es

$$\partial u_1(p_1, p_2)/\partial p_1 = -(p_1 - c) + (a - p_1 + bp_2) = 0; \quad a + c - 2p_1 + bp_2 = 0;$$

$$p_1 = \frac{a + c + bp_2}{2}$$

y la condición de segundo orden es $\partial^2 u_1(p_1, p_2)/\partial p_1^2 = -2 < 0$ (condición suficiente de máximo). Así pues, la correspondencia de respuesta óptima, o función de reacción, de $\mathbf{E_1}$ es

$$R_1(p_2) = \frac{a + c + bp_2}{2}$$

Análogamente, obtendríamos la siguiente respuesta óptima de $\mathbf{E_2}$ a una acción cualquiera p_1 de $\mathbf{E_1}$:

$$R_2(p_1) = \frac{a + c + bp_1}{2}$$

Por tanto, (p_1^*, p_2^*) será EN si se cumple:

$$p_1^* = \frac{a + c + bp_2^*}{2}, \qquad p_2^* = \frac{a + c + bp_1^*}{2}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior:

$$p_1^* = \frac{a + c + b\ \dfrac{a + c + bp_1^*}{2}}{2} = \frac{(2 + b)a + (2 + b)c + b^2 p_1^*}{4}$$

de donde se deduce

$$p_1^* = \frac{(2 + b)a + (2 + b)c}{4 - b^2} = \frac{a + c}{2 - b}$$

y análogamente:

$$p_2^* = \frac{a + c}{2 - b}$$

En conclusión,

$$\mathbf{S}^{\text{EN}} = \left\{\left(p_1^* = \frac{a + c}{2 - b}, p_2^* = \frac{a + c}{2 - b}\right)\right\}$$

Las cantidades totales producidas en equilibrio son

$$q_2^* = q_1^* = q_1(p_1^*, p_2^*) = a - p_1{}^* + bp_2^* = a - \frac{a + c}{2 - b} + b\,\frac{a + c}{2 - b} = \frac{a + (b - 1)c}{2 - b}$$

y los beneficios en equilibrio son

$$u_2^* = u_1^* = u_1(p_1^*, p_2^*) = q_1^*(p_1^* - c) = \frac{a + (b - 1)c}{2 - b}\left(\frac{a + c}{2 - b} - c\right) = \frac{(a + (b - 1)c)^2}{(2 - b)^2}$$

Merece la pena analizar los resultados obtenidos al concretar los valores del parámetro b, que reflejan la sensibilidad de la demanda q_i del producto de $\mathbf{E}_i$ al precio p_j del producto de $\mathbf{E}_j$, y por tanto el grado de sustituibilidad de ambos productos.

- Si $b = 0$ (productos independientes, no sustituibles, y por tanto dos monopolios de hecho), las demandas son $q_1(p_1, p_2) = a - p_1$ y $q_2(p_1, p_2) = a - p_2$, y los resultados de equilibrio son:

  Precios: $p_1^* = p_2^* = \dfrac{a + c}{2}$

  Cantidades: $q_1^* = q_2^* = \dfrac{a - c}{2}$

Beneficios: $u_2^* = u_1^* = \dfrac{(a - c)^2}{4}$

Son los resultados del monopolio.

- Si $b = 1$ (productos medianamente sustituibles), las demandas son

$$q_1(p_1, p_2) = a - p_1 + p_2 \text{ y } q_2(p_1, p_2) = a - p_2 + p_1$$

y los resultados de equilibrio son:

Precios: $p_1^* = p_2^* = a + c$.
Cantidades: $q_1^* = q_2^* = a$.
Beneficios: $u_2^* = u_2^* = a^2$.

- Si $b \to 2$ (productos muy sustituibles, al máximo en este modelo numérico), las demandas son $q_1(p_1, p_2) \to a - p_1 + 2p_2$ y $q_2(p_1, p_2) \to a - p_2 + 2p_1$, y los resultados de equilibrio son:

Precios: $p_1^* = p_2^* \to \infty$.
Cantidades: $q_1^* = q_2^* \to \infty$.
Beneficios: $u_2^* = u_1^* \to \infty$.

En la Figura 2.11 puede verse una representación gráfica de las correspondencias de respuesta óptima y del equilibrio de Nash de este modelo para un valor de b cercano a 0 y para un valor cercano a 2.

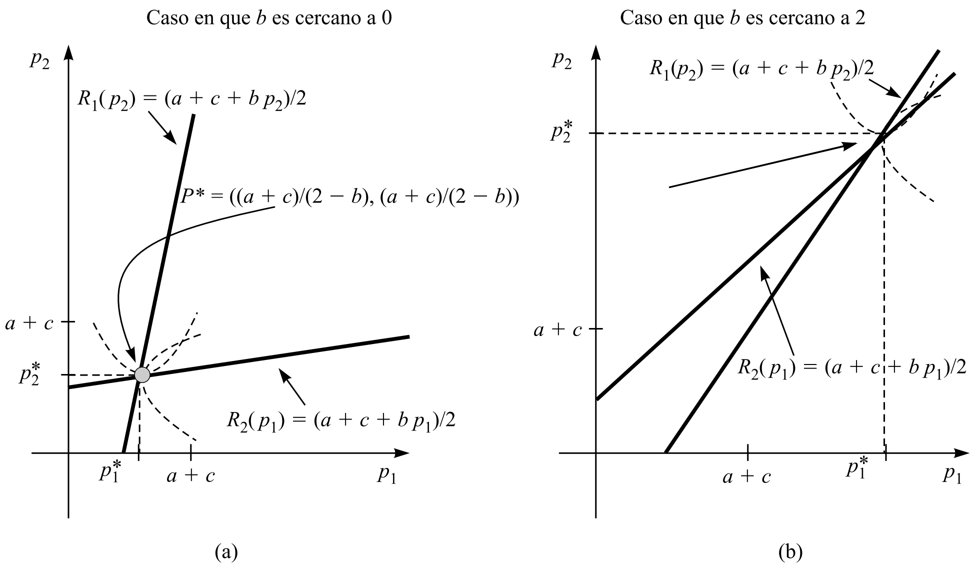


Figura 2.11 Correspondencias de respuesta óptima.

Las curvas en trazo discontinuo que pasan por el punto de equilibrio P^* son curvas isobeneficio de cada empresa. La región que encierran entre ellas corresponde a beneficios mayores para ambas, indicando que el equilibrio no es un óptimo de Pareto para los productores de esa industria.

2.7. APLICACIONES: EL PROBLEMA DE LOS BIENES COMUNALES

Un bien comunal es un bien que es propiedad de un conjunto especificado de individuos, es decir, disponible para el uso y disfrute de dichos individuos, de modo que ninguno de ellos es excluible de dicho uso y que el uso que un individuo hace del bien disminuye la potencialidad de este bien para los demás usuarios. El ejemplo históricamente más conocido de bien comunal es el de los ejidos, tierras de pastos propiedad de los habitantes de una determinada localidad o región.

En general, la consecuencia de que un recurso sea comunal es que puede sufrir una sobreexplotación. Ello también ocurre en recursos naturales de libre acceso como los caladeros de pesca en aguas internacionales que estén abiertos a cualquier empresa de pesca.

Modelo simplificado

a) Bien privado. Un sólo jugador

Un ganadero dispone de un pastizal al que llevar sus vacas. El coste de llevar cada vaca es c. Por otra parte, el valor o utilidad v que obtiene de cada vaca depende del número de vacas M que envía al ejido (obsérvese que si envía solamente una, podrá comer lo que quiera y volverá sana y con mucho peso, mientras que si envía muchas no habrá comida para todas, y volverán débiles y flacas).

Sea $v(M) = a - M^2$ el valor que obtiene por cada vaca, y sea $c < a$.

Su problema de decisión es cuántas vacas M^* ha de llevar para maximizar su ganancia o utilidad total $u(M) = (v(M) - c)M = (a - M^2 - c)M$.

Cálculo del óptimo

Vamos a resolver el problema como si la variable M no fuera entera y pudiera tomar cualquier valor real. La condición de primer orden es

$$du(M)/dM = 0;$$

$$(v(M) - c) + M\partial(v(M))/\partial M = 0 \qquad [2.19]$$

de donde se deduce

$$(a - M^2 - c) + (-2M)M = 0; \qquad a - c = 3M^2; \qquad M = +\sqrt{\frac{a-c}{3}}$$

y la condición de segundo orden es

$$d^2u(M)/dM^2 = -6M < 0 \quad \text{(correspondiente a un máximo)}$$

En conclusión, la cantidad óptima de vacas es

$$M^* = +\sqrt{\frac{a-c}{3}}$$

y la ganancia máxima es

$$u^* = (a - M^{*2} - c)M^* = \left(a - \frac{a-c}{3} - c\right)\sqrt{\frac{a-c}{3}} = 2\sqrt{\left(\frac{a-c}{3}\right)^3}$$

b) Bien comunal. Dos jugadores

En este caso, son dos los ganaderos que comparten el pastizal al que llevar sus vacas. El primero, **J1**, lleva m_1 unidades y el segundo, **J2**, lleva m_2. El coste de llevar cada unidad es c, y el valor v que obtiene cualquiera de ellos de cada unidad que lleve depende del número de unidades $M = m_1 + m_2$ que vayan al pastizal.

Sea $v(M) = a - M^2$ el valor que obtiene cada ganadero por cada unidad.

El problema de decisión de **J1**, supuesto que **J2** lleve m_2 unidades, es cuántas unidades m_1 ha de llevar para maximizar su ganancia o utilidad total $u_1(m_1, m_2) = (v(M) - c)m_1 = (a - M^2 - c)m_1$. Análogamente, el problema de decisión de **J2**, supuesto que **J1** lleve m_1 unidades, es cuántas unidades m_2 ha de llevar para maximizar su ganancia o utilidad total $u_2(m_1, m_2) = (v(M) - c)m_2 = (a - M^2 - c)m_2$.

A diferencia del caso anterior, la respuesta a estas preguntas contiene un elemento estratégico, pues cada ganadero influye con sus decisiones en el rendimiento que el otro puede obtener del pastizal.

Cálculo del equilibrio de Nash

Como en el caso anterior, vamos a resolver el problema como si las variables m_1 y m_2 fueran reales, ignorando por tanto su carácter entero. Las condiciones de primer orden son:

$$\partial u_i(m_1, m_2)/\partial m_i = 0;$$

$$(v(M) - c) + m_i \partial(v(M))/\partial m_i = 0, \quad \forall i = 1, 2 \qquad [2.20]$$

$$(a - (m_1 + m_2)^2 - c) + (-2(m_1 + m_2))m_i = 0, \quad \forall i = 1, 2$$

Sumando miembro a miembro:

$$2a - 2(m_1 + m_2)^2 - 2c - 2(m_1 + m_2)(m_1 + m_2) = 0; \qquad a - c - 2(m_1 + m_2)^2 = 0$$

$$(m_1 + m_2)^2 = (a - c)/2; \qquad m_1 + m_2 = \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

Así pues las cantidades individuales de equilibrio son $m_1^* = m_2^* = \sqrt{\frac{a-c}{8}}$, la cantidad total es $M^* = \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ y la ganancia total es

$$\left(a - \frac{a-c}{2} - c\right)\sqrt{\frac{a-c}{2}} = \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^3}$$

Las condiciones de segundo orden son

$$\partial^2 u_i(m_1, m_2)/\partial m_i^2 = -4M - 2m_i < 0, \quad \forall i = 1, 2 \quad \text{(correspondientes a un máximo)}$$

c) Bien comunal. Caso de *n* jugadores

Sean ahora n ganaderos, bajo las mismas hipótesis del caso anterior. Concretando:

- **J*i*** lleva m_i unidades $\forall i = 1, 2, ..., n$, y M es la cantidad total $m_1 + m_2 + ... + m_n$.
- El coste de llevar cada unidad es c.
- El valor v que obtiene cualquiera de ellos de cada unidad que lleve es $v(M) = a - M^2$. Sea $c < a$.
- La utilidad o ganancia total para el ganadero i es

$$u_i(m_1, m_2, ..., m_n) = (v(M) - c)m_i = (a - M^2 - c)m_i$$

El problema de decisión de **J*i***, supuesta la combinación $m_{-i} = (m_1, ..., m_{i-1}, m_{i+1}, ..., m_n)$ de decisiones de los demás, es:

$$\text{Maximizar } u_i(m_1, m_2, ..., m_n) = (v(M) - c)m_i = (a - M^2 - c)m_i$$

en la variable de decisión m_i.

Cálculo del equilibrio de Nash

Las condiciones de primer orden son:

$$\partial u_i(m_1, m_2 , ..., m_n)/\partial m_i = 0, \quad \forall i = 1, 2, ..., n$$

es decir,

$$(v(M) - c) + m_i \partial(v(M))/\partial m_i = 0, \quad \forall i = 1, 2, ..., n \qquad [2.21]$$

de las que se deduce

$$(a - (m_1 + m_2 + \cdots + m_n)^2 - c) + (-2(m_1 + m_2 + \cdots + m_n))m_i = 0, \quad \forall i = 1, 2, ..., n$$

Sumando miembro a miembro para los n ganaderos, obtenemos:

$$na - nM^2 - nc - 2M^2 = 0; \qquad n(a - c) - (n + 2)M^2 = 0$$

de donde se deduce

$$M^2 = \frac{n(a - c)}{n + 2}; \qquad M = \sqrt{\frac{n(a - c)}{n + 2}}$$

$$m_1^* = m_2^* = \cdots = m_n^* = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{n(a - c)}{n + 2}}$$

Así pues, las cantidades individuales de equilibrio son

$$m_1^* = m_2^* = \cdots = m_n^* = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{n(a - c)}{n + 2}}$$

la cantidad total es $M^* = \sqrt{\dfrac{n(a-c)}{n+2}}$ y la ganancia total es

$$\left(a - \frac{n(a-c)}{n+2} - c\right)\sqrt{\frac{n(a-c)}{n+2}} = 2\sqrt{\frac{(a-c)^3 n}{(n+2)^3}}$$

Las condiciones de segundo orden son

$$\partial^2 u_i(m_1, m_2, ..., m_n)/\partial m_i^2 = -4M - 2m_i < 0 \quad \text{(correspondientes a un máximo)}$$

Merece la pena observar que la condición de primer orden, tal como se expresa en [2.21], tiene una interpretación interesante, análoga a la que hicimos para el oligopolio de Cournot. El primer sumando del primer miembro de [2.21], $(v(M) - c)$, es la rentabilidad directa para el usuario **J*i*** de usar una unidad adicional, mientras que el segundo término, $m_i\partial(v(M))/\partial m_i$, es el efecto (negativo) que el uso de esa unidad adicional causa en la rentabilidad de las unidades ya utilizadas por **J*i***. Así pues, en el equilibrio al usar una unidad más, **J*i*** compensa exactamente con dicha rentabilidad positiva directa la rentabilidad negativa indirectamente ocasionada **al usuario J*i* (y sólo a él)**. Además, al igual que en el oligopolio, existe una externalidad negativa creada entre los usuarios del recurso comunal al decidir la intensidad de su explotación de dicho recurso. Esta externalidad queda de manifiesto en el hecho de que cada usuario **J*i*** compense mediante su rentabilidad positiva directa únicamente el efecto negativo que a él le causa dicho uso de una unidad adicional, $m_i\partial(v(M))/\partial m_i$, en lugar de compensar el efecto negativo causado a todo el conjunto de usuarios, $M\partial(v(M))/\partial m_i$.

Realicemos ahora una comparación de resultados conforme el número n de usuarios del bien comunal aumenta. En la Tabla 2.2 se dan las características del equilibrio según los valores de n:

Tabla 2.2

	Bien privado ($n = 1$)	**Bien comunal ($n = 2$)**	**Bien comunal (n cualquiera)**	**Bien comunal ($n = \infty$)**
Número de unidades individual	$m_i^* = \sqrt{\dfrac{a-c}{3}}$	$m_i^* = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a-c}{2}}$	$m_i^* = \dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{n(a-c)}{n+2}}$	$m_i^* = 0$
Número de unidades total	$M^* = \sqrt{\dfrac{a-c}{3}}$	$M^* = \sqrt{\dfrac{a-c}{2}}$	$M^* = \sqrt{\dfrac{n(a-c)}{n+2}}$	$M^* = \sqrt{a-c}$
Ganancia individual	$u_i^* = 2\sqrt{\dfrac{(a-c)^3}{3^3}}$	$u_i^* = \sqrt{\dfrac{(a-c)^3 2}{4^3}}$	$u_i^* = \dfrac{2}{n}\sqrt{\dfrac{(a-c)^3 n}{(n+2)^3}}$	$u_i^* = 0$
Ganancia total	$u^* = 2\sqrt{\dfrac{(a-c)^3}{3^3}}$	$u^* = 2\sqrt{\dfrac{(a-c)^3 2}{4^3}}$	$u^* = 2\sqrt{\dfrac{(a-c)^3 n}{(n+2)^3}}$	$u^* = 0$

Vemos en la Tabla 2.2 que cuanto mayor es el número de usuarios del bien comunal, mayor es la explotación a que someten al bien, y menor la ganancia (individual y global) que extraen. Es a esta sobreexplotación, tanto más acusada e incluso catastrófica cuanto mayor es el número de usuarios con acceso al recurso, a la que suele denominarse como «tragedia de los bienes comunales» (*tragedy of commons*, en la terminología inglesa). Las consecuencias negativas de un uso indiscriminado de los bienes comunales son conocidas desde hace siglos, y en muchas ocasiones se han intentado remedios (con mayor o menor éxito) en el sentido de reglamentar dicho uso hasta convertirlo en un uso razonable. También es sabido de antiguo, de manera intuitiva, que la razón esencial de la sobreexplotación estriba en que los intereses individuales de los usuarios no coinciden con el interés social de la comunidad de individuos que explota dicho recurso común. Sin embargo, el estudio formal de estas situaciones, y en particular la aplicación de la teoría de juegos a dicho estudio (que ha permitido precisar y establecer rigurosamente la causa de la sobreexplotación), es relativamente reciente, y se inicia con un artículo pionero de Hardin en 1968.

Modelo general

Consideremos ahora, para n usuarios, hipótesis análogas a las estudiadas anteriormente, pero sin usar una forma funcional específica para el valor $v(M)$ que a cualquier usuario le reporta cada unidad usada. Concretando:

- **J*i*** usa m_i unidades $\forall\ i = 1, 2, ..., n$, donde $m_i \in [0, \infty)$. Llámese M a la cantidad total $m_1 + \cdots + m_n$.
- $v(M)$ es el valor que obtiene cualquiera de los usuarios de cada unidad que lleve donde v es estrictamente decreciente y cóncava. Es decir, $v'(M) < 0$ y $v''(M) < 0$.
- El coste de usar cada unidad es c. Sea $c < v(0)$.
- Las funciones de ganancias son: $u_i(m_1, ..., m_i, ..., m_n) = m_i(v(M) - c)$.

Como anteriormente, supondremos que las variables $m_1, m_2, ..., m_n$ son reales. Por ser $v(M)$ una función estrictamente decreciente y cóncava, existen dos valores de M, a los que llamaremos crítico y máximo, y denotaremos $M_{\text{crít}}$ y $M_{\max}$, respectivamente, que cumplen $v(M_{\text{crít}}) = c$ y $v(M_{\max}) = 0$.

Cálculo del equilibrio de Nash

La combinación $(m_1^*, ..., m_i^*, ..., m_n^*)$ es un EN si y sólo si para todo i, m_i^* es una respuesta óptima a m_{-i}^*, lo que ocurre si m_i^* es solución de Maximizar $u_i(m_1^*, ..., m_i, ..., m_n^*)$ en la variable en m_i, $\forall i = 1, 2,..., n$

Las condiciones de primer orden son:

$$\partial u_i(m_i, m_{-i}^*)/\partial m_i = v(m_i + m_{-i}^*) - c + m_i \cdot v'(m_i + m_{-i}^*) = 0$$

es decir,

$$v(M^*) - c + m_i^* \cdot v'(M^*) = 0 \qquad [2.22]$$

Sumando las n ecuaciones, y dividiendo por n, obtenemos:

$$v(M^*) - c + \frac{M^* \cdot v'(M^*)}{n} = 0 \qquad [2.23]$$

El número total de unidades de equilibrio, M^*, es la solución de [2.23], es decir, la raíz de la función $F_n(M) = v(M) - c + \dfrac{M \cdot v'(M)}{n}$. Las cantidades individuales, ganancias individuales y ganancia total de equilibrio, m_i^*, u_i^* y u^*, son:

- $m_i^* = \dfrac{M^*}{n}, \quad \forall i = 1, 2, ..., n.$
- $u_i^* = u_i(m_1^*, ..., m_n^*) = m_i^*(v(M^*) - c) = \dfrac{M^*(v(M^*) - c)}{n}$
- $u^* = M^*(v(M^*) - c)$

También aquí, a partir de la condición de primer orden [2.23], puede observarse lo mismo que en [2.21]: el beneficio directo de usar una unidad adicional del recurso, $v(M^*) - c$, compensa el perjuicio $\dfrac{M^* \cdot v'(M^*)}{n}$ que, desde el punto de vista de cada jugador (de ahí el denominador n), ocasiona indirectamente ese uso adicional.

La cantidad global de equilibrio M^* tiene dos propiedades importantes, ser única y ser estrictamente menor que el valor crítico $M_{\text{crít}}$. Veamos por qué:

1. M^* es única.

Lo es porque $F_n(M)$ es estrictamente decreciente en M (debido a que su derivada es

$$\frac{dF_n(M)}{dM} = v'(M^*) + \frac{v'(M) + M \cdot v''(M)}{n} < 0)$$

lo que implica que su gráfica corta al eje de abcisas en un único punto, es decir, que existe un único valor M^* tal que $F_n(M^*) = 0$.

2. M^* es estrictamente menor que $M_{\text{crít}}$.

Lo es porque $F_n(M^*) = 0$, mientras que

$$F_n(M_{\text{crít}}) = v(M_{\text{crít}}) - c + \frac{M_{\text{crít}} \cdot v'(M_{\text{crít}})}{n} = 0 + \frac{M_{\text{crít}} \cdot v'(M_{\text{crít}})}{n} < 0$$

Es decir, $F_n(M_{\text{crít}}) < F_n(M^*)$, que implica, por ser F_n estrictamente decreciente, que $M^* < M_{\text{crít}}$.

Una pregunta importante, que merece la pena intentar responder, es cómo varía M^* con el número de jugadores. Para contestarla, llamemos M_n^* a la cantidad de equilibrio correspondiente a n jugadores, es decir, a la raíz de $F_n(M)$.

Puesto que $\dfrac{M \cdot v'(M)}{n} < 0$, $\forall M > 0$ (por ser $v'(M) < 0$), es claro que $F_n(M) < F_m(M)$ si $n < m$. Por tanto, $M_n^* < M_m^*$ si $n < m$.

En los casos extremos $n = 1$ y $n = \infty$, obtenemos:

- Si $n = 1$

  M_1^* es la solución de $v(M) - c + M \cdot v'(M) = 0$, y la ganancia total u_1^* es $M_1^* \cdot (v(M_1^*) - c)$.

- Si $n = \infty$

  M^*_∞ es la solución de $v(M) - c = 0$, por tanto $M^*_\infty = M_{\text{crít}}$. La ganancia total u^* es nula, ya que $u^*_\infty = M^*_\infty \cdot (v(M^*_\infty) - c) = M_{\text{crít}} \cdot (v(M_{\text{crít}}) - c) = 0$.
  En la Figura 2.12 puede verse una representación gráfica de las situaciones correspondientes a $n = 1$, n general y $n = \infty$.

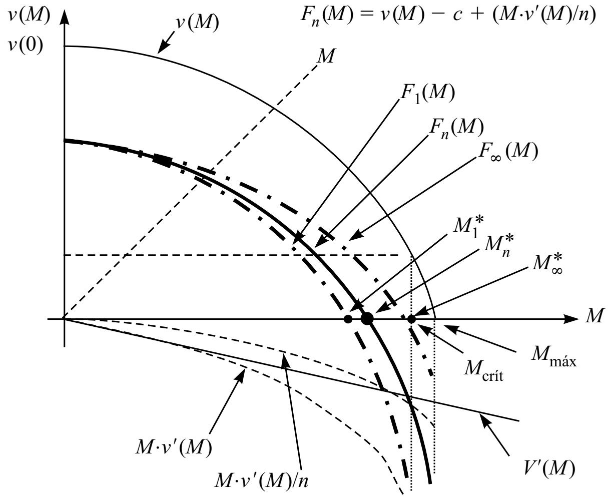


Figura 2.12 Modelo general del problema de los bienes comunales.

Por tanto, hemos demostrado que la sobreexplotación se produce cuando el número n de usuarios del recurso es mayor que 1, y se agrava conforme dicho número aumenta. En la Figura 2.12 se observa que los valores de equilibrio de la cantidad global utilizada M del recurso se desplazan hacia la derecha conforme aumenta el número n, hasta alcanzar, en el límite, el valor crítico $M_{\text{crít}}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

2.1 Considérense los siguientes juegos en forma estratégica:

Juego 1

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	7, 6	4, 8	3, 4
	M	4, 1	3, 6	4, 2
	B	5, 4	6, 5	3, 1

Juego 2

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	4, 3	2, 8	4, 4
	M	2, 2	3, 3	2, 2
	B	5, 1	4, 3	3, 4

a) Determine para cada jugador qué estrategias se encuentran dominadas, no dominadas o son dominantes de un modo estricto. Resuelva cada uno de los juegos aplicando el procedimiento de eliminación iterativa estricto.
b) Determine los equilibrios de Nash en estrategias puras.

2.2 Considérense los siguientes juegos en forma estratégica:

Juego 1

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	3, 3	2, 6	3, 1
	M	2, 4	2, 4	0, 4
	B	1, 5	2, 3	5, 0

Juego 2

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	3, 2	1, 4	2, 2
	M	1, 4	3, 2	2, 3
	B	2, 3	1, 3	2, 3

a) Resuelva ambos juegos aplicando el procedimiento de eliminación iterativa débil.
b) Determine los Equilibrios de Nash en estrategias puras. ¿Pertenecen los EN en estrategias puras al conjunto S^{EID}?

2.3 Considérense cada uno de los siguientes juegos:

Juego 1

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	f, 5	$f + 2$, g
	B	1, -1	f, 0

Juego 2

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	4, f	g, 1	9, 0
	B	2, 2	1, 0	0, 0

Determine, para cada juego, qué condiciones han de cumplir los parámetros f y g, ambos estrictamente positivos, para que:

a) el perfil (A, I) sobreviva a la eliminación iterativa estricta;
b) el perfil (B, D) sea equilibrio de Nash;
c) el perfil (B, I) sea eficiente en el sentido de Pareto.

2.4 Considérense los siguientes juegos en forma estratégica:

Juego 1

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	4, 4	f, f
	B	$2 - f$, 1	1, 3

Juego 2

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	4, f	3, 1	2, 2
	B	2, 0	1, -3	g, 1

Averigüe, en función de los parámetros f y g, bajo qué circunstancias:

1. Existe algún equilibrio en estrategias débilmente dominantes.
2. Existe algún equilibrio en estrategias estrictamente dominantes. ¿Qué relación existe respecto al caso anterior?
3. Existe un único equilibrio de Nash en estrategias puras.
4. Existe algún equilibrio de Nash en estrategias puras que esté Pareto-dominado por algún otro perfil de estrategias puras en el juego.

2.5 Ana, Bernardo y Carmen son los únicos participantes en una subasta en sobre cerrado por un objeto, de acuerdo con las siguientes reglas: (i) los tres jugadores deben realizar sus pujas simultáneamente (sin conocer las ofertas realizadas por los demás jugadores); (ii) cada jugador sólo puede ofrecer o pujar 1.000 o 2.000 u.m. (incluso si no tiene interés por el objeto que se subasta); (iii) una vez realizadas las pujas, se adjudica el objeto a quien haya pujado más alto (uno de los jugadores al azar si hay más de una puja máxima), y todos pagan (cada jugador debe pagar la cantidad que ha pujado aunque no se lleve el objeto).

Aparte de lo anterior, es conocimiento común que Ana valora el objeto en 3.000 u.m, Bernardo en 4.000 u.m. y Carmen en 0 u.m. Además, todos los individuos son neutrales al riesgo, de modo que la ganancia de cada jugador ante cada perfil de estrategias es igual a la diferencia entre el valor de lo que obtienen y lo que pagan.

Se pide:

a) Determinar la forma estratégica del juego.
b) Identificar para cada jugador qué estrategias se encuentran sometidas a algún tipo de dominación.
c) Hallar razonadamente el equilibrio de Nash. ¿Es un equilibrio sofisticado? ¿Es dicho equilibrio eficiente en el sentido de Pareto?

2.6 Considérese un juego con dos jugadores en el que cada uno de los jugadores anuncia (simultáneamente) un número perteneciente al conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si $a_1 + a_2 \leqslant 6$, donde a_i es el número anunciado por el jugador i, entonces cada jugador recibe un pago de a_i. Si $a_1 + a_2 > 6$ y $a_i < a_j$, entonces el jugador i recibe un pago igual a a_i y el jugador j recibe $6 - a_i$. Si $a_1 + a_2 > 6$ y $a_i = a_j$, entonces cada jugador recibe un pago de 3. Se pide:

a) Representar el juego en forma estratégica.
b) Resolver por los distintos procedimientos de eliminación iterativa.
c) Determinar cuál es el resultado previsible del juego.

2.7 Demostrar que en todo juego finito con dos jugadores donde para cada $i, j = 1, 2$ y para cada $s_i \in S_i$, $u_j(s_i, s_j) \neq u_j(s_i, s_j') \; \forall \; s_j' \in S_j - \{s_j\}$, el número de equilibrios de Nash en estrategias puras es un número entero entre 0 y $\min\{S_1, S_2\}$.

2.8 El consejo de administración de una empresa está formado por un comité de 9 miembros agrupados según sus intereses comunes en tres grupos o coaliciones de votantes, G1, G2 y G3, con 4, 3 y 2 miembros cada uno. El consejo de administración debe decidir para la empresa uno de los 4 posibles planes de viabilidad disponibles (A, B, C y D), para lo cual debe utilizar el método de pluralidad, que exige a cada votante indicar en su voto una única alternativa, seleccionándose aquella que más votos reciba, y siguiéndose una regla de desempate lexicográfica (teniendo prioridad A, luego B, C y finalmente D). Las preferencias de los miembros están determinadas por el grupo al que pertenezcan y son conocimiento común:

Votantes de G1: $A \succ B \succ C \succ D$

Votantes de G2: $B \succ C \succ A \succ D$

Votantes de G3: $C \succ D \succ A \succ B$

Cada coalición de votantes recibe una utilidad de 3 si es elegido su plan favorito, 2 si es elegido el que se encuentra en segundo lugar de sus preferencias, 1 si sale el tercero y 0 si es elegido el menos preferido.

Analice las decisiones de cada grupo, estudiando las soluciones de dominación y de equilibrio en estrategias puras, cuando se dan las siguientes circunstancias:

a) Cada grupo ha de emitir un número de votos igual al número de votantes que pertenecen a él, no permitiéndose que se emitan un número inferior de votos ni que los votos emitidos por los miembros de un mismo grupo sean diferentes.

b) Cada grupo debe emitir un mínimo de dos votos y un máximo de votos igual al número de miembros que contiene, no permitiéndose que los votos emitidos por los miembros de una misma coalición sean diferentes.

2.9 Considere el siguiente juego entre dos individuos, que tienen una relación sinérgica: si ambos dedican más esfuerzo a la relación, ambos mejoran. Concretamente, cada uno de los jugadores elige su nivel de esfuerzo $a_i \in R_+$, $i = 1, 2$. El pago del jugador i si elige un nivel de esfuerzo a_i cuando el jugador j elige el nivel de esfuerzo a_j es $u_i(a_i, a_j) = a_i(c + a_j - a_i)$, $\forall i, j = 1, 2$, donde $c > 0$ es una constante.

Halle el equilibrio de Nash en estrategias puras del juego.

2.10 En el modelo simplificado de duopolio de Cournot estudiado en el Apartado 2.5, analice el caso en que las empresas tienen costes marginales constantes, pero distintos, y compare los resultados (cantidades y beneficios en equilibrio) con los que se obtuvieron en el caso de costes iguales.

2.11 Considérese el modelo simplificado alternativo del duopolio de Cournot, en el cual las dos empresas tienen costes nulos, pero la función de demanda inversa es $P(Q) = a \cdot e^{-Q}$ (donde $a > 0$ y $Q = q_1 + q_2$). Estudie la naturaleza del equilibrio de Nash.

2.12 Considere el siguiente juego con dos empresas. Las dos empresas venden sus productos en el mercado del país A, pero la empresa E_1 también vende su producto en el mercado del país B. Sean los costes totales de producción de la empresa E_1 $CT_1(q_{1A}, q_{1B}) = (q_{1A} + q_{1B})^2/2$, en donde q_j^1 es la cantidad vendida por la empresa E_1 en el mercado del país j, para j = A, B. Los costes totales de producción de la empresa E_2 son $CT_2(q_2) = (q_2)^2/2$. Suponga que la demanda en el mercado del país A es $P_A(q_{1A}, q_2) = 30 - (q_{1A} + q_2)$ y que en el mercado del país B la empresa E_1 puede vender cualquier cantidad que elija al precio $P_B = 10$. El objeto de ambas empresas es maximizar sus beneficios.

a) Represente el juego en forma estratégica.
b) Determine el equilibrio de Nash en estrategias puras del juego propuesto.

2.13 Supongamos una industria formada por tres empresas E_1, E_2 y E_3, dedicadas a la producción de un mismo producto, que se enfrentan a una misma demanda inversa $p(Q) = a - Q$, donde $Q = q_1 + q_2 + q_3$. Sin embargo, cada empresa tiene un distinto grado de eficiencia, con lo que presentan costes marginales diferentes, c_1, c_2 y c_3 respectivamente, siendo nulos los costes fijos.

a) Determine el equilibrio de Nash teniendo en cuenta que las empresas deciden la cantidad a producir (modelo de Cournot).
b) Considérese que $a = 12$, $c_1 = c_2 = 1$ y $c_3 = d$, con $d > 0$. Si las empresas E_1 y E_2 se fusionan (convirtiendo a la industria en un duopolio), ¿existe algún valor del parámetro d a partir del cual aumenta el beneficio conjunto de las empresas fusionadas?

2.14 Sea un mercado en el que operan dos empresas (M_1 y M_2) que producen bienes diferenciados. La demanda de los consumidores respecto a las marcas de las empresas M_1 y M_2 viene representada por $q_{m1} = 3 - 2p_{m1} + p_{m2}$ y $q_{m2} = 3 - 2p_{m2} + p_{m1}$, respectivamente, y las funciones de costes de las empresas son $C_{mi}(q_{mi}) = c \cdot q_{mi}$, $i = 1, 2$, donde c es el coste marginal y unitario de producción. Teniendo en cuenta que cada una de las empresas tiene como variable de decisión su precio de venta, (p_{m1} y p_{m2}), determine el equilibrio de Nash (Bertrand) del juego simultáneo entre las empresas M_1 y M_2, así como las cantidades a producir y beneficios de cada una de ellas.

2.15 Considérese la siguiente situación de interacción estratégica. Los propietarios de cinco casas de alquiler, idénticas, compiten en un pueblo, y tienen que decidir de un modo simultáneo el alquiler de la temporada.

Sea s_i el precio elegido por el dueño de la casa i-ésima, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, siendo $S_i = R_+$ su espacio de estrategias, y $s = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ un perfil de estrategias cualquiera. Los beneficios de alquilar durante la temporada la casa i, dado el perfil s_i, son

$$\prod_i(s) = 18.000 s_i - 6 s_i^2 + s_i \sum_{j=1}^{5} s_j$$

a) Determine los precios que maximizan los beneficios conjuntos de las cinco casas, y los beneficios que obtendría cada una de ellas. Denomine s_i^m al precio que fija el propietario de la casa i en este caso.

b) Determine si el perfil $s^m = (s_1^m, s_2^m, s_3^m, s_4^m, s_5^m)$ es un equilibrio de Nash. En caso contrario, determine la desviación óptima de un propietario i dado el perfil de precios s_{-i}^m del resto de propietarios, indicando el alquiler que fijaría y los beneficios que obtendría.

c) Determine los precios que constituyen un equilibrio de Nash, así como los beneficios que reportaría a cada propietario.

CAPÍTULO 3

Juegos estáticos con información completa (II)

En este capítulo se continúa y profundiza el estudio de los juegos estáticos con información completa. Se introducen las estrategias mixtas, lo que permite extender los conceptos de dominación y el concepto de equilibrio de Nash, estudiados en el capítulo anterior en el contexto de las estrategias puras. En la primera sección se aborda el equilibrio de Nash en estrategias mixtas en la segunda se analiza el caso particular de los juegos de suma cero. En la tercera se completa el análisis de las ideas de dominación y en la cuarta se plantean, bajo la denominación de refinamientos, algunos conceptos de equilibrio alternativos al concepto de equilibrio de Nash.

3.1. ESTRATEGIAS MIXTAS. CÁLCULO DEL EQUILIBRIO Y TEOREMA DE EXISTENCIA

El concepto de solución equilibrio de Nash (EN), tal como lo hemos definido en el capítulo anterior, tiene una dificultad muy importante, que consiste en que su existencia no está garantizada, ni siquiera en juegos tan sencillos como los juegos finitos. Por ejemplo, el juego de las monedas carece de EN (en estrategias puras). En las páginas que siguen veremos que si ampliamos el concepto de estrategia, el conjunto de equilibrios de Nash se amplía también, de tal modo que podremos afirmar que todos los juegos finitos poseen al menos un EN.

Ampliación del concepto de estrategia: estrategias mixtas

Hasta ahora hemos utilizado la palabra estrategia para referirnos a un plan completo de acciones ciertas de cada jugador. En el caso que nos ocupa de juegos estáticos con información completa, dicho plan se reduce a elegir una, y sólo una, de las acciones disponibles, que se han especificado de modo explícito. Por ejemplo, en el juego de las monedas las únicas estrategias de cada jugador son jugar *Cara* y jugar *Cruz*. A tales estrategias las hemos denominado estrategias puras. La ampliación del concepto de estrategia consiste en permitir que los jugadores no sólo puedan elegir entre acciones ciertas y concretas, sino que también puedan seleccionar acciones aleatorias, es decir, puedan tomar acciones inciertas, que asignan distintas probabilidades a las distintas acciones ciertas. Por ejemplo, en el juego de las monedas el jugador 1 podría decidir lo siguiente: jugar *Cara* con probabilidad 1/4 y jugar *Cruz* con probabilidad 3/4. A las estrategias que deciden de manera aleatoria sobre acciones ciertas se las denomina estrategias mixtas.

Definición 3.1

Sea $S_i = \{s_i^1, s_i^2, ..., s_i^k\}$ el conjunto de estrategias puras del jugador i. Llamamos **estrategia mixta del jugador *i*** a toda lotería $\sigma_i = (\sigma_i^1, \sigma_i^2, ..., \sigma_i^k)$ sobre S_i, es decir, a toda distribución de probabilidad sobre S_i, y por tanto, a toda k-pla $(\sigma_i^1, \sigma_i^2, ..., \sigma_i^k)$ cuyas componentes son no negativas y suman 1. Se interpreta σ_i como la estrategia consistente en jugar la estrategia pura s_i^1 con probabilidad σ_i^1, s_i^2 con probabilidad σ_i^2, ..., s_i^k y con probabilidad σ_i^k, donde $\sigma_i^j \geqslant 0$, para cada $j = 1, 2, ..., k$ y $\sum_{j=1}^{k} \sigma_i^j = 1$.

Al conjunto de estrategias mixtas del jugador i lo denotaremos por $\Delta(S_i)$, indicando con ello que el conjunto de estrategias mixtas de un jugador está formado por todas las loterías sobre S_i.

$$\Delta(S_i) = \left\{\sigma_i = (\sigma_i^1, \sigma_i^2, ..., \sigma_i^k) : \sigma_i^j \geqslant 0, \text{ para } j = 1, 2, ..., k, \text{ y } \sum_{j=1}^{k} \sigma_i^j = 1\right\}$$

Entre las estrategias mixtas están aquellas que asignan probabilidad 1 a una de las estrategias puras y probabilidad cero a todas las demás. Por tanto, toda estrategia pura es también estrategia mixta: así la estrategia pura s_i^j se puede identificar con la estrategia mixta (0, ..., 1, ..., 0), en donde el 1 corresponde a la componente j-ésima de dicho vector. La ampliación del concepto de estrategia para dar cabida a las estrategias mixtas supone además convertir en estrategia a toda combinación lineal convexa de al menos dos estrategias puras.

Teniendo en cuenta que las estrategias mixtas se definen sobre el conjunto de estrategias puras y que dichas loterías pueden asignar probabilidad nula a determinadas estrategias puras, se hace preciso concretar para cada estrategia mixta el subconjunto de estrategias puras sobre el cual está efectivamente definida, es decir, el subconjunto de estrategias puras con probabilidad estrictamente positiva.

Definición 3.2

Sea $S_i = \{s_i^1, s_i^2, ..., s_i^k\}$ el conjunto de estrategias puras del jugador i. Se llama **soporte de una estrategia mixta** σ_i al subconjunto de las estrategias puras, denotado por **SOP**$(\sigma_i \subset S_i$, tal que s_i^j pertenece a SOP(σ_i) si y sólo si $\sigma_i^j > 0$.

Es decir, pertenecen al soporte de una estrategia mixta todas las estrategias puras a las que se asigna una probabilidad estrictamente positiva. Formalmente,

$$\mathrm{SOP}(\sigma_i) = \{s_i^j \in S_i : \sigma_i^j > 0\}$$

Teniendo en cuenta la definición de soporte diremos que una estrategia mixta es *completa* si el soporte de dicha estrategia coincide con el conjunto de estrategias puras del jugador ($\mathbf{SOP}(\sigma_i) = \boldsymbol{S_i}$). Es decir, una estrategia mixta es completa si asigna una probabilidad estrictamente positiva a cada estrategia pura de S_i. Por otra parte, cualquier estrategia pura puede ser vista como una estrategia mixta que tiene un soporte unitario, es decir, una estrategia mixta cuyo soporte es un conjunto formado por un solo elemento. A las estrategias mixtas que no son puras las llamamos estrategias mixtas **propias**.

Ejemplo 3.1

Juego 3.1

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	3, 2	1, 4
	C	1, 3	2, 1
	B	2, 2	2, 0

En el Juego 3.1 los conjuntos de estrategias puras son $S_1 = \{A, C, B\}$ y $S_2 = \{I, D\}$. Una estrategia mixta para el jugador 1 no es más que una distribución de probabilidad $(p, q, 1 - p - q)$ donde p representa la probabilidad de elegir A, q la probabilidad de elegir C y $(1 - p - q)$ la probabilidad de elegir B. Y del mismo modo, una estrategia mixta para el jugador 2 consistirá en una lotería $(r, 1 - r)$ en la que r representa la probabilidad de elegir I y $(1 - r)$ la probabilidad de elegir D.

En este caso, cualquier estrategia mixta del jugador 1 para la que $p > 0$, $q > 0$ y $(1 - p - q) > 0$ tendrá un conjunto soporte igual al conjunto de estrategias puras, y por tanto es una estrategia mixta completa. Por ejemplo, una estrategia mixta completa para el jugador 1 es (1/2, 1/4, 1/4) que asigna una probabilidad 1/2 a A, una probabilidad 1/4 a C y una probabilidad 1/4 a B, pues tiene un conjunto soporte que coincide con el conjunto de estrategias puras: $\mathrm{SOP}(1/2, 1/4, 1/4) = S_1$.

Por otra parte, la estrategia mixta del jugador 1 dada por la lotería (0, 1/3, 2/3) no es una estrategia mixta completa, pues asigna una probabilidad 0 a su estrategia A, y su soporte es un subconjunto propio de S_1: $\mathrm{SOP}(0, 1/3, 2/3) = \{C, B\}$.

Finalmente, podemos expresar las estrategias puras A, C y B de dicho jugador como las estrategias mixtas (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1), respectivamente.

¿Cuál es el efecto inmediato de la utilización de estrategias mixtas? Si algún jugador juega una estrategia mixta, la función de pagos de cualquier jugador deja de ser determinista, pasando a ser aleatoria. Por otra parte, con la extensión del juego a las estrategias mixtas deja de tener sentido que las preferencias de los jugadores puedan ser representadas por funciones de utilidad ordinales, ya que éstas no permitirían comparar loterías. Se hace preciso que la escala de representación de las preferencias sea como mínimo cardinal-intervalo, de modo que sea posible calcular pagos esperados.

Ahora bien, si suponemos (como haremos a partir de ahora) que las ganancias para combinaciones de estrategias puras tienen el significado de funciones de utilidad de Von Neumann-Morgenstern, sí tiene sentido calcular (y trabajar con) pagos esperados, que pasan a depender de las probabilidades de las loterías escogidas.

En adelante, y en consonancia con la notación utilizada en el capítulo 1 para la utilidad de Von Neumann-Morgenstern, usaremos mayúsculas para referirnos a los pagos o utilidades esperadas que cada jugador obtiene cuando se juega un perfil de estrategias mixtas.

Ejemplo 3.2

Juego de las monedas

		Jugador 2	
		Cara	Cruz
Jugador 1	Cara	1, −1	−1, 1
	Cruz	−1, 1	1, −1

En el juego de las monedas los conjuntos de estrategias puras son $S_1 = S_2 = \{Cara, Cruz\}$. Por tanto, una estrategia mixta para el jugador 1 no es más que una distribución de probabilidad sobre el conjunto S_1, es decir, $(p, 1 - p)$ donde p representa la probabilidad de elegir *Cara* y $(1 - p)$ la probabilidad de elegir *Cruz*. Y del mismo modo, una estrategia para el jugador 2 consistirá en una lotería $(q, 1 - q)$ sobre el conjunto S_2 en la que q representa la probabilidad de elegir *Cara* y $(1 - q)$ la probabilidad de elegir *Cruz*.

Por ejemplo, los pagos esperados para cada jugador de las combinaciones de estrategias $((p, 1 - p), Cara)$ y $((p, 1 - p), Cruz)$ son los siguientes:

$$U_1((p, 1 - p), Cara) = p \cdot u_1(Cara, Cara) + (1 - p) \cdot u_1(Cruz, Cara) =$$
$$= p \cdot (1) + (1 - p) \cdot (-1) = 2p - 1$$

$$U_2((p, 1 - p), Cara) = p \cdot u_2(Cara, Cara) + (1 - p) \cdot u_2(Cruz, Cara) =$$
$$= p \cdot (-1) + (1 - p) \cdot (1) = 1 - 2p$$

y análogamente,

$$U_1((p, 1 - p), Cruz) = p \cdot u_1(Cara, Cruz) + (1 - p) \cdot u_1(Cruz, Cruz) =$$
$$p \cdot (-1) + (1 - p) \cdot (1) = 1 - 2p$$

$$U_2((p, 1 - p), Cruz) = p \cdot u_2(Cara, Cruz) + (1 - p) \cdot u_2(Cruz, Cruz) =$$
$$p \cdot (1) + (1 - p) \cdot (-1) = 2p - 1$$

Y los pagos esperados de la combinación de estrategias $((p, 1-p), (q, 1-q))$ son:

$$U_1((p, 1-p), (q, 1-q)) = q \cdot U_1((p, 1-p), Cara) + (1-q) \cdot U_1((p, 1-p), Cruz) =$$
$$= q \cdot [2p-1] + (1-q) \cdot [1-2p] = 1 - 2p - 2q + 4pq$$

$$U_2((p, 1-p), (q, 1-q)) = p \cdot q \cdot (-1) + (1-p) \cdot q \cdot (1) + p \cdot (1-q) \cdot (1) + (1-p) \cdot (1-q) \cdot (-1) =$$
$$= -1 + 2p + 2q - 4pq$$

Así, para los valores concretos $((1/3, 2/3), Cara)$ y $((1/3, 2/3), (4/5, 1/5))$ obtenemos las siguientes utilidades esperadas:

$$U_1((1/3, 2/3), Cara) = (1/3)u_1(Cara, Cara) + (2/3)u_1(Cruz, Cara) =$$
$$= (1/3)(1) + (2/3)(-1) = -1/3$$

$$U_2((1/3, 2/3), Cara) = (1/3)u_2(Cara, Cara) + (2/3)u_2(Cruz, Cara) =$$
$$= (1/3)(-1) + (2/3)(1) = 1/3$$

$$U_1((1/3, 2/3), (4/5, 1/5)) =$$
$$= [(1/3)(1) + (2/3)(-1)](4/5) + [(1/3)(-1) + (2/3)(1)](1/5) = -3/15$$

$$U_2((1/3, 2/3), (4/5, 1/5)) =$$
$$= (1/3)(4/5)(-1) + (2/3)(4/5)(1) + (1/3)(1/5)(1) + (2/3)(1/5)(-1) = 3/15$$

Ganancias esperadas en juegos bipersonales

Sea G un juego con dos jugadores cuyos conjuntos de estrategias son $S_1 = \{s_1^1, s_1^2, ..., s_1^m\}$ y $S_2 = \{s_2^1, s_2^2, ..., s_2^n\}$, y sea $\sigma_2 = (\sigma_2^1, \sigma_2^2, ..., \sigma_2^n)$ una estrategia mixta del jugador 2.

Si el jugador 1 juega s_1^i y el jugador 2 juega σ_2, las ganancias esperadas son:

$$U_1(s_1^i, \sigma_2) = \sigma_2^1 u_1(s_1^i, s_2^1) + \sigma_2^2 u_1(s_1^i, s_2^2) + \cdots + \sigma_2^n u_1(s_1^i, s_2^n) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_1(s_1^i, s_2^j)$$

$$U_2(s_1^i, \sigma_2) = \sigma_2^1 u_2(s_1^i, s_2^1) + \sigma_2^2 u_2(s_1^i, s_2^2) + \cdots + \sigma_2^n u_2(s_1^i, s_2^n) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_2(s_1^i, s_2^j)$$

Si el jugador 1 juega $\sigma_1 = (\sigma_1^1, \sigma_1^2, ..., \sigma_1^m)$ y el jugador 2 juega σ_2, las ganancias esperadas son:

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^1 U_1(s_1^1, \sigma_2) + \sigma_1^2 U_1(s_1^2, \sigma_2) + \cdots + \sigma_1^m U_1(s_1^m, \sigma_2) =$$

$$= \sigma_1^1 \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_1(s_1^1, s_2^j) + \sigma_1^2 \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_1(s_1^2, s_2^j) + \cdots + \sigma_1^m \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_1(s_1^m, s_2^j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sigma_1^i \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_1(s_1^i, s_2^j) \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sigma_1^i \sigma_2^j u_1(s_1^i, s_2^j)$$

$$U_2(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^1 U_2(s_1^1, \sigma_2) + \sigma_1^2 U_2(s_1^2, \sigma_2) + \cdots + \sigma_1^m U_2(s_1^m, \sigma_2) =$$

$$= \sigma_1^1 \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_2(s_1^1, s_2^j) + \sigma_1^2 \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_2(s_1^2, s_2^j) + \cdots + \sigma_1^m \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_2(s_1^m, s_2^j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sigma_1^i \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_2(s_1^i, s_2^j) \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sigma_1^i \sigma_2^j u_2(s_1^i, s_2^j)$$

Expresión matricial de las ganancias esperadas

Sea G un juego con dos jugadores cuyos conjuntos de estrategias puras son $S_1 = \{s_1^1, s_1^2, ..., s_1^m\}$ y $S_2 = \{s_2^1, s_2^2, ..., s_2^m\}$y sean $\sigma_1 = (\sigma_1^1, \sigma_1^2, ..., \sigma_1^m)$ y $\sigma_2 = (\sigma_2^1, \sigma_2^2, ..., \sigma_2^n)$ estrategias mixtas de los jugadores 1 y 2, respectivamente.

La forma estratégica de este juego, en estrategias puras, puede representarse como la siguiente tabla bimatriz:

		Jugador 2			
		s_2^1	s_2^2	$\cdots$	s_2^n
Jugador 1	s_1^1	$u_1(s_1^1, s_2^1), u_2(s_1^1, s_2^1)$	$u_1(s_1^1, s_2^2), u_2(s_1^1, s_2^2)$	$\cdots$	$u_1(s_1^1, s_2^n), u_2(s_1^1, s_2^n)$
	s_1^2	$u_1(s_1^2, s_2^1), u_2(s_1^2, s_2^1)$	$u_1(s_1^2, s_2^2), u_2(s_1^2, s_2^2)$	$\cdots$	$u_1(s_1^2, s_2^n), u_2(s_1^2, s_2^n)$
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	s_1^m	$u_1(s_1^m, s_2^1), u_2(s_1^m, s_2^1)$	$u_1(s_1^m, s_2^2), u_2(s_1^m, s_2^2)$	$\cdots$	$u_1(s_1^m, s_2^n), u_2(s_1^m, s_2^n)$

que podemos separar en dos matrices: $A_1 = [u_1(s_1^i, s_2^j)]_{i,j}$y $A_2 = [u_2(s_1^i, s_2^j)]_{i,j}$, donde A_1 recoge las ganancias del jugador 1 y A_2 las ganancias del jugador 2, ante las distintas combinaciones de estrategias puras de los jugadores.

Teniendo en cuenta esta separación de las ganancias de los jugadores en dos matrices, A_1 y A_2, podemos expresar la ganancia esperada de cada jugador cuando juegan las estrategias mixtas σ_1 y σ_2 respectivamente, simplemente como los siguientes productos:

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \qquad U_2(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 A_2 \sigma_2^t$$

donde por σ^t entendemos el vector de estrategias mixtas traspuesto.

Ejemplo 3.3

Consideremos de nuevo el Juego 3.1.

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	3, 2	1, 4
	C	1, 3	2, 1
	B	2, 2	2, 0

Vamos a calcular la utilidad esperada de cada jugador cuando juegan las siguientes combinaciones de estrategias mixtas:

a) $\sigma_1 = (2/3, 1/6, 1/6)$ y $\sigma_2 = (1/3, 2/3)$.

La matriz A_1 está formada por el primer elemento de la tabla para cada estrategia pura de cada jugador y la matriz A_2 por el segundo elemento:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

y la ganancia esperada de cada jugador por jugar σ_1 y σ_2 respectivamente es:

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 A_1 \sigma_2^t = (2/3 \quad 1/6 \quad 1/6)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = (5/2 \quad 4/3)\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = 31/18$$

$$U_2(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 A_2 \sigma_2^t = (2/3 \quad 1/6 \quad 1/6)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = (13/6 \quad 17/6)\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = 47/18$$

b) $\sigma_1 = (2/3, 1/6, 1/6)$ y $s_2 = \text{I}$. Dado que cualquier estrategia pura no es más que una estrategia mixta con soporte unitario (degenerada), podemos expresar $s_2 = \text{I}$ como la estrategia mixta σ_2 que asigna probabilidad 1 a la estrategia I y probabilidad 0 a la estrategia D, es decir, $\sigma_2 = (1, 0)$. Por tanto, la utilidad esperada para los jugadores es:

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 A_1 \sigma_2^t = (2/3 \quad 1/6 \quad 1/6)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (5/2 \quad 4/3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5/2$$

$$U_2(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 A_2 \sigma_2^t = (2/3 \quad 1/6 \quad 1/6)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (13/6 \quad 17/6)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 13/6$$

Observación 3.1:

A veces resulta cómoda la notación consistente en expresar las estrategias mixtas como combinaciones lineales convexas de las estrategias puras. Por ejemplo, en el Juego 3.1 el conjunto de estrategias puras de J1 es $S_1 = \{\text{A, C, B}\}$, y una estrategia mixta sobre ese conjunto soporte, por ejemplo $(p, q, 1 - p - q)$, puede ser expresada como $p\text{A} + q\text{C} + (1 - p - q)\text{B}$. El pago esperado de J1 si dicho jugador juega esa estrategia mixta y el otro jugador juega cualquier estrategia pura o mixta σ_2 puede calcularse fácilmente así:

$$U_1(p\text{A} + q\text{C} + (1 - p - q)\text{B}, \sigma_2) = pU_1(\text{A}, \sigma_2) + qU_1(\text{C}, \sigma_2) + (1 - p - q)U_1(\text{B}, \sigma_2)$$

Definición ampliada de equilibrio de Nash

La definición del equilibrio de Nash cuando permitimos la existencia de estrategias mixtas no es más que una extensión del concepto visto para estrategias puras.

Definición 3.3

En el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, decimos que el perfil de estrategias mixtas $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_i^*, ..., \sigma_n^*)$ es un **Equilibrio de Nash** (abreviado EN) si para cada jugador i:

$U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) \geqslant U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*)$ para todo σ_i de $\Delta(S_i)$.

Es decir, para cada jugador i, σ_i^* es una solución del problema

$$\max U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) \text{ en la variable } \sigma_i, \text{ donde } \sigma_i \text{ pertenece a } \Delta(S_i)$$

o dicho de otro modo, para cada jugador i, *σ_i^* es respuesta óptima a σ_{-i}^*.*

Téngase en cuenta que una estrategia mixta no es más que una lotería sobre estrategias puras y que la función de pagos o ganancias es lineal, para cada jugador, en las probabilidades de sus distintas estrategias puras. Por tanto, el pago esperado para un jugador de una estrategia mixta, suponiendo fijas las estrategias de los otros jugadores, resulta ser una combinación convexa de los pagos de las estrategias puras soporte de dicha estrategia mixta, y en consecuencia, la ganancia esperada de una estrategia mixta tiene como límites inferior y superior las ganancias mínima y máxima de las estrategias puras soporte de dicha estrategia mixta. Esto puede verse claramente en el Ejemplo 3.4.

Ejemplo 3.4

Consideremos de nuevo el Juego 3.1:

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	3, 2	1, 4
	C	1, 3	2, 1
	B	2, 2	2, 0

Como puede verse en este juego, dada la estrategia I del jugador 2, el jugador 1 no puede esperar ganar menos de 1 (ganancia cuando juega C), ni más de 3 (ganancia cuando juega A) con ninguna de sus estrategias, ya sean puras o mixtas:

$$U_1[(p, q, 1 - p - q), \mathrm{I}] = pu_1(\mathrm{A}, \mathrm{I}) + qu_1(\mathrm{C}, \mathrm{I}) + (1 - p - q)u_1(\mathrm{B}, \mathrm{I}) =$$
$$= p \cdot 3 + q \cdot 1 + (1 - p - q) \cdot 2$$

$U_1[(p,\ q,\ 1-p-q),\ \mathrm{I}]$ toma un valor máximo de 3 cuando $p = 1$, $q = 0$ y $1 - p - q = 0$, y un valor mínimo de 1 cuando $p = 0$, $q = 1$ y $1 - p - q = 0$.

De lo dicho en el párrafo anterior y de lo visto en el ejemplo, se desprende intuitivamente que para que una estrategia mixta sea respuesta óptima a una estrategia de otro jugador (o a una combinación de estrategias del resto de jugadores si hay más de dos), todas las estrategias puras soporte de la estrategia mixta deben generar la misma ganancia y esta ganancia debe ser la máxima dada la estrategia o perfil de estrategias del resto de jugadores. Si alguna estrategia pura del soporte generara una ganancia inferior, entonces debería ser desechada (es decir, se le debería asignar probabilidad nula) pues en caso contrario haría que la ganancia esperada de la estrategia mixta fuese menor que la ganancia de alguna estrategia pura, dejando de ser, por tanto, respuesta óptima de ese jugador a la estrategia o perfil de estrategias del resto de jugadores.

En el Teorema 3.1 se formaliza la idea anterior.

Teorema 3.1

En el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, la combinación de estrategias mixtas $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_n^*)$ es un **equilibrio de Nash** si y sólo si para cada jugador i con estrategia mixta $\sigma_i^* = (\sigma_i^1{}^*, \sigma_i^2{}^*, ..., \sigma_i^j{}^*, ...)$ tener $\sigma_i^j{}^* > 0$ implica que la estrategia pura s_i^j es una respuesta óptima a $\sigma_{-i}^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*)$.

Demostración:

$\Leftarrow$) Supongamos que el perfil $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_n^*)$ cumple, para cada jugador i, que todas sus estrategias puras s_i^j soporte de σ_i^* son respuesta óptima a

$$\sigma_{-i}^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*)$$

Llamemos M_i^* a la máxima utilidad que puede ser alcanzada por el jugador i si los demás juegan σ_{-i}^*, es decir,

$$M_i^* = \max \{U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, s_i, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) : s_i \in S_i\} =$$
$$= \max \{U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) : \sigma_i \in \Delta(S_i)\}$$

En ese caso,

$$U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, s_i^j, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) = \max \{U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, s_i, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) : s_i \in S_i\} =$$
$$= M_i^*,\ \forall s_i^j \in \mathrm{SOP}(\sigma_i^*)$$

y, en consecuencia,

$$U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) = \sum_{\sigma_i^{j*} > 0} \sigma_i^j{}^* U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, s_i^j, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) =$$

$$= \sum_{\sigma_i^{j*} > 0} \sigma_i^j{}^* M_i^* = M_i^* \geqslant U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*),\ \forall \sigma_i \in \Delta(S_i)$$

Así pues, σ_i^* es respuesta óptima a σ_{-i}^* para todo jugador i, por lo que σ^* es Equilibrio de Nash.

$\Rightarrow$) Sea $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_n^*)$ un EN. Supongamos que, dado un jugador cualquiera i, la estrategia pura s_i^j pertenece al soporte de σ_i^*. Demostraremos por reducción al absurdo que s_i^j es respuesta óptima a $\sigma_{-i}^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*)$. Si no lo fuera, existiría una estrategia pura s_i^k tal que

$$U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, s_i^k, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) > U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, s_i^j, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*)$$

Ahora bien, si σ_i' es la estrategia mixta que es en todo igual a $\sigma_i^* = (\sigma_i^1*, \sigma_i^2*, ..., \sigma_i^j*, ...)$, salvo que juega la estrategia pura s_i^j con probabilidad cero y la estrategia pura s_i^k con probabilidad $\sigma_i^j* + \sigma_i^k*$, dicha estrategia σ_i' es una respuesta estrictamente mejor a σ_{-i}^* que σ_i^*. En efecto,

$$\begin{aligned} U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_{\mathrm{i}}', \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) = & \sum_{h \neq j, h \neq k} \sigma_i^h * U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, s_i^h, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) + \\ & + (\sigma_i^j* + \sigma_i^k*)\, U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, s_i^k, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) > \\ & > U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*\ , \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) = \\ & = \sum_{h \neq j, h \neq k} \sigma_i^h * U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, s_i^h, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) + \\ & + \sigma_i^j * U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, s_i^j, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) + \\ & + \sigma_i^k * U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \ , \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) \end{aligned}$$

En consecuencia, σ_i^* no es respuesta óptima a σ_{-i}^* , lo que contradice la hipótesis y prueba la condición «solo si».

Un perfil de estrategias mixtas es un equilibrio de Nash si y sólo si para cada jugador, todas las estrategias puras soporte de su estrategia mixta son una respuesta óptima a la combinación de estrategias de equilibrio del resto de los jugadores.

Esto significa que las estrategias mixtas de equilibrio asignan una probabilidad estrictamente positiva sólo a aquellas estrategias puras que son respuesta óptima a las estrategias del resto de jugadores. De ello se deduce que una estrategia mixta es respuesta óptima a estrategias (puras o mixtas) dadas, sólo si sus estrategias puras soporte lo son también. En consecuencia, las estrategias puras soporte de una estrategia mixta de equilibrio producen ganancias iguales.

En realidad, esta propiedad es generalizable a cualquier perfil de estrategias y no sólo a aquellas que forman parte de un EN. En efecto, si un jugador tiene una estrategia mixta σ_i que es respuesta óptima a una combinación de estrategias del resto de jugadores, entonces cualquier estrategia pura del soporte de σ_i o cualquier estrategia mixta que se pueda formar con algunas o todas las estrategias puras de dicho soporte, son también respuestas óptimas.

Ejemplo 3.5

Volvamos al Juego 3.1:

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Jugador 2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>I</td><td>D</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Jugador 1</td><td>A</td><td>3, 2</td><td>1, 4</td></tr>
<tr><td>C</td><td>1, 3</td><td>2, 1</td></tr>
<tr><td>B</td><td>2, 2</td><td>2, 0</td></tr>
</table>

Este juego tiene un único EN en estrategias mixtas consistente en el perfil [(1/2, 0, 1/2), (1/2, 1/2)]. Como se demuestra a continuación, cualquier estrategia del jugador 1 cuyo soporte esté contenido en el conjunto {A, B}, incluidas las estrategias puras A y B, es respuesta óptima a la estrategia mixta del jugador 2, $\sigma_2^* = (1/2, 1/2)$. Del mismo modo, cualquier estrategia del jugador 2 (pura o mixta) es respuesta óptima a la estrategia $\sigma_1^* = (1/2, 0, 1/2)$ del jugador 1.

a) Dada la estrategia $\sigma_2^* = (1/2, 1/2)$ del jugador 2, el jugador 1 obtiene las mismas ganancias al utilizar distintas estrategias con soporte {A, B}:

$$U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} = (1/2 \quad 0 \quad 1/2)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = (5/2 \quad 3/2)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 2$$

$$U_1(\mathrm{A}, \sigma_2^*) = (1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = (3 \quad 1)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 2$$

$$U_1(\mathrm{B}, \sigma_2^*) = (0 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = (2 \quad 2)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 2$$

$$U_1((1/3, 0, 2/3), \sigma_2^*) = (1/3 \quad 0 \quad 2/3)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = (7/3 \quad 5/3)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 2$$

En general, dada la estrategia σ_2^* del jugador 2, cualquier estrategia del jugador 1 $\sigma_1 = (p_1^k, 0, 1 - p_1^k)$ que tiene soporte {A, B} genera una ganancia de 2 para el jugador 1:

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2^*) = (p_1^k \quad 0 \quad 1 - p_1^k)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = (2 + p_1^k \quad 2 - p_1^k)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 2$$

b) Dada la estrategia $\sigma_1^* = (1/2,\ 0,\ 1/2)$ del jugador 1, el jugador 2 obtiene las mismas ganancias al utilizar distintas estrategias:

$$U_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_2 \sigma_2^{*t} = (1/2 \quad 0 \quad 1/2)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = (2 \quad 2)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 2$$

$$U_2(\sigma_1^*, \mathrm{I}) = (1/2 \quad 0 \quad 1/2)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$U_2(\sigma_1^*, \mathrm{D}) = (1/2 \quad 0 \quad 1/2)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (2 \quad 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$U_2(\sigma_1^*, (4/5,\ 1/5)) = (1/2 \quad 0 \quad 1/2)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = (2 \quad 2)\begin{pmatrix} 4/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = 2$$

En general, dada la estrategia σ_1^* del jugador 1 cualquier estrategia del jugador 2 $\sigma_2 = (p_2^1,\ 1 - p_2^1)$, genera una ganancia de 2 para el jugador 2:

$$U_2(\sigma_1^*, \sigma_2) = (1/2 \quad 0 \quad 1/2)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_2^1 \\ 1 - p_2^1 \end{pmatrix} = (2 \quad 2)\begin{pmatrix} p_2^1 \\ 1 - p_2^1 \end{pmatrix} = 2$$

Ejemplo 3.6

Consideremos el siguiente juego denominado **Piedra-Papel-Tijeras**:

Dos jugadores eligen simultáneamente uno de los siguientes objetos: piedra (R), papel (P) o tijeras (T). Normalmente, cada jugador hace un gesto que representa una elección entre piedra (puño cerrado), papel (mano extendida) o tijeras (dedos anular y corazón extendidos). Si los dos jugadores eligen el mismo objeto, hay empate y cada uno de ellos obtiene un pago de cero. Si eligen distinto objeto, el que gana recibe un euro del que pierde, de acuerdo con las reglas siguientes:

a) Piedra gana a tijeras (porque una piedra es capaz de romper unas tijeras).
b) Tijeras gana a papel (porque las tijeras cortan al papel).
c) Papel gana a piedra (porque el papel envuelve a la piedra).

La representación del juego en forma estratégica es:

		Jugador 2		
		R	P	T
Jugador 1	R	0, 0	−1, 1	1, −1
	P	1, −1	0, 0	−1, 1
	T	−1, 1	1, −1	0, 0

En este juego, para cualquier jugador la estrategia mixta $\sigma^* = (1/3, 1/3, 1/3)$ es respuesta óptima a sí misma, es decir, el perfil (σ^*, σ^*) es un equilibrio de Nash. Se puede demostrar que cualquier estrategia σ, cuyo soporte sea un subconjunto del soporte de σ^* es también respuesta óptima a σ^*.

Por ejemplo, dada la estrategia del jugador 2 $\sigma_2^* = (1/3, 1/3, 1/3)$, el jugador 1 obtiene los siguientes pagos con las siguientes estrategias:

a) $\sigma_1^* = (1/3, 1/3, 1/3)$:

$$U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} = (1/3 \quad 1/3 \quad 1/3)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 0$$

b) $\sigma_1 = (1/2, 0, 1/2)$:

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2^*) = \sigma_1 A_1 \sigma_2^{*t} = (1/2 \quad 0 \quad 1/2)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 0$$

c) $\sigma_1 = (1, 0, 0)$:

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2^*) = \sigma_1 A_1 \sigma_2^{*t} = (1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 0$$

d) $\sigma_1 = (p_1^1, p_1^2, 1 - p_1^1 - p_1^2)$:

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2^*) = \sigma_1 A_1 \sigma_2^{*t} = (p_1^1, p_1^2, 1 - p_1^1 - p_1^2)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= (p_1^1 + 2p_1^2 - 1, 1 - 2p_1^1 - p_1^2, p_1^1 - p_1^2)\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 0$$

Obsérvese que en d) hemos considerado una estrategia mixta cualquiera para el jugador 1. De hecho, la estrategia considerada en a) es la particularización de la considerada en d), para $p_1^1 = 1/3$, $p_1^2 = 1/3$. En b) tenemos la particularización de d) para $p_1^1 = 1/2$, $p_1^2 = 0$. En c) tenemos la particularización de d) para $p_1^1 = 1$, $p_1^2 = 0$.

Cálculo de los equilibrios de Nash en estrategias mixtas en juegos 2 × 2

Si bien la definición ampliada del equilibrio de Nash para dar cabida a las estrategias mixtas no parece diferenciarse de aquella vista para las estrategias puras, el cálculo de los EN en estrategias mixtas propias (es decir, con soporte no unitario) se complica bastante cuando tratamos juegos con más de dos jugadores o con dos jugadores y más de dos estrategias por jugador.

En esta sección vamos a abordar al cálculo de los EN en estrategias mixtas en juegos 2 × 2, es decir, en aquellos juegos finitos bipersonales en los que el conjunto de estrategias puras de cada jugador está formado por dos elementos, es decir, que cada jugador únicamente dispone de dos estrategias.

Para el cálculo de los equilibrios de Nash en estrategias mixtas en juegos de este tipo utilizaremos la siguiente propiedad de las estrategias mixtas: **una estrategia mixta será respuesta óptima a otra estrategia (pura o mixta) dada sólo si sus estrategias puras soporte son respuesta óptima. Esto implica que tales estrategias puras producen ganancias iguales y máximas, dada la estrategia del otro jugador.**

Esta propiedad permite obtener EN en estrategias mixtas de un juego 2 × 2, apoyándose en una representación gráfica, en los siguientes pasos:

1. Se fijan estrategias mixtas genéricas para los dos jugadores: sean $(p, 1 - p)$ y $(q, 1 - q)$ estrategias mixtas genéricas para los jugadores 1 y 2 respectivamente.
2. Para el jugador 1, se calcula la utilidad esperada que obtiene de cada una de sus estrategias puras cuando la estrategia del jugador 2 es $(q, 1 - q)$.
3. A partir de 2 se calcula la correspondencia de respuesta óptima del jugador 1, $R_1(q)$.
4. Para el jugador 2, se calcula la utilidad esperada que obtiene de cada una de sus estrategias puras cuando la estrategia del jugador 1 es $(p, 1 - p)$.
5. A partir de 4 se calcula la correspondencia de respuesta óptima del jugador 2 $R_2(p)$.
6. En el plano $p - q$ se representan gráficamente las correspondencias $R_1(q)$ y $R_2(p)$, obteniéndose los equilibrios de Nash en estrategias mixtas en los puntos en los que ambas se cortan.

Este procedimiento se basa en la conjunción de las propiedades de las estrategias mixtas de equilibrio y el cálculo de las estrategias puras de respuesta óptima ante una estrategia mixta dada.

Ejemplo 3.7

En el juego de las monedas:

		Jugador 2	
		Cara	Cruz
Jugador 1	Cara	1, −1	−1, 1
	Cruz	−1, 1	1, −1

1. Sean $(p, 1-p)$ y $(q, 1-q)$ estrategias mixtas genéricas para los jugadores 1 y 2 respectivamente.

2. Fijada la estrategia mixta genérica $(q, 1-q)$ del jugador 2, para el jugador 1 calculamos:

$$U_1(Cara, (q, 1-q)) = q(1) + (1-q)(-1) = 2q - 1$$
$$U_1(Cruz, (q, 1-q)) = q(-1) + (1-q)(1) = 1 - 2q$$

3. Se tiene que

$$\begin{aligned}
U_1(Cara, (q, 1-q)) > U_1(Cruz, (q, 1-q)) \quad &\Leftrightarrow \quad 2q-1 > 1-2q \quad \Leftrightarrow \quad q > 1/2\\
U_1(Cara, (q, 1-q)) < U_1(Cruz, (q, 1-q)) \quad &\Leftrightarrow \quad 2q-1 < 1-2q \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2\\
U_1(Cara, (q, 1-q)) = U_1(Cruz, (q, 1-q)) \quad &\Leftrightarrow \quad 2q-1 = 1-2q \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2
\end{aligned}$$

Por tanto, la respuesta óptima es *Cara* si $q > 1/2$, *Cruz* si $q < 1/2$, y cualquiera si $q = 1/2$.

$$R_1(q) = \begin{cases} p = 0(Cruz) & \text{si} \quad q < 1/2\\ p = 1(Cara) & \text{si} \quad q > 1/2\\ p \in [0, 1] \ \text{(cualquier estrategia)} & \text{si} \quad q = 1/2 \end{cases}$$

Gráficamente la correspondencia de respuesta óptima del jugador 1 a cualquier estrategia mixta del jugador 2 está en la Figura 3.1.

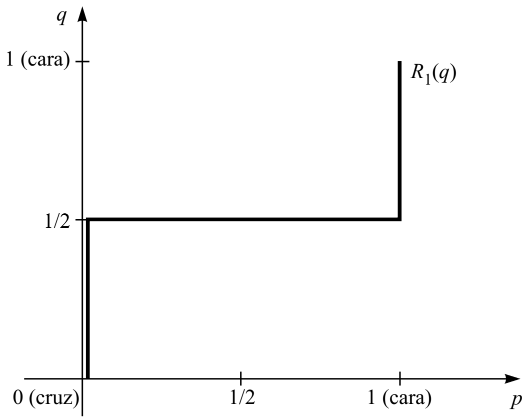


Figura 3.1 Correspondencia de respuesta óptima del jugador 1.

4. Fijada la estrategia mixta genérica $(p, 1-p)$ del jugador 1, para el jugador 2 calculamos:

$$U_2((p, 1-p), Cara) = p(-1) + (1-p)(1) = 1 - 2p$$
$$U_2((p, 1-p), Cruz) = p(1) + (1-p)(-1) = 2p - 1$$

5. Se tiene que

$$U_2((p, 1-p), Cara) > U_2((p, 1-p), Cruz) \iff 1 - 2p > 2p - 1 \iff p < 1/2$$
$$U_2((p, 1-p), Cara) < U_2((p, 1-p), Cruz) \iff 1 - 2p < 2p - 1 \iff p > 1/2$$
$$U_2((p, 1-p), Cara) = U_2((p, 1-p), Cruz) \iff 1 - 2p = 2p - 1 \iff p = 1/2$$

Por tanto, la respuesta óptima es *Cara* si $p < 1/2$, *Cruz* si p > 1/2, y cualquiera si $p = 1/2$.

$$R_2(p) = \begin{cases} q = 1(Cara) & \text{si} \quad p < 1/2 \\ q = 0(Cruz) & \text{si} \quad p > 1/2 \\ q \in [0, 1] \text{ (cualquier estrategia)} & \text{si} \quad p = 1/2 \end{cases}$$

Gráficamente la correspondencia de respuesta óptima del jugador 2 a cualquier estrategia mixta del jugador 1 está en la Figura 3.2.

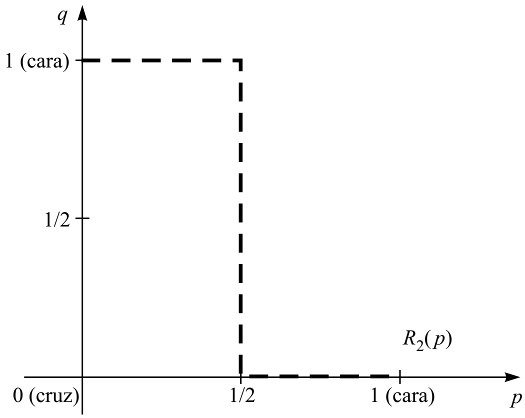


Figura 3.2 Correspondencia de respuesta óptima del jugador 2.

6. En el plano $p - q$ se representan gráficamente las correspondencias $R_1(q)$ y $R_2(p)$, obteniéndose los equilibrios de Nash en estrategias mixtas en los puntos en los que ambas se cortan (Figura 3.3).

Teniendo en cuenta que el jugador 2 es indiferente entre sus estrategias puras y mixtas (le generan la misma utilidad esperada) cuando el jugador 1 juega su estrategia mixta $(p, 1 - p) = (1/2, 1/2)$, y que el jugador 1 es indiferente entre sus estrategias puras y mixtas cuando el jugador 2 juega su estrategia mixta $(q, 1 - q) = (1/2, 1/2)$, podemos decir que el EN en estrategias mixtas es aquel en el que cada jugador juega dicha estrategia mixta, que corresponde al punto en que se cortan las correspondencias de respuesta óptima.

Por tanto,

$$\mathbf{S^{EN} = \{(1/2, 1/2), (1/2, 1/2)\}}$$

Este es el EN en estrategias mixtas del juego ya que ningún jugador tiene incentivo a desviarse unilateralmente (si, por ejemplo, el jugador 1 se desvía unilateralmente de su estrategia mixta de equilibrio tomando cualquier otra estrategia pura o mixta obtiene la misma ganancia esperada que sin desviarse).

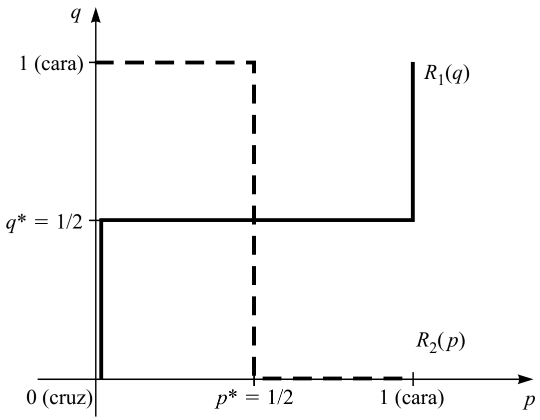


Figura 3.3 Correspondencias de respuesta óptima de ambos jugadores.

Ejemplo 3.8

Cálculo de los equilibrios de Nash del juego **batalla de los sexos.**

		Jugadora 2	
		Cine	Fútbol
Jugador 1	Cine	1, 2	0, 0
	Fútbol	0, 0	2, 1

Como hemos visto en el Capítulo 2, este juego presenta dos EN en estrategias puras: *(Cine, Cine)* y *(Fútbol, Fútbol)*.

Sea $(q, 1 - q)$ una estrategia mixta de 2. La utilidad que el jugador 1 obtiene con cada una de sus estrategias puras es:

$$U_1(Cine, (q, 1 - q)) = 1 \cdot q + (1 - q) \cdot 0 = q$$

$$U_1(Fútbol, (q, 1 - q)) = q \cdot 0 + (1 - q) \cdot 2 = 2 - 2q$$

Se produce la igualdad $q = 2 - 2q$ si y sólo si $q = 2/3$. Cuando $q = 2/3$ el jugador 1 obtiene la misma ganancia de sus dos estrategias puras, y por tanto de cualquiera de sus estrategias mixtas.

La correspondencia de respuesta óptima del jugador 1 es:

$$R_1(q) = \begin{cases} p = 1\,(\mathit{Cine}) & \text{si} \quad q > 2/3 \\ p = 0\ \ (\mathit{Fútbol}) & \text{si} \quad q < 2/3 \\ p \in [0,\ 1]\ \ (\text{cualquier estrategia}) & \text{si} \quad q = 2/3 \end{cases}$$

Sea $(p,\ 1 - p)$ una estrategia mixta del jugador 1. La utilidad que la jugadora 2 obtiene con cada una de sus estrategias puras es:

$$U_2((p,\ 1 - p),\ \mathit{Cine}) = p \cdot 2 + (1 - p) \cdot 0 = 2p$$

$$U_2((p,\ 1 - p),\ \mathit{Fútbol}) = p \cdot 0 + (1 - p) \cdot 1 = 1 - p$$

Se produce la igualdad $2p = 1 - p$ si y sólo si $p = 1/3$. Cuando $p = 1/3$ la jugadora 2 obtiene la misma ganancia de sus dos estrategias puras, y por tanto de cualquiera de sus estrategias mixtas. En consecuencia, cualquier estrategia pura o mixta es respuesta óptima de la jugadora 2 a $(p,\ 1 - p) = (1/3,\ 2/3)$ del jugador 1.

Se tiene que

$$R_2(p) = \begin{cases} q = 1(\mathit{Cine}) & \text{si} \quad p > 1/3 \\ q = 0(\mathit{Fútbol}) & \text{si} \quad p < 1/3 \\ q \in [0,\ 1]\ \ (\text{cualquier estrategia}) & \text{si} \quad p = 1/3 \end{cases}$$

Gráficamente, los equilibrios de Nash surgen de la intersección de las correspondencias de respuesta óptima (Figura 3.4).

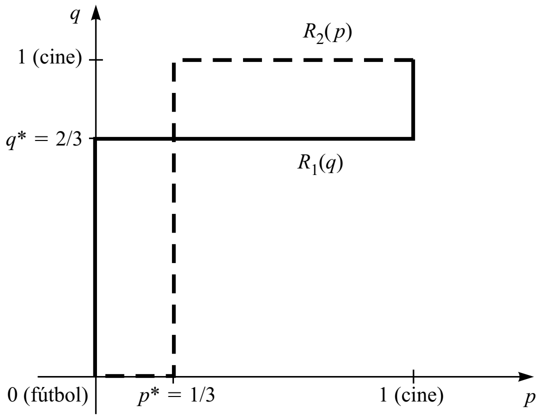


Figura 3.4 Correspondencias de respuesta óptima en la Batalla de los Sexos.

Así pues, el conjunto de perfiles de estrategias que forman un EN es:

$$\mathbf{S^{EN} = \{(Cine,\ Cine),\ (Fútbol,\ Fútbol)\ y\ [(1/3,\ 2/3),\ (2/3,\ 1/3)]\}}$$

Otro procedimiento de cálculo de los EN en estrategias mixtas para juegos 2 × 2

En los juegos finitos la introducción de estrategias mixtas supone, por una parte, la conversión de los conjuntos de estrategias de los jugadores en conjuntos continuos y convexos, y por otra parte, la conversión de las ganancias de los jugadores en funciones continuas y lineales en las probabilidades. Esta característica permite en el caso de los juegos 2 × 2 utilizar el cálculo diferencial para obtener las respuestas óptimas de un jugador a las estrategias mixtas del otro, como ilustraremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.9

Consideremos la siguiente versión del juego Halcón-Paloma, donde $V = 2$ y $C = 4$:

		Jugador 2	
		Paloma	Halcón
Jugador 1	Paloma	1, 1	0, 2
	Halcón	2, 0	−3, −3

Como podemos observar, este juego presenta 2 EN en estrategias puras correspondientes a los perfiles (*Paloma*, *Halcón*) y (*Halcón*, *Paloma*). Veamos si existe algún EN en estrategias mixtas.

Si el jugador 1 juega la estrategia pura *Paloma* con probabilidad p y *Halcón* con probabilidad $(1 - p)$, y del mismo modo el jugador 2 juega *Paloma* con probabilidad q y *Halcón* con probabilidad $(1 - q)$, la utilidad esperada de ambos jugadores es:

$$\begin{aligned} U_1[(p,\ 1-p),\ (q,\ 1-q)] &= pU_1(Paloma,\ (q,\ 1-q)) + (1-p)U_1(Halcón,\ (q,\ 1-q)) = \\ &= p[q(1) + (1-q)(0)] + (1-p)[2q + (-3)(1-q)] = \\ &= 3p + 5q - 4pq - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2[(p,\ 1-p),\ (q,\ 1-q)] &= pU_2(Paloma,\ (q,\ 1-q)) + (1-p)U_2(Halcón,\ (q,\ 1-q)) = \\ &= p[q(1) + (1-q)(2)] + (1-p)[q(0) + (-3)(1-q)] = \\ &= 5p + 3q - 4pq - 3 \end{aligned}$$

El jugador 1 decidirá el valor de p de tal modo que maximice sus ganancias esperadas dada la estrategia mixta del jugador 2:

$$\max_p U_1[(p,\ 1-p),\ (q,\ 1-q)] = 3p + 5q - 4pq - 3$$

sabiendo que $0 \leqslant p \leqslant 1$, y $0 \leqslant q \leqslant 1$.

Si existieran soluciones interiores, se identificarían derivando la utilidad esperada de J1 con respecto a p e igualando a 0. De ese modo obtendríamos:

$$\frac{\partial U_1}{\partial p} = 0 = 3 - 4q$$

- Si $q > 3/4$, entonces $\frac{\partial U_1}{\partial p} < 0$, lo que significa que $p^* = 0$, y el jugador 1 selecciona *Halcón*.
- Si $q < 3/4$, entonces $\frac{\partial U_1}{\partial p} > 0$, lo que significa que $p^* = 1$, y el jugador 1 selecciona *Paloma*.
- Si $q = 3/4$, entonces $\frac{\partial U_1}{\partial p} = 0$, lo que significa que el jugador 1 es indiferente entre sus estrategias puras *Paloma* y *Halcón*, así como con cualquier distribución de probabilidad sobre dichas estrategias puras.

Realizando el mismo proceso de cálculo para el jugador 2:

$$\max_{q} U_2[(p, 1 - p), (q, 1 - q)] = 5p + 3q - 4pq - 3$$

sabiendo que $0 \leqslant p \leqslant 1$, y $0 \leqslant q \leqslant 1$.

Si existieran soluciones interiores, se identificarían derivando la utilidad esperada de J2 con respecto a q e igualando a 0. De ese modo obtendríamos:

$$\frac{\partial U_2}{\partial q} = 0 = 3 - 4p$$

- Si $p > 3/4$, entonces $\frac{\partial U_2}{\partial q} < 0$, lo que significa que $q^* = 0$, y el jugador 2 selecciona *Halcón*.
- Si $p < 3/4$, entonces $\frac{\partial U_2}{\partial q} > 0$, lo que significa que $q^* = 1$, y el jugador 2 selecciona *Paloma*.
- Si $p = 3/4$, entonces $\frac{\partial U_2}{\partial q} = 0$, lo que significa que el jugador 2 es indiferente entre sus estrategias puras *Paloma* y *Halcón*, así como con cualquier distribución de probabilidad sobre dichas estrategias puras.

Por tanto, se tienen las funciones $R_1(q)$ y $R_2(p)$ que se representan gráficamente en la Figura 3.5.

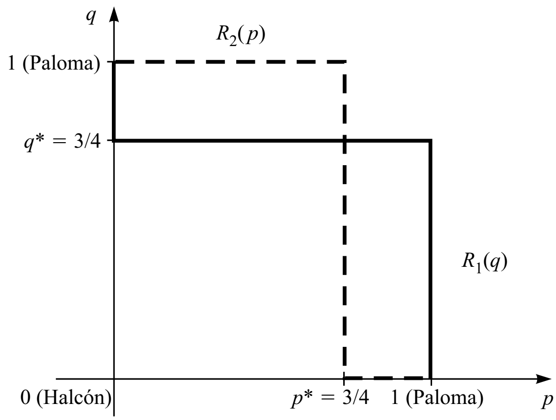


Figura 3.5 Correspondencias de respuesta óptima en el juego Halcón-Paloma.

A la vista de la representación gráfica, se obtienen los siguientes equilibrios de Nash:

$\mathbf{S}^{\mathbf{EN}}\{(Paloma, Halcón), (Halcón, Paloma),$

$$[(p = 3/4, 1 - p = 1/4), (q = 3/4, 1 - q = 1/4)]\}$$

Análisis general de los equilibrios de Nash en estrategias mixtas en juegos 2 × 2

Basándonos en la aplicación del método de igualación de las ganancias esperadas, podemos realizar un análisis generalizado de los equilibrios de Nash en estrategias mixtas para todo juego con dos jugadores y dos estrategias puras para cada jugador. Consideremos el siguiente juego:

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	a_{AI}, b_{AI}	a_{AD}, b_{AD}
	B	a_{BI}, b_{BI}	a_{BD}, b_{BD}

Sea $(p, 1 - p)$ una estrategia mixta genérica para el jugador 1, y $(q, 1 - q)$ una estrategia mixta genérica para el jugador 2. Aplicando el método de igualación, y considerando fija la estrategia $(p, 1 - p)$ del jugador 1, las utilidades esperadas del jugador 2 cuando juega la estrategias puras I y D son, respectivamente:

$$U_2((p, 1 - p), \mathrm{I}) = p \cdot b_{AI} + (1 - p) \cdot b_{BI} = b_{BI} + p(b_{AI} - b_{BI})$$

$$U_2((p, 1 - p), \mathrm{D}) = p \cdot b_{AD} + (1 - p) \cdot b_{BD} = b_{BD} + p(b_{AD} - b_{BD})$$

Igualando ambas, y despejando el parámetro p obtenemos:

$$U_2((p, 1 - p), \mathrm{I}) = u_2((p, 1 - p), \mathrm{D}); \qquad \mathrm{b_{BI}} + p(\mathrm{b_{AI}} - \mathrm{b_{BI}}) = \mathrm{b_{BD}} + p(\mathrm{b_{AD}} - \mathrm{b_{BD}});$$

$$p = (\mathrm{b_{BD}} - \mathrm{b_{BI}})/(\mathrm{b_{AI}} + \mathrm{b_{BD}} - \mathrm{b_{BI}} - \mathrm{b_{AD}})$$

Del mismo modo, considerando dada la estrategia $(q, 1 - q)$ del jugador 2, las utilidades esperadas del jugador 1 cuando juega la estrategias puras A y B son, respectivamente:

$$U_1(\mathrm{A}, (q, 1 - q)) = q \cdot \mathrm{a_{AI}} + (1 - q) \cdot \mathrm{a_{AD}} = \mathrm{a_{AD}} + q(\mathrm{a_{AI}} - \mathrm{a_{AD}})$$

$$U_1(\mathrm{B}, (q, 1 - q)) = q \cdot \mathrm{a_{BI}} + (1 - q) \cdot \mathrm{a_{BD}} = \mathrm{a_{BD}} + q(\mathrm{a_{BI}} - \mathrm{a_{BD}})$$

Igualando y despejando, de manera análoga, deducimos:

$$q = (\mathrm{a_{BD}} - \mathrm{a_{AD}})/(\mathrm{a_{AI}} + \mathrm{a_{BD}} - \mathrm{a_{BI}} - \mathrm{a_{AD}})$$

Resumiendo:

$$p = (\mathrm{b_{BD}} - \mathrm{b_{BI}})/(\mathrm{b_{AI}} + \mathrm{b_{BD}} - \mathrm{b_{BI}} - \mathrm{b_{AD}}) \quad \text{y} \quad (1 - p) = (\mathrm{b_{AI}} - \mathrm{b_{AD}})/(\mathrm{b_{AI}} + \mathrm{b_{BD}} - \mathrm{b_{BI}} - \mathrm{b_{AD}})$$

$$q = (\mathrm{a_{BD}} - \mathrm{a_{AD}})/(\mathrm{a_{AI}} + \mathrm{a_{BD}} - \mathrm{a_{BI}} - \mathrm{a_{AD}}) \quad \text{y} \quad (1 - q) = (\mathrm{a_{AI}} - \mathrm{a_{BI}})/(\mathrm{a_{AI}} + \mathrm{a_{BD}} - \mathrm{a_{BI}} - \mathrm{a_{AD}})$$

Si los valores así obtenidos de p y q pertenecen al intervalo cerrado $[0, 1]$, diremos que el perfil $[(p, 1 - p), (q, 1 - q)]$ es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Como puede apreciarse, la estrategia mixta de equilibrio para cada uno de los jugadores en todo juego 2×2 depende exclusivamente de las ganancias del otro jugador en cada perfil de estrategias puras, y no de las ganancias propias.

Sin embargo, ello no significa que las ganancias de un jugador no afecten a su estrategia de equilibrio. Por ejemplo, cuando un jugador posee una estrategia estrictamente dominante, éste tiene que seleccionar en equilibrio esa estrategia, independientemente de las ganancias del resto de jugadores, pues con ella siempre estará maximizando sus ganancias.

Cálculo sistemático de los EN en estrategias mixtas de un juego bipersonal finito

Para juegos bipersonales finitos existe un procedimiento de cálculo general de los EN en estrategias mixtas. Dicho procedimiento consta de las siguientes etapas:

1. Eliminar todas las estrategias puras que no sobrevivan al proceso de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas.

2. Si el juego resultante es 2×2 aplicar cualquiera de los procedimientos válidos, ya analizados, para dichos juegos.

3. Si en el juego resultante al menos alguno de los jugadores tiene un conjunto de estrategias puras superior a 2 (y el otro jugador como mínimo 2):

- Analizamos la existencia de EN para las distintas combinaciones posibles de soportes de estrategias puras de cada jugador, es decir, buscamos los EN de todos los juegos que se pueden formar con los subconjuntos de estrategias puras de cada jugador.

- Los EN encontrados para cada combinación de soportes se confirmarán como EN del juego completo, si son validados al considerar las estrategias que no figuran en los soportes actualmente utilizados. Esto significa que las estrategias de los perfiles propuestos como EN deberán mantenerse como respuestas óptimas de un jugador con respecto al resto de estrategias del perfil, cuando ampliamos el conjunto soporte de dicho jugador (es decir, cuando permitimos que puedan entrar en juego todas las estrategias disponibles para el jugador).

Si en el juego reducido resultante al menos uno de los jugadores tiene un conjunto de estrategias puras unitario, todos los perfiles de estrategias puras o mixtas del juego reducido son ENs.

Ilustremos dicho procedimiento con el Ejemplo 3.10.

Ejemplo 3.10

Se considera el siguiente juego:

Juego 3.2

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	3, 2	4, 3	1, 4
	C	1, 3	7, 0	2, 1
	B	2, 2	8, −5	2, 0

Vamos a calcular todos los equilibrios de Nash de este juego. Como podemos observar, la estrategia pura C del jugador 2 se encuentra estrictamente dominada por la estrategia D de dicho jugador. Por tanto, dicha estrategia nunca va a formar parte de un EN en estrategias puras ni mixtas (ni va a impedir, aportando una respuesta mejor, que un perfil sea EN), así que podemos eliminarla a la hora de calcularlos. Obtendremos así el juego reducido siguiente, que no es otro que el Juego 3.1, que ya no tiene, para ninguno de los jugadores, estrategias estrictamente dominadas.

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	3, 2	1, 4
	C	1, 3	2, 1
	B	2, 2	2, 0

Para calcular los EN del juego seguimos el siguiente proceso:

a) Calculamos primero los EN en estrategias puras (ambos soportes unitarios): En este juego no existen.

b) Calculamos ahora los EN que tengan soporte unitario en la estrategia de un sólo jugador:

b_1) Soporte unitario en la estrategia del jugador 1:
En nuestro juego, el soporte no puede ser A, pues la única respuesta óptima es D, ni C, pues la única respuesta óptima es I, ni B, pues la única respuesta óptima es I.
b_2) Soporte unitario en la estrategia del jugador 2:
En nuestro juego, el soporte no puede ser I (única respuesta óptima A), aunque sí puede ser D, pues tiene como respuestas óptimas a C y B.
Veamos si con un soporte unitario {D} del jugador 2 y con soporte {C, B} del jugador 1 (es decir, con soporte producto {C, B} × D) existe algún EN:
Ya hemos indicado que dada la estrategia D del jugador 2, las estrategias C y B son respuestas óptimas por parte del jugador 1 y, por tanto, cualquier estrategia mixta que se pueda formar con ellas también lo es.
Dada una estrategia mixta $(0, p, 1 - p)$ del jugador 1 sobre el soporte {C, B}, veamos para qué valores es D respuesta óptima:

Ganancia esperada para el jugador 2 si elige I: $p \cdot 3 + (1 - p) \cdot 2 = p + 2$

Ganancia esperada para el jugador 2 si elige D: $p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0 = p$

Querrá mezclar C y B si $p + 2 = p$, lo cual no ocurre nunca, pues siempre preferirá estrictamente I.
Por tanto, no hay ningún EN con este soporte.
Concluimos que en cualquier EN, el soporte para el jugador 1 debe ser {A, C}, o bien {A, B}, o bien {C, B}, o bien {A, C, B}, y el soporte para el jugador 2 debe ser necesariamente {I, D}.

c) Calculamos ahora los EN que tengan soporte no unitario en la estrategia de ambos jugadores:

c_1) Soporte {A, C} × {I, D}, en cuyo caso el posible EN sería $[(p, 1 - p, 0), (q, 1 - q)]$.
Dada la estrategia $(q, 1 - q)$ del jugador 2:

La ganancia esperada para el jugador 1 si elige A es: $q \cdot 3 + (1 - q) \cdot 1 = 2q + 1$
La ganancia esperada para el jugador 1 si elige C es: $q \cdot 1 + (1 - q) \cdot 2 = -q + 2$
El jugador 1 querrá mezclar A y C si $2q + 1 = -q + 2$, es decir, si $q = 1/3$

Dada la estrategia $(p, 1 - p, 0)$ del jugador 1:

La ganancia esperada para el jugador 2 si elige I es: $p \cdot 2 + (1 - p) \cdot 3 = -p + 3$
La ganancia esperada para el jugador 2 si elige D: $p \cdot 4 + (1 - p) \cdot 1 = 3p + 1$
El jugador 2 querrá mezclar I y D si $-p + 3 = 3p + 1$, es decir, si $p = 1/2$.

El perfil [(1/2, 1/2, 0), (1/3, 2/3)] es por tanto un posible candidato a EN. Para que sea efectivamente un EN hace falta que (1/2, 1/2, 0) sea respuesta óptima a (1/3, 2/3), es decir, que el jugador 1 no tenga incentivos para utilizar otra estrategia (ya sea B o que la incluya), dada la estrategia (1/3, 2/3) de J2. Veamos si es así:

$$U_1[(1/2, 1/2, 0), (1/3, 2/3)] = 1/2 \cdot 1/3 \cdot 3 + 1/2 \cdot 2/3 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1/3 \cdot 1 + 1/2 \cdot 2/3 \cdot 2 = 5/3$$

Sin embargo, la ganancia de J1 si juega B es:

$$U_1[B, (1/3, 2/3)] = 2/3 + 2 \cdot 2/3 = 2 > 5/3$$

Lo que significa que (1/2, 1/2, 0) para el jugador 1 no es respuesta óptima a (1/3, 2/3) del jugador 2. Luego el perfil indicado no es un EN. Por tanto, **no hay ningún EN con este soporte.**

c_2) Soporte {A, B} × {I, D}, en cuyo caso el posible EN sería $[(p, 0, 1-p), (q, 1-q)]$

Dada la estrategia $(q, 1-q)$ del jugador 2:

La ganancia esperada para el jugador 1 si elige A es: $q \cdot 3 + (1-q) \cdot 1 = 2q + 1$
La ganancia esperada para el jugador 1 si elige B es: $q \cdot 2 + (1-q) \cdot 2 = 2$
El jugador 1 querrá mezclar A y B si $2q + 1 = 2$, es decir, si $q = 1/2$.

Dada la estrategia $(p, 0, 1-p)$ del jugador 1:

La ganancia esperada para el jugador 2 si elige I es: $p \cdot 2 + (1-p) \cdot 2 = 2$
La ganancia esperada para el jugador 2 si elige D es: $p \cdot 4 + (1-p) \cdot 0 = 4p$
El jugador 2 querrá mezclar I y D si $2 = 4p$, es decir, si $p = 1/2$.

De nuevo, un perfil, [(1/2, 0, 1/2), (1/2, 1/2)] es un posible candidato a EN. Para que sea efectivamente un EN hace falta que el jugador 1 no tenga incentivos a utilizar otra estrategia (en este caso C o alguna que la incluya), dada la estrategia (1/2, 1/2) del jugador 2:

$$U_1[(1/2, 0, 1/2), (1/2, 1/2)] = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 3 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot 2 = 2$$

La ganancia del jugador 1 si juega C es:

$$U_1[\mathrm{C}, (1/2, 1/2)] = 1/2 + 2 \cdot 1/2 = 3/2 < 2$$

Lo que significa que (1/2, 0, 1/2) para el jugador 1 sí es respuesta óptima a (1/2, 1/2) del jugador 2. Luego el perfil indicado **[(1/2, 0, 1/2), (1/2, 1/2)] sí es un EN**.

c_3) Soporte {C, B} × {I, D}, en cuyo caso el posible EN sería $[(0, p, 1-p), (q, 1-q)]$

Dada la estrategia $(q, 1-q)$ del jugador 2:

La ganancia esperada para el jugador 1 si elige C es: $q \cdot 1 + (1-q) \cdot 2 = -q + 2$
La ganancia esperada para el jugador 1 si elige B es: $q \cdot 2 + (1-q) \cdot 2 = 2$
El jugador 1 querrá mezclar si $-q + 2 = 2$, es decir, si $q = 0$.

Pero si $q = 0$ significa que el jugador 2 está usando un soporte unitario, lo cual excluye, como ya hemos visto en el apartado b_2, que $[(0, p, 1-p), (q, 1-q)]$ sea un EN. Por tanto, **no hay ningún EN con este soporte.**

c_4) Soporte {A, C, B} × {I, D}, en cuyo caso el posible EN sería $[(p, t, 1-p-t), (q, 1-q)]$

Dada la estrategia $(q, 1-q)$ del jugador 2:

La ganancia esperada para el jugador 1 si elige A es: $q \cdot 3 + (1-q) \cdot 1 = 2q + 1$
La ganancia esperada para el jugador 1 si elige C es: $q \cdot 1 + (1-q) \cdot 2 = -q + 2$
La ganancia esperada para el jugador 1 si elige B es: $q \cdot 2 + (1-q) \cdot 2 = 2$

El jugador 1 querrá mezclar A, C y B si $2q + 1 = -q + 2 = 2$ (lo cual no ocurre nunca).

Por tanto, **no hay ningún EN con este soporte.**

En conclusión, el único EN del juego reducido es [(1/2, 0, 1/2), (1/2, 1/2)]. En cuanto al juego original, considerando la estrategia C del jugador 2 podemos concluir: $\mathbf{S^{EN}}$ **= {[(1/2, 0, 1/2), (1/2, 0, 1/2)]}**.

Teoremas de existencia del equilibrio de Nash

Antes de enunciar y de poder demostrar, siquiera parcialmente, los teoremas que aseguran la existencia de equilibrio de Nash para algunas clases amplias e importantes de juegos, será necesario establecer alguna terminología nueva y repasar algunos conceptos conocidos, referidos a conjuntos en espacios euclideos $\boldsymbol{R}^k$, y a funciones y correspondencias entre dichos conjuntos.

Repaso terminológico

Dado un conjunto $A \subset \boldsymbol{R}^k$, decimos que es:

Abierto si es entorno de cualquiera de sus puntos, es decir, si dado cualquier punto $\boldsymbol{x} \in A$, existe una bola abierta $B(\boldsymbol{x}, r)$ de centro $\boldsymbol{x}$ y radio r contenida en A.

Cerrado si su complementario $\boldsymbol{R}^k - A$ es abierto. Es decir, dado cualquier punto $\boldsymbol{x} \notin A$, existe una bola abierta $B(\boldsymbol{x}, r)$ de centro $\boldsymbol{x}$ y radio r ninguno de cuyos puntos pertenece a A.

Acotado si existe un $r > 0$ tal que dados dos puntos cualesquiera $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$, la distancia entre $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ es menor que r.

Compacto si es cerrado y acotado.

Convexo si dados dos puntos cualesquiera $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$, cualquier combinación convexa de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ pertenece a A, es decir, para todo $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda\boldsymbol{x} + (1 - \lambda)\boldsymbol{y} \in A$.

Los ejemplos más sencillos e importantes de conjuntos compactos y convexos en $\boldsymbol{R}^k$ son los intervalos cerrados I, los símplices de dimensión cualquiera Δ, los productos cartesianos de intervalos cerrados y los productos cartesianos de símplices.

Dada una función f: $A \to B$, con dominio $A \subset \boldsymbol{R}^k$ y recorrido en $B \subset \boldsymbol{R}^h$, decimos que es:

Continua en A si para todo $\boldsymbol{x} \in A$, la sucesión $\{x_k\}$ que tenga por límite $\boldsymbol{x}$ implica que la sucesión de imágenes $\{f(x_k)\}$ tendrá por límite $f(x)$.

Llamamos **correspondencia** de A en B, y la denotamos g: $A \to \to B$, a toda regla que asigna a cada punto de A un subconjunto de B. Es decir, g: $A \to \to B$ es una correspondencia de A en B si para todo $\boldsymbol{x} \in A$, $g(\boldsymbol{x}) \subset B$. En el caso particular en que $g(\boldsymbol{x})$ es unitario para todo $\boldsymbol{x}$, g es una función.

Dada una correspondencia g: $A \to \to B$, donde $A \subset \boldsymbol{R}^k$, $B \subset \boldsymbol{R}^h$ y B es compacto:

Decimos que es **hemicontinua superiormente** en A si el grafo de g, que es el conjunto $\Phi_g = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}_{k+h} : \boldsymbol{x} \in A, \boldsymbol{y} \in g(\boldsymbol{x})\} \subset A \times B$, es cerrado en $A \times B$. También puede decirse que g es hemicontinua superiormente si siempre que las sucesiones $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, con $x_k \in A$ e $y_k \in g(\boldsymbol{x_k})$ tengan por límite $\boldsymbol{x} \in A$ e $\boldsymbol{y} \in B$, respectivamente, se verifica que $\boldsymbol{y} \in g(\boldsymbol{x})$. Obsérvese que la hemicontinuidad superior es una generalización de la continuidad. De hecho, en el caso particular en que $g(x)$ fuese unitario para todo x de A, que el grafo de g sea cerrado implica que g es una función continua en A.

Si A = B, decimos que $\boldsymbol{x} \in$ A es un **punto fijo** de la correspondencia $\boldsymbol{g}$ si $\boldsymbol{x} \in g(\boldsymbol{x})$. Lo anterior vendría a significar $\boldsymbol{x} = g(\boldsymbol{x})$ si g fuese una función.

Dada una función real f: A → B, con dominio $A \subset \boldsymbol{R}^k$ convexo y recorrido en $B \subset \boldsymbol{R}$, decimos que es:

Cóncava si dados dos puntos cualesquiera $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in$ A, la imagen de cualquier combinación convexa de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ es igual o mayor que la correspondiente combinación convexa de las imágenes. Es decir, $f(\lambda \boldsymbol{x} + (1 - \lambda)\boldsymbol{y}) \geqslant \lambda f(\boldsymbol{x}) + (1 - \lambda) f(\boldsymbol{y})$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in$ A.
Cuasicóncava si $f(\lambda \boldsymbol{x} + (1 - \lambda)\boldsymbol{y}) \geqslant \min\{f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\}$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in$ A. Un modo equivalente de definir la quasiconcavidad es que el conjunto de contorno superior $\Omega_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in A : f(\boldsymbol{x}) \geqslant \alpha\}$ sea convexo para todo $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

En la Figura 3.6 se ilustra la concavidad y cuasiconcavidad para funciones reales de variable real, con dominio en el intervalo [0, 1].

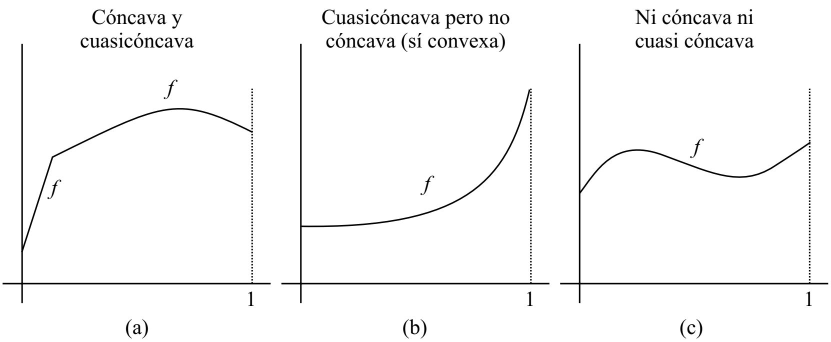


Figura 3.6 Ilustración de la concavidad y cuasiconcavidad.

A continuación enunciaremos sin demostración el teorema del punto fijo de Kakutani, y demostraremos, basándonos en él, dos teoremas de existencia de equilibrios de Nash. El primero establece la existencia de equilibrios en estrategias puras para algunos tipos de juegos infinitos, mientras que el segundo, que es un corolario del anterior, establece la existencia de equilibrios en estrategias mixtas para todos los juegos finitos.

Teorema 3.2 Teorema del punto fijo de Kakutani

Sea g: A → → A una correspondencia con dominio en $A \subset \boldsymbol{R}^k$, donde A es no vacío, compacto y convexo. Si g es hemicontinua superiormente, y además $g(\boldsymbol{x}) \subset$ A es convexo y no vacío para todo $\boldsymbol{x}$ de A, entonces existe un punto fijo $\boldsymbol{x}^*$ de g, es decir, un punto $\boldsymbol{x}^*$ de A tal que $\boldsymbol{x}^* \in g(\boldsymbol{x}^*)$.

En la Figura 3.7, se ilustra este resultado mediante tres situaciones. En la primera se verifican las hipótesis del teorema, en la segunda falla que $g(\boldsymbol{x}_0)$ sea convexo, y en la tercera falla que g sea hemicontinua superiormente en $\boldsymbol{x}_0$.

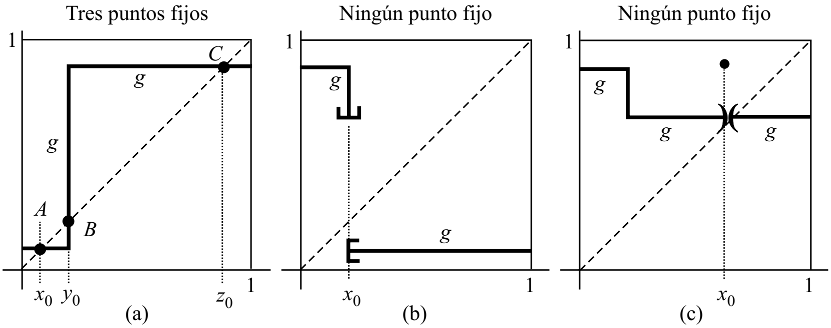


Figura 3.7 Ilustración del teorema de Kakutani.

Damos a continuación el enunciado y demostración de los dos teoremas de existencia más importantes.

Teorema 3.3

Sea el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, tal que, para todo jugador i, se cumple:

a) S_i es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de un espacio $\boldsymbol{R^k}$.
b) u_i es continua en todo su dominio $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, y es cuasicóncava en la variable s_i.

Entonces, existe al menos un EN en estrategias puras de G.

Demostración:

Definamos, para cada jugador i, su correspondencia de respuesta óptima R_i, que asigna a cada perfil de estrategias puras $\boldsymbol{s} = (s_1, ..., s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, ..., s_n) = (s_i, \boldsymbol{s}_{-i})$ el conjunto $R_i(\boldsymbol{s})$ de las estrategias puras de i que son respuesta óptima a $\boldsymbol{s}_{-i}$. Es decir, $R_i(\boldsymbol{s}) = \{x_i \in S_i : x_i$ es solución del problema $\max\limits_{y_i \in S_i} u_i(y_i, \boldsymbol{s}_{-i})\}$

Definamos ahora la correspondencia global de respuesta óptima R como aquella que asigna a cada perfil $\boldsymbol{s}$ el producto cartesiano de los conjuntos de respuesta óptima individuales. Así pues, R es una correspondencia de $\boldsymbol{S}$ en $\boldsymbol{S}$ tal que

$$R(\boldsymbol{s}) = R_1(\boldsymbol{s}) \times \cdots \times R_n(\boldsymbol{s}) = \{t = (t_1, ..., t_n) \in \boldsymbol{S} : t_i \in R_i(\boldsymbol{s}), \forall i = 1, 2, ..., n\}$$

Veamos que R es hemicontinua superiormente. $\boldsymbol{S}$ es no vacío, compacto y convexo por ser $\boldsymbol{S}$ el producto cartesiano de los S_i. Para cada $i = 1, 2, ..., n$, la función u_i es continua en S, lo que implica que es continua en S_i. Por hipótesis S_i es no vacío y compacto. El teorema de Weierstrass asegura que el problema $\max\limits_{y_i \in S_i} u_i(y_i, \boldsymbol{s}_{-i})$ tiene solución óptima, por lo que $R_i(s)$ es no vacío y, por tanto, $R(s)$ es no vacío. Nos falta ver que si las sucesiones $\{s^k\}$, $\{t^k\}$, con $s^k \in S$, $t^k \in R(s^k)$, para cada k, tienen por límite $\boldsymbol{s} \in S$ y $\boldsymbol{t} \in S$, respectivamente, ello implica que $\boldsymbol{t} \in R(\boldsymbol{s})$. Pero

$$\lim_{k\to\infty} s^k = s \in S \quad \Leftrightarrow \quad \text{Para cada jugador } i,\ \lim_{k\to\infty} s_i^k = s_i \in S_i$$

$$\lim_{k\to\infty} t^k = t \in S \quad \Leftrightarrow \quad \text{Para cada jugador } i,\ \lim_{k\to\infty} t_i^k = t_i \in S_i$$

$$t^k \in R(s^k) \quad \Rightarrow \quad \text{Para cada jugador } i,\ t_i^k \in R_i(s^k) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{Para cada jugador } i,\ u_i(t_i^k, s_{-i}^k) \geqslant u_i(z_i, s_{-i}^k),\ \forall z_i \in S_i$$

pero por ser u_i continua en S_i se verifica que

$$u_i(t_i, s_{-i}) \geqslant u_i(z_i, s_{-i}),\ \forall z_i \in S_i \quad \Rightarrow \quad t_i \in R_i(s),\ \forall i, \text{ y en consecuencia } t \in R(s)$$

Por otra parte, por ser las u_i cuasicóncavas en la variable s_i sobre el conjunto convexo S_i, el conjunto de los maximizadores $R_i(\boldsymbol{s})$ es también convexo, y en consecuencia $R(\boldsymbol{s})$ es convexo.

Así pues, la correspondencia $R\colon \boldsymbol{S} \to\to \boldsymbol{S}$ cumple las hipótesis del teorema de Kakutani (hemicontinuidad superior en un conjunto no vacío, compacto y convexo, y además imágenes no vacías y convexas), lo que nos permite afirmar que R tiene al menos un punto fijo $\boldsymbol{s}^*$.

Ahora bien, que $\boldsymbol{s}^* = (s_1^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ sea un punto fijo de R significa que $\boldsymbol{s}^* \in R(\boldsymbol{s}^*)$, lo que implica que $s_i^* \in R_i(\boldsymbol{s}^*)$ para todo i, es decir, que s_i^* es respuesta óptima a $\boldsymbol{s}_{-i}^*$ para todo jugador i. En conclusión, existe un perfil $\boldsymbol{s}^*$ que es un equilibrio de Nash del juego G.

El siguiente teorema, obra de Nash en el año 1950, es un sencillo corolario del anterior.

Teorema 3.4

En todo juego finito $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ existe al menos un EN en estrategias mixtas.

Demostración:

Dado el juego G, sea $S_i = \{s_i^1, s_i^2, ..., s_i^j, ..., s_i^{m_i}\}$ y $S = S_1 \times \cdots \times S_i \times \cdots \times S_n$. Podríamos llamar $\Delta(G)$ al juego cuyos jugadores son los mismos que los de G, cuyos conjuntos de estrategias puras para cada jugador i son los símplices $\Delta(S_i)$ constituidos por las distribuciones de probabilidad sobre S_i, y cuyos pagos son los pagos esperados calculados del modo usual:

$$U_i(\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n) = \sum_{s\in S} \sigma_1^{j(1)} \cdots \sigma_i^{j(i)} \cdots \sigma_n^{j(n)} u_i(s_1^{j(1)}, ..., s_i^{j(i)}, ..., s_n^{j(n)})$$

donde u_i está definida sobre $\Delta = \Delta(S_1) \times \cdots \times \Delta(S_i) \times \cdots \times \Delta(S_n)$, y donde $\sigma_i^{j(i)}$ es la probabilidad con que el jugador i juega su estrategia pura $s_i^{j(i)}$ en su estrategia mixta σ_i.

Pues bien, el juego $\Delta(G) = \{\Delta(S_1), ..., \Delta(S_n); U_1, ..., U_n\}$ cumple las hipótesis del Teorema 3.3, ya que para todo jugador i,

a) $\Delta(S_i)$ es un subconjunto no vacío, compacto y convexo del espacio R^{m_i}.

b) la función de pagos esperados U_i es continua en todo su dominio $\Delta = \Delta(S_1) \times \cdots \times \Delta(S_n)$ y es cuasicóncava en la variable σ_i (ambas cosas por ser una función afín).

En conclusión, existe un equilibrio de Nash en estrategias puras del juego $\Delta(G)$, que no es otra cosa que un equilibrio de Nash en estrategias mixtas del juego G.

Juegos simétricos

Un caso especial de juegos, que merece la pena estudiar por su interés en economía, es el de los juegos simétricos, que definiremos a continuación, y cuya interpretación intuitiva es que todos los jugadores son igualmente tratados.

Definición 3.4

Dado el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$,

a) Decimos que G es **simétrico** si cumple las dos condiciones:

1. Los conjuntos de estrategias puras son idénticos: $S_1 = S_2 = \cdots = S_n$.

2. Para cada par de jugadores, i y j, el intercambio de estrategias, dadas las estrategias del resto de jugadores, genera un intercambio en ganancias para ellos dos y no altera las ganancias de los demás, es decir:

$$u_i(s_i, s_j, s_{-i-j}) = u_j(s_j, s_i, s_{-i-j}) \; \forall i, j, \forall s_i, s_j$$

$$u_k(s_i, s_j, s_{-i-j}) = u_k(s_j, s_i \; s_{-i-j}) \; \forall i, j, \forall s_i, s_j, \forall k \notin \{i, j\}$$

donde (s_j, s_i, s_{-i-j}) es el perfil de estrategias puras en el que el jugador i juega s_j y el jugador j juega s_i.

(En el caso de juegos con dos jugadores, la condición 2 se reduce a $u_i(s_i, s_j) = u_j(s_j, s_i)$, o lo que es lo mismo, sus dos matrices de pagos son transpuestas una de la otra: $A_j = A_i^t$.)

b) Supuesto que G es simétrico, decimos que un perfil $\boldsymbol{s} = (s_1, ..., s_i, ..., s_n)$ es simétrico si todos los jugadores juegan la misma estrategia, es decir, $s_i = s_j \; \forall i, j$.

Para este tipo de juegos vamos a enunciar, sin demostrarlo, un teorema de existencia más preciso que los anteriores, y que es un corolario de éstos:

Teorema 3.5

Dado el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ simétrico, donde $S_i = A, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$.

a) Si se cumple que A es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de un espacio $\boldsymbol{R}^k$, y que para todo i, u_i es continua en todo su dominio $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, y además es cuasicóncava en la variable s_i, entonces G tiene al menos un EN simétrico (no necesariamente en estrategias puras).

b) Si G es finito, tiene al menos un EN simétrico en estrategias mixtas.

Es fácil deducir que en los perfiles simétricos, y en particular en los EN simétricos, todos los jugadores obtienen la misma ganancia.

Ejemplo 3.11

Sea de nuevo el juego **Piedra-Papel-Tijeras** (Ejemplo 3.6):

		Jugador 2		
		R	P	T
Jugador 1	R	0, 0	−1, 1	1, −1
	P	1, −1	0, 0	−1, 1
	T	−1, 1	1, −1	0, 0

o en términos matriciales:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_1^t$$

Se trata de un juego simétrico y, como ya hemos indicado anteriormente, tiene un equilibrio de Nash en estrategias mixtas simétrico (en realidad, el único) en el que todos los jugadores juegan la estrategia $\sigma^* = (1/3, 1/3, 1/3)$ con la cual obtienen un pago de 0.

El Teorema de existencia 3.4 nos asegura que, al menos en los juegos finitos, siempre existe como mínimo un equilibrio de Nash (en estrategias puras o mixtas). Establece una condición suficiente para la existencia del EN, la finitud de G, pero que no es condición necesaria. Efectivamente, de acuerdo con el Teorema 3.3 y su corolario para juegos simétricos, el Teorema 3.5, existen muchos otros juegos que sin ser finitos tienen equilibrio de Nash, lo cual tiene gran importancia en economía, donde muchas situaciones de interés se modelizan como juegos infinitos con estructura continua en los conjuntos de estrategias. Ilustremos esta afirmación con algún ejemplo.

Ejemplo 3.12

a) En el oligopolio de Cournot visto en el capítulo anterior, sería aplicable el Teorema de existencia 3.3, ya que el espacio de estrategias de cualquier jugador, el intervalo cerrado $[0, a]$, es compacto y convexo, y las funciones de ganancias, $\pi_i(q_1, q_2, ..., q_n) = q_i(a - c - bq_1 - bq_2 - \cdots - bq_n)$, son continuas y cuasicóncavas en q_i. Por tanto ha de tener algún EN en estrategias puras. Además, le es aplicable el Teorema 3.5, por ser simétrico, lo que implica que ha de tener algún EN simétrico, como es el caso del equilibrio:

$$q_1^* = \frac{a-c}{(n+1)b}, \ ..., \ q_i^* = \frac{a-c}{(n+1)b}, \ ..., \ q_n^* = \frac{a-c}{(n+1)b}$$

b) En el juego de las peticiones de Nash, Ejemplo 2.3, el conjunto de estrategias para cada uno de los jugadores es el intervalo [0, 1], que es un conjunto compacto y convexo. Sus funciones de pagos no son continuas y, por tanto, no es aplicable el Teorema de existencia 3.3. Sin embargo, sí tiene (muchos) EN, alguno de ellos simétrico, como por ejemplo el perfil ($x_1^* = 1/2, x_2^* = 1/2$). Y es que el Teorema 3.3 da condiciones suficientes para que exista EN, pero no necesarias.

c) En el juego de la mayor diferencia, Ejemplo 2.24, sería aplicable el Teorema de existencia 3.3, ya que el conjunto de estrategias de cualquier jugador, el intervalo cerrado [0, 1], es compacto y convexo, y las funciones de ganancias son $u_i(a, b) = (a - b)^2$, que son continuas y cuasicóncavas en cada variable. Por tanto ha de tener algún EN en estrategias puras, como es el caso de los equilibrios ($a^* = 1$, $b^* = 0$) y ($a^* = 0$, $b^* = 1$). Además, le es aplicable el Teorema 3.5, por ser simétrico, lo que implica que ha de tener algún EN simétrico. Sin embargo, no existe ningún EN simétrico en estrategias puras para este juego, por lo que habrá de existir un EN simétrico en estrategias mixtas, como es el caso del equilibrio [a^* = (0 con probabilidad 1/2, 1 con probabilidad 1/2), b^* = (0 con probabilidad 1/2, 1 con probabilidad 1/2)].

d) En el problema de los ejidos (Apartado 2.7) el juego es simétrico. En él, cada espacio de estrategias es $S_i = [0, \infty)$ convexo, pero no compacto. No le es aplicable, por tanto, el Teorema de existencia 3.3. Sin embargo, sí tiene EN, que además es simétrico.

Ejemplo 3.13

De los otros juegos descritos en la Sección 2.1 del capítulo anterior, son simétricos los siguientes:

a) El juego finito dilema del prisionero (Ejemplo 2.1).
Su único EN es simétrico.

b) El juego finito Halcón-Paloma (Ejemplo 2.4).
Si $C < V/2$, es del tipo dilema del prisionero.
Si $C = V/2$, tiene un EN simétrico en estrategias puras, que es (Halcón, Halcón).
Si $C > V/2$, no tiene ningún EN simétrico en estrategias puras, pero sí tiene un EN simétrico en estrategias mixtas.

c) El juego finito de la caza del ciervo (Ejemplo 2.5).
Tiene dos EN simétricos en estrategias puras, (Cooperar, Cooperar) y (Buscar liebre, Buscar liebre).

No son simétricos los siguientes:

a) La batalla de los sexos (Ejemplo 2.2) (en el perfil simétrico (Cine,Cine) el pago del jugador 1 es 1 y el de la jugadora 2 es 2).

b) El juego de las monedas (Ejemplo 2.28) (en el perfil simétrico (Cara,Cara) el pago de J1 es 1 y el de J2 es -1).

c) El juego de votación por mayoría (Ejemplo 2.6) (el jugador C1, presidente del comité, tiene voto de calidad y por tanto distinto trato).

3.2. JUEGOS BIPERSONALES DE SUMA CERO

Los juegos bipersonales de suma cero modelizan situaciones de conflicto puro entre dos jugadores, en las cuales lo que un jugador gana es exactamente lo que su contrincante pierde. El análisis de este tipo de juegos, especialmente en su forma normal o estratégica, conduce de modo general a resultados y predicciones más precisos que los de los otros juegos, y la estructura de sus soluciones de equilibrio es también muy precisa. Seguramente por esa razón el estudio de estos juegos ha representado una etapa inicial muy importante de la aplicación de la teoría de juegos a la economía, a pesar de que los ejemplos de aplicaciones económicas relevantes de juegos de suma cero son la excepción más que la regla.

Una característica muy especial de los juegos de suma cero es que las soluciones de equilibrio de estos juegos se basan en gran medida en el comportamiento de cada jugador como un decisor racional individual, sin requerir un elemento adicional de coordinación, que sí es necesario en los equilibrios de Nash de otros tipos de juegos. Definámoslos con precisión.

Definición 3.5

Sea $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ un juego bipersonal. Decimos que G es **de suma cero** si para todo par de estrategias puras de ambos jugadores, la suma de los pagos que a ambos corresponde es nula. Es decir,

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0, \forall s_1 \in S_1 \quad \text{y} \quad \forall s_2 \in S_2$$

En los juegos bipersonales de suma cero, que además sean finitos, puesto que los pagos del segundo jugador son los opuestos de los pagos del primero, la matriz de pagos del primero basta para definir el juego y para realizar su análisis. Por esta razón, a los juegos bipersonales finitos de suma cero se les llama a veces juegos matriciales. Comenzaremos por tanto esta sección estudiando algunos conceptos definibles en una matriz.

Valores maximín y minimax de una matriz

Sea A_1 una matriz de valores reales que tiene m filas y n columnas. Los conceptos maximín y minimax que vamos a definir son útiles en muchos contextos distintos, y en cada uno de estos contextos adquieren una interpretación distinta. Sin embargo, para que nos sea más fácil apoyarnos en la intuición, podemos imaginar que A_1 es la matriz de pagos del jugador 1 en un juego bipersonal finito cualquiera $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$, donde $S_1 = \{s_1^1, s_1^2, ..., s_1^m\}$ y $S_2 = \{s_2^1, s_2^2, ..., s_2^n\}$. Por tanto, las filas de A_1 corresponden a las estrategias puras del jugador 1 mientras que sus columnas corresponden a las estrategias puras de su contrincante el jugador 2. Así, el término a_{ij} de A_1 es el pago $u_1(s_1^i, s_2^j)$.

Teniendo en cuenta que

$$\max_{s_1^i \in S_1} u_1(s_1^i, s_2^j) \quad \text{y} \quad \min_{s_2^j \in S_2} u_1(s_1^i, s_2^j)$$

son, respectivamente, el máximo de los términos de la columna j-ésima (correspondiente a la estrategia pura s_2^j del jugador 2) y el mínimo de los términos de la fila i-ésima (correspondiente a la estrategia pura s_1^i del jugador 1), podemos definir así los valores maximín y minimax de la matriz A_1:

Definición 3.6

En la matriz A_1 con m filas, n columnas y término genérico $u_1(s_1^i, s_2^j)$:

a) Llamamos **valor maximín** de A_1, y lo denotamos $\underline{\text{m}}$, al máximo de los mínimos de todas las filas de A_1. Es decir,

$$\underline{\text{m}} = \max_{s_1^i \in S_1} \{\min_{s_2^j \in S_2} u_1(s_1^i, s_2^j)\}$$

b) Llamamos **valor minimax** de A_1, y lo denotamos $\overline{\text{m}}$, al mínimo de los máximos de todas las columnas de A_1. Es decir,

$$\overline{\text{m}} = \min_{s_2^j \in S_2} \{\max_{s_1^i \in S_1} u_1(s_1^i, s_2^j)\}$$

c) Decimos que el término $u_1(s_1^{i_0}, s_2^{j_0})$, que ocupa la fila i_0 y la columna j_0 de A_1, es un **punto de silla** de A_1 si es el máximo de su columna y el mínimo de su fila. Es decir,

$$u_1(s_1^{i_0}, s_2^{j_0}) = \max_{s_1^i \in S_1} u_1(s_1^i, s_2^{j_0}) = \min_{s_2^j \in S_2} u_1(s_1^{i_0}, s_2^j)$$

Los ejemplos siguientes ilustran estos conceptos.

Ejemplo 3.14

En la matriz de pagos del jugador 1 para el juego Piedra-Papel-Tijeras,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1_* & 1^* \\ 1^* & 0 & -1_* \\ -1_* & 1^* & 0 \end{pmatrix}$$

se han señalado mediante un asterisco subíndice los mínimos de cada fila, y mediante un asterisco superíndice los máximos de cada columna.

— Todos los mínimos de fila valen -1, luego el valor maximín de A_1 es

$$\underline{\text{m}} = \max_{s_1^i \in \{s_1^1, s_1^2, s_1^3\}} \{\min_{s_2^j \in \{s_2^1, s_2^2, s_2^3\}} u_1(s_1^i, s_2^j)\} = \max_{s_1^i \in \{s_1^1, s_1^2, s_1^3\}} \{-1, -1, -1\} = -1$$

— Todos los máximos de columna valen 1, y por tanto el valor minimax de A_1 es

$$\overline{\text{m}} = \min_{s_2^j \in \{s_2^1, s_2^2, s_2^3\}} \{\max_{s_1^i \in \{s_1^1, s_1^2, s_1^3\}} u_1(s_1^i, s_2^j)\} = \min_{s_2^j \in \{s_2^1, s_2^2, s_2^3\}} \{1, 1, 1\} = 1$$

— Ningún término está doblemente señalado, y por tanto A_1 no tiene punto de silla.

Ejemplo 3.15

En la matriz de pagos del jugador 1 para el Juego 3.1

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3^* & 1_* \\ 1_* & 2^* \\ 2_* & 2^* \end{pmatrix}$$

se han señalado mediante asteriscos subíndice y superíndice los mínimos de cada fila y los máximos de cada columna.

— Los mínimos de fila son 1, 1 y 2, mientras que los máximos de columna son 3 y 2. Por tanto, el valor maximín de A_1 es

$$\underline{\mathrm{m}} = \max_{s_1^i \in \{s_1^1, s_1^2, s_1^3\}} \{ \min_{s_2^j \in \{s_2^1, s_2^2\}} u_1(s_1^i, s_2^j)\} = \max_{s_1^i \in \{s_1^1, s_1^2, s_1^3\}} \{1, 1, 2\} = 2$$

y el valor minimax de A_1 es

$$\overline{\mathrm{m}} = \min_{s_2^j \in \{s_2^1, s_2^2\}} \{ \max_{s_1^i \in \{s_1^1, s_1^2, s_1^3\}} u_1(s_1^i, s_2^j)\} = \min_{s_2^j \in \{s_2^1, s_2^2\}} \{3, 2\} = 2$$

— El único término que está doblemente señalado, que ocupa la tercera fila y segunda columna, y cuyo valor es 2, es el punto de silla de A_1. Obsérvese que dicho valor coincide con el valor maximín y con el valor minimax de A_1. No se trata de una casualidad, sino de una condición necesaria y suficiente para la existencia de punto de silla de una matriz.

Estrategias puras maximín y minimax de un juego. Niveles de seguridad

Supongamos que A_1 sea efectivamente la matriz de pagos $(u_1(s_1^i, s_2^j))_{i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n}$ para el jugador 1, del juego $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$, donde $S_1 = \{s_1^1, s_1^2, \ldots, s_1^m\}$ y $S_2 = \{s_2^1, s_2^2, \ldots, s_2^n\}$. Las filas de A_1 corresponden, por tanto, a las estrategias puras de J1 mientras que sus columnas corresponden a las estrategias puras de J2. Sea $\underline{\mathrm{m}} = u_1(s_1^s, s_2^t)$ el valor maximín de A_1. A la estrategia pura s_1^s de J1 en cuya fila se alcanza dicho valor se la llama estrategia pura maximín. El valor maximín de A_1 puede interpretarse como el nivel de seguridad del jugador 1, es decir, el valor que puede estar seguro J1 de conseguir al jugar una estrategia pura en dicho juego, por más que J2 pudiera empeñarse en impedirlo. Es decir, jugando su estrategia se asegura la consecución de un pago al menos tan grande como $\underline{\mathrm{m}}$.

Puesto que el juego G determina dos matrices de pagos,

$$A_1 = (u_1(s_1^i, s_2^j))_{i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n}$$

para el jugador 1 y

$$A_2 = (u_2(s_1^i, s_2^j))_{i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n}$$

para el jugador 2, podríamos igualmente definir, a partir de A_2, las estrategias puras maximín y el nivel de seguridad correspondiente para el jugador 2. La única diferencia es que ahora las estrategias puras de J2 identifican columnas de A_2 y no filas. A los valores maximín de J1 y J2 los denominaremos, respectivamente, v_1 y v_2.

Ejemplo 3.16

Consideremos de nuevo el Juego 3.1, donde aparecen las matrices de pagos A_1 para el jugador 1 y A_2 para el jugador 2.

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	3, 2	1, 4
	C	1, 3	2, 1
	B	2, 2	2, 0

El jugador 1 tiene una única estrategia pura maximín, B, que le proporciona un nivel de seguridad de 2, ya que

$$v_1 = u_1(\mathrm{B}, \mathrm{I}) = \max_{s_1^i \in \{s_1^1, s_1^2, s_1^3\}} \{ \min_{s_2^j \in \{s_2^1, s_2^2\}} u_1(s_1^i, s_2^j)\} = \max_{s_1^i \in \{\mathrm{A}, \mathrm{C}, \mathrm{B}\}} \{1, 1, 2\} = 2$$

Por su parte, el jugador 2 tiene también una única estrategia pura maximín, I, que le proporciona un nivel de seguridad de 2, ya que

$$v_2 = u_2(\mathrm{B}, \mathrm{I}) = \max_{s_2^j \in \{\mathrm{I}, \mathrm{D}\}} \{ \min_{s_1^i \in \{\mathrm{A}, \mathrm{C}, \mathrm{B}\}} u_2(s_1^i, s_2^j)\} = \max_{s_2^j \in \{\mathrm{I}, \mathrm{D}\}} \{2, 0\} = 2$$

Ejemplo 3.17

a) En el juego la batalla de los sexos

		Jugadora 2	
		Cine	Fútbol
Jugador 1	Cine	1, 2	0, 0
	Fútbol	0, 0	2, 1

las dos estrategias puras del jugador 1 son maximín, y ambas le proporcionan un nivel de seguridad de 0. Lo mismo ocurre con la jugadora 2.

b) En el juego de las monedas

		Jugador 2	
		Cara	Cruz
Jugador 1	Cara	$1, -1$	$-1, \quad 1$
	Cruz	$-1, \quad 1$	$1, -1$

las dos estrategias puras del jugador 1 son maximín, ambas le proporcionan un nivel de seguridad de -1, y lo mismo ocurre con el jugador 2.

Aunque los conceptos de estrategias puras maximín y valores de seguridad son válidos para cualquier juego, sus propiedades son interesantes sólo en el caso de los juegos de suma cero. Por otra parte, estas propiedades son especialmente interesantes cuando introducimos en el análisis las estrategias mixtas. Por tanto, en el resto de esta sección nos situaremos en el contexto de juegos finitos de suma cero con estrategias mixtas.

Estrategias mixtas maximín y valor de un juego de suma cero

Adaptemos las definiciones anteriores al contexto de los juegos finitos de suma cero con estrategias mixtas.

Definición 3.7

Sea el juego bipersonal finito de suma cero $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$, donde

$$S_1 = \{s_1^1, s_1^2, ..., s_1^m\} \quad \text{y} \quad S_2 = \{s_2^1, s_2^2, ..., s_2^n\}$$

cuyas matrices de pagos son

$$A_1 = (u_1(s_1^i, s_2^j))_{i=1,...,m; j=1,...,n} \text{ y } A_2 = (u_2(s_1^i, s_2^j)_{i=1,...,m; j=1,...,n} = -A_1$$

Sea σ_1 una estrategia mixta genérica de J1, representable mediante un vector fila con m componentes positivas o nulas que suman la unidad. Análogamente, sea σ_2 una estrategia mixta genérica de J2, representable mediante un vector fila con n componentes positivas o nulas que suman la unidad.

a) Llamamos **valor maximín** del juego G, y lo denotamos v_1, al pago máximo que puede asegurarse el jugador 1 suponiendo que J2 responde a la estrategia σ_1 de J1 con una estrategia σ_2 que le permite maximizar su pago, y por tanto minimizar el de J1. Es decir,

$$v_1 = \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \{ \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \}$$

b) Llamamos **valor minimax** del juego G al número

$$v_2 = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{ \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \}$$

Si el valor maximín se alcanza en las estrategias mixtas concretas σ_1^* de J1 y σ_2^* de J2, decimos que σ_1^* es una **estrategia maximín** de J1. Análogamente, si el valor minimax se alcanza en las estrategias mixtas concretas $\sigma_2'^*$ de J2 y $\sigma_1'^*$ de J1, decimos que $\sigma_2'^*$ es una **estrategia minimax** de J2.

c) Llamamos **valor del juego** G, y lo denotamos v, al valor maximín y al valor minimax, si es que ambos coinciden.

El valor maximín v_1 es el valor de seguridad del jugador J1, es decir, el pago más alto que J1 puede asegurarse suponiendo un «comportamiento de peor caso» por parte de J2 (que es la suposición adecuada, ya que en los juegos de suma cero, J2 produce el pago más bajo posible para J1 con aquellas jugadas que son óptimas para él). Además, el lema siguiente nos permitirá relacionar el valor minimax con el valor de seguridad del jugador 2.

Lema 3.1

Dado el juego bipersonal finito de suma cero $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$, donde

$$S_1 = \{s_1^1, s_1^2, ..., s_1^m\} \quad \text{y} \quad S_2 = \{s_2^1, s_2^2, ..., s_2^n\}$$

y cuyas matrices de pagos son

$$A_1 = (u_1(s_1^i, s_2^j))_{i=1,...,m; j=1,...,n} \text{ y } A_2 = (u_2(s_1^i, s_2^j)_{i=1,...,m; j=1,...,n} = -A_1$$

el valor minimax v_2 es el valor de seguridad del jugador 2 cambiado de signo. Es decir,

$$v_2 = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{ \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \} = \max_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{ \min_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_2 \sigma_2^t \}$$

Demostración:

Es bien sabido que, dada una función real cualquiera $f(\boldsymbol{x})$, el opuesto del máximo de $f(\boldsymbol{x})$ es igual al mínimo del opuesto de $f(\boldsymbol{x})$, es decir, $-\max f(\boldsymbol{x}) = \min(-f(\boldsymbol{x}))$, y análogamente, $-\min f(\boldsymbol{x}) = \max(-f(\boldsymbol{x}))$.

Además sabemos que la solución de problema de maximizar una función se alcanza en los mismos puntos x^* donde se alcanza la solución del correspondiente problema de minimizar su opuesta. Basándonos en ello, tenemos:

$$-\max_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{ \min_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_2 \sigma_2^t \} = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{ -\min_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_2 \sigma_2^t \} =$$

$$= \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{ \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} -(\sigma_1 A_2 \sigma_2^t) \} = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{ \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \} = v_2$$

Los ejemplos siguientes ilustran la obtención y comparación de los valores que acaban de definirse.

Ejemplo 3.18

En el juego siguiente

Juego 3.3

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	0, 0	−5, 5
	B	5, −5	0, 0

B es la estrategia maximín del jugador 1 en el contexto de estrategias puras y le proporciona en dicho contexto un nivel de seguridad de 0. En el contexto de estrategias mixtas, el valor maximín es:

$$v_1 = \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \{ \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \} = \max_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \{ \min_{0 \leqslant \beta \leqslant 1} (\alpha \quad 1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 1-\beta \end{pmatrix} \} =$$

$$= \max_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \{ \min_{0 \leqslant \beta \leqslant 1} 5\beta - 5\alpha \}$$

El mínimo de $5\beta - 5\alpha$, para α fijo y β entre 0 y 1, es $f(\alpha) = -5\alpha$ (que se alcanza para $\beta = 0$). Teniendo en cuenta lo anterior, el máximo de $f(\alpha) = -5\alpha$ cuando α varía entre 0 y 1 es igual a 0, que se alcanza haciendo $\alpha = 0$. Por tanto, el valor maximín v_1 es igual a 0, y se alcanza haciendo $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, es decir, $v_1 = 0$ es el valor de seguridad de J1, y éste lo alcanza jugando su estrategia mixta $\sigma_1 = (0 , 1)$, que coincide con su estrategia pura B, mientras que J2 juega su estrategia mixta $\sigma_2 = (0 , 1)$, que coincide con su estrategia pura D.

Razonando de modo análogo, es fácil ver que el valor minimax es:

$$v_2 = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{ \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \} = \min_{0 \leqslant \beta \leqslant 1} \{ \max_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} 5\beta - 5\alpha \}$$

El máximo de $5\beta - 5\alpha$, para β fijo y α entre 0 y 1, es $f(\beta) = 5\beta$ (que se alcanza para $\alpha = 0$). Teniendo en cuenta lo anterior, el mínimo de $f(\beta) = 5\beta$ cuando β varía entre 0 y 1 es igual a 0, que se alcanza haciendo $\beta = 0$. Así pues, el valor minimax v_2 es igual a 0 (y por tanto el valor de seguridad de J2 es $0 = -v_2$), y se alcanza haciendo $\alpha = 0$ y $\beta = 0$. En definitiva, el valor de seguridad de J2 es $-v_2 = 0$ y éste lo alcanza jugando su estrategia mixta $\sigma_2 = (0 , 1)$, que es su estrategia pura D, mientras que J1 juega su estrategia mixta $\sigma_1 = (0 , 1)$, que coincide con su estrategia pura B.

Ejemplo 3.19

En el juego de las monedas

		Jugador 2	
		Cara	Cruz
Jugador 1	Cara	$1, \ -1$	$-1, \ \ 1$
	Cruz	$-1, \ \ 1$	$1, \ -1$

tanto la estrategia pura Cara como la estrategia pura Cruz del jugador 1 son maximín en el contexto de estrategias puras, y ambas le proporcionan en dicho contexto un nivel de seguridad de -1. Sin embargo, en el contexto de estrategias mixtas, el valor maximín es:

$$v_1 = \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \{ \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \} = \max_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \{ \min_{0 \leqslant \beta \leqslant 1} (\alpha \quad 1 - \alpha) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 - \beta \end{pmatrix} \} =$$

$$= \max_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \{ \min_{0 \leqslant \beta \leqslant 1} 1 - 2\alpha + 2(2\alpha - 1)\beta \}$$

El mínimo de $1 - 2\alpha + 2(2\alpha - 1)\beta$, para α fijo y β entre 0 y 1, es $f(\alpha) = 1 - 2\alpha$ si $\alpha > 1/2$ (mínimo que se alcanza haciendo $\beta = 0$), es $f(\alpha) = 0$ si $\alpha = 1/2$ (mínimo que se alcanza para cualquier β) y, por último, es $f(\alpha) = 2\alpha - 1$ si $\alpha < 1/2$ (mínimo que se alcanza haciendo $\beta = 1$). Por otra parte, y teniendo en cuenta lo anterior, el máximo de $f(\alpha)$ cuando α varía entre 0 y 1 es igual a 0, y dicho máximo se alcanza haciendo $\alpha = 1/2$. Por tanto, el valor maximín v_1 es igual a 0, y se alcanza haciendo $\alpha = 1/2$ y β igual a cualquier valor, es decir, $v_1 = 0$ es el valor de seguridad de J1, y éste lo alcanza jugando su estrategia mixta $\sigma_1 = (1/2, 1/2)$, independientemente de qué estrategia pura o mixta juegue J2.

Análogamente, el valor minimax es:

$$v_2 = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{ \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \} = \min_{0 \leqslant \beta \leqslant 1} \{ \max_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} 1 - 2\beta + 2(2\beta - 1)\alpha \}$$

Razonando de manera análoga a como se ha hecho en el maximín, el máximo de $1 - 2\beta + 2(2\beta - 1)\alpha$, para β fijo y α entre 0 y 1, es $f(\beta) = 2\beta - 1$ si $\beta > 1/2$ (máximo que se alcanza haciendo $\alpha = 1$), es $f(\beta) = 0$ si $\beta = 1/2$ (máximo que se alcanza para cualquier α) y, por último, es $f(\beta) = 1 - 2\beta$ si $\beta < 1/2$ (máximo que se alcanza haciendo $\alpha = 0$). Así, el mínimo de $f(\beta)$ cuando β varía entre 0 y 1 es igual a 0, que se alcanza haciendo $\beta = 1/2$. Por tanto, el valor minimax v_2 es igual a 0 (y por tanto el valor de seguridad de J2 es $0 = -v_2$), y se alcanza haciendo $\beta = 1/2$ y α igual a cualquier valor. En definitiva, el valor de seguridad de J2 es $-v_2 = 0$ y éste lo alcanza jugando su estrategia mixta $\sigma_2 = (1/2, 1/2)$, independientemente de qué estrategia pura o mixta juegue J1.

El resultado siguiente, el más importante para este tipo de juegos, fue obtenido por Von Neumann en 1928 y recibe el nombre de teorema del minimax.

Teorema 3.6

Dado un juego bipersonal finito de suma cero cualquiera $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$, dicho juego tiene un valor. Es decir, existe un $v \in R$ tal que $v_1 = v_2 = v$, siendo v_1 y v_2 los valores maximín y minimax.

Demostración:

Basaremos nuestra demostración en la existencia de equilibrios de Nash. Por ser G un juego finito, existe algún EN en G. Sea (σ_1^*, σ_2^*) uno de tales equilibrios. Por definición de EN, se cumplen las afirmaciones siguientes:

$$U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} = \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \{\sigma_1 A_1 \sigma_2^{*t}\} \tag{3.1}$$

$$U_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_2 \sigma_2^{*t} = \max_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{\sigma_1^* A_2 \sigma_2^t\} \tag{3.2}$$

De [3.2] se deduce

$$U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{\sigma_1^* A_1 \sigma_2^t\} \tag{3.3}$$

(debido a que $\sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} = -\sigma_1^* A_2 \sigma_2^{*t} = -\max_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{-\sigma_1^* A_1 \sigma_2^t\} = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{\sigma_1^* A_1 \sigma_2^t\}$).

Ahora, de [3.1] se deduce

$$U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} = \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \{\sigma_1 A_1 \sigma_2^{*t}\} \geqslant \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \{\min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t\} =$$

$$= v_1 \geqslant \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1^* A_1 \sigma_2^t = U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \tag{3.4}$$

y de [3.3] se deduce

$$U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{\sigma_1^* A_1 \sigma_2^t\} \leqslant \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{\max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t\} =$$

$$= v_2 \leqslant \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^{*t} = U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \tag{3.5}$$

Por último, de [3.4] y [3.5] se deduce

$$U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = v_1 = v_2$$

En los Ejemplos 3.18 y 3.19 hemos comprobado que el Juego 3.3 y el juego de las monedas satisfacen el Teorema 3.6. El valor de ambos juegos es 0.

Relación entre los equilibrios de Nash y las estrategias maximín

En los juegos bipersonales finitos de suma cero, existe una estrechísima relación entre los equilibrios de Nash y las estrategias maximín, según la cual forman parte de los equilibrios las estrategias maximín y sólo ellas. El Teorema 3.7 precisa y completa dicha relación.

Teorema 3.7

Sea el juego bipersonal finito de suma cero $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$, donde

$$S_1 = \{s_1^1, s_1^2, ..., s_1^m\} \text{ y } S_2 = \{s_2^1, s_2^2, ..., s_2^n\}$$

y cuyas matrices de pagos son

$$A_1 = (u_1(s_1^i, s_2^j))_{i=1,...,m; j=1,...,n} \text{ y } A_2 = (u_2(s_1^i, s_2^j))_{i=1,...,m; j=1,...,n} = -A_1$$

Sea σ_1 una estrategia mixta genérica de J1 y σ_2 una estrategia mixta genérica de J2.

a) Si (σ_1^*, σ_2^*) es un equilibrio de Nash, σ_1^* y σ_2^* son estrategias maximín de J1 y J2, y el pago que J1 recibe en dicho equilibrio coincide con el valor del juego.

b) Si σ_1^* y σ_2^* son estrategias maximín de J1 y J2, el perfil (σ_1^*, σ_2^*) es un equilibrio de Nash.

Demostración:

a) En la demostración del Teorema 3.6, hemos visto que si (σ_1^*, σ_2^*) es un EN se cumple:

$$U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} = \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \{ \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \} = v_1 \qquad [3.6]$$

$$U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{ \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \} = v_2 \qquad [3.7]$$

La igualdad [3.6] significa que σ_1^* es una estrategia maximín de J1, y de [3.7] se deduce lo siguiente al aplicar el Lema 3.1:

$$U_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = -U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = -v_2 = -\min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{ \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \} =$$

$$= \max_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{ \min_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_2 \sigma_2^t \} \qquad [3.8]$$

y la igualdad [3.8] significa que σ_2^* es una estrategia maximín de J2. Además, el pago a J1 es el valor, pues $U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = v_1 = v_2 = v$.

b) Si σ_1^* y σ_2^* son estrategias maximín de J1 y J2, se cumple

$$U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} = \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \{ \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \} = v_1 \qquad [3.9]$$

$$U_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_2 \sigma_2^{*t} = \max_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{ \min_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_2 \sigma_2^t \} = -v_2 \qquad [3.10]$$

y sabemos, por el Teorema 3.6, que los valores maximín v_1 y minimax v_2 coinciden, es decir,

$$\max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \{ \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1 A_2 \sigma_2^t \} = v_1 = v_2 = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{ \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \}$$

$$\max_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{ \min_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_2 \sigma_2^t \} = -v_2 = -v_1 = \min_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \{ \max_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1 A_2 \sigma_2^t \}$$

Por tanto,

$$U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{ \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \} =$$

$$= \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \{\sigma_1 A_1 \sigma_2^{*t}\} \geqslant \sigma_1 A_1 \sigma_2^{*t} = U_1(\sigma_1, \sigma_2^{*t}), \forall \sigma_1 \in \Delta(S_1)$$

$$U_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_2 \sigma_2^{*t} = \min_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \{ \max_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1 A_2 \sigma_2^t \} =$$

$$= \max_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \{\sigma_1^* A_2 \sigma_2^t\} \geqslant \sigma_1^* A_2 \sigma_2^t = U_2(\sigma_1^*, \sigma_2), \forall \sigma_2 \in \Delta(S_2)$$

y estas dos últimas desigualdades nos dicen que (σ_1^*, σ_2^*) es un EN.

Juegos bipersonales de suma constante

Obtenemos una generalización de los juegos de suma cero si, en lugar de exigir que la suma de las ganancias de los dos jugadores ante cada perfil de estrategias sea nula, exigimos que sea una constante.

Definición 3.8

Sea $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ un juego bipersonal. Decimos que G es un juego **de suma constante** si para todo par de estrategias puras de ambos jugadores, la suma de los pagos que a ambos corresponden es siempre la misma. Es decir,

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = c, \forall s_1 \in S_1 \quad \text{y} \quad \forall s_2 \in S_2$$

Si bien los juegos de suma constante tienen como caso particular los juegos de suma cero, una simple transformación de las ganancias de los jugadores nos permite considerar los juegos de suma constante como si se tratase de juegos de suma cero. Veamos algunos ejemplos que convierten cualquier juego de suma constante en un juego de suma cero

- Transformación de las ganancias de J1:

$$u_1'(s_1, s_2) = u_1(s_1, s_2) - c, \forall s_1 \in S_1 \quad \text{y} \quad \forall s_2 \in S_2$$

- Transformación de las ganancias de J2:

$$u_2'(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2) - c, \forall s_1 \in S_1 \quad \text{y} \quad \forall s_2 \in S_2$$

- Transformación de las ganancias de J1 y J2:

$$u_1'(s_1, s_2) = u_1(s_1, s_2) - c_1 \qquad u_2'(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2) - c_2$$

$$\forall c_1, c_2 \text{ tal que } c_1 + c_2 = c, \forall s_1 \in S_1 \quad \text{y} \quad \forall s_2 \in S_2$$

Siempre que un juego admita este tipo de transformaciones, podremos analizar un juego de suma constante a través de alguno de los juegos de suma cero asociados. Esto nos conduce a la siguiente pregunta: ¿cuándo podemos admitir este tipo de transformaciones y por tanto hacer uso del teorema del minimax? La respuesta nos lleva de nuevo a la interpretación de las ganancias como utilidades de Von Neumann-Morgenstern. Dicha interpretación es consistente con unas preferencias que admiten una escala cardinal-intervalo, y la exigimos siempre que queremos incluir a las estrategias mixtas en el análisis.

Así pues, los resultados alcanzados para juegos de suma cero son aplicables al análisis de cualquier juego de suma constante cuyas ganancias admitan transformaciones afines positivas.

Como conclusión de esta sección, merece la pena observar que en este tipo de juegos existe una prescripción clara sobre cómo jugar (jugar ambos jugadores cualquier estrategia maximín, o lo que es lo mismo, jugar cualquier equilibrio de Nash) ya que, en virtud del teorema anterior, los pagos a cada jugador no dependen de la estrategia maximín elegida. En efecto, si juegan de este modo, el jugador 1 recibirá el pago v del juego, mientras que el jugador 2 recibirá el pago $-v$.

3.3. ESTRATEGIAS RACIONALIZABLES

En esta sección nos proponemos profundizar, y llevar hasta sus últimas consecuencias, los conceptos de solución basados en ideas de dominación. Para ello, en primer lugar revisaremos el concepto de estrategia dominada ampliando el contexto en que se define, desde el contexto del capítulo anterior en que sólo se consideraban estrategias puras hasta el del capítulo actual en que están presentes todas las estrategias mixtas. En segundo lugar, actualizaremos al contexto de las estrategias mixtas las comparaciones entre las soluciones de dominación (usando ya el concepto de dominación revisado) y las soluciones de equilibrio (usando el equilibrio de Nash en estrategias mixtas). En tercer lugar, definiremos el concepto de estrategia que nunca es respuesta óptima, concepto que es ligeramente más general que el de estrategia estrictamente dominada, y a partir de él construiremos un nuevo concepto de solución, el de las estrategias racionalizables, y lo compararemos con los anteriores conceptos de solución.

Revisión de estrategias dominadas

Dado el juego siguiente:

Juego 3.4

		Jugador 2		
		A	B	C
Jugador 1	X	2, 6	6, 0	1, 1
	Y	1, 3	2, 7	4, 4
	Z	2, 3	5, 1	3, 1

Ninguna estrategia pura del jugador 2 está dominada, ni estricta ni débilmente, por otra estrategia pura. Sin embargo, es fácil ver que C no es una estrategia que vaya a usar un jugador racional, ya que la estrategia mixta $\sigma_2 = (1/2, 1/2, 0)$, en la que el jugador 2 juega A con probabilidad 1/2 y B con igual probabilidad, le produce unos pagos estrictamente superiores a los de C, haga lo que haga el jugador 1. En concreto,

$$U_2(\mathrm{X}, \sigma_2) = 3 > U_2(\mathrm{X}, \mathrm{C}) = 1, \; U_2(\mathrm{Y}, \sigma_2) = 5 > U_2(\mathrm{Y}, \mathrm{C}) = 4$$

y

$$U_2(\mathrm{Z}, \sigma_2) = 2 > U_2(\mathrm{Z}, \mathrm{C}) = 1$$

En definitiva, C está estrictamente dominada por la estrategia mixta σ_2, a pesar de que no lo está por ninguna de sus estrategias puras soporte, A o B. Por otra parte, es fácil observar que la estrategia mixta $\sigma_1 = (2/3, 1/3, 0)$, en la que el jugador 1 juega X con probabilidad 2/3 e Y con probabilidad 1/3, le produce unos pagos estrictamente inferiores a los de Z, haga lo que haga el jugador 2. Efectivamente,

$$U_1(\sigma_1, \mathrm{A}) = 5/3 < U_1(\mathrm{Z}, \mathrm{A}) = 2, \; U_1(\sigma_1, \mathrm{B}) = 14/3 < U_1(\mathrm{Z}, \mathrm{B}) = 5$$

y

$$U_1(\sigma_1, \mathrm{C}) = 2 < U_1(\mathrm{Z}, \mathrm{C}) = 3$$

En definitiva, la estrategia mixta σ_1 está estrictamente dominada por Z, a pesar de que no lo está ninguna de sus estrategias puras soporte, X o Y.

La situación anterior sugiere la necesidad de ampliar la definición de estrategia dominada, y es lo que hacemos a continuación.

Definición 3.9

En el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, sean σ_i' y σ_i'' dos estrategias (puras o mixtas) del jugador i.

a) Decimos que σ_i' está **dominada,** o también **débilmente dominada,** por σ_i'' cuando la desigualdad

$$U_i(s_1, ..., s_{i-1}, \sigma_i', s_{i+1}, ..., s_n) \leqslant U_i(s_1, ..., s_{i-1}, \sigma_i'', s_{i+1}, ..., s_n)$$

se cumple para toda combinación de estrategias puras s_{-i}, y para alguna se cumple de modo estricto.

b) Decimos que σ_i' está **estrictamente dominada** por σ_i'' cuando la desigualdad

$$U_i(s_1, ..., s_{i-1}, \sigma_i', s_{i+1}, ..., s_n) < u_i(s_1, ..., s_{i-1}, \sigma_i'', s_{i+1}, ..., s_n)$$

se cumple para toda combinación de estrategias puras s_{-i} de los otros jugadores.

c) Decimos que σ_i' es **no dominada** si no existe ninguna otra estrategia del jugador i, ni pura ni mixta, que la domine, y decimos que σ_i' es **no dominada estrictamente** si no existe ninguna otra que la domine estrictamente.

Este nuevo concepto de dominación lleva asociados también dos procesos de eliminación iterativa, que podríamos llamar **Eliminación Iterativa de las Estrategias Estrictamente Dominadas por una estrategia pura o mixta** y **Eliminación Iterativa de las**

Estrategias Débilmente Dominadas por una estrategia pura o mixta, y que abreviaremos por **EIE-PM** y **EID-PM**. Obviamente, dichos procesos serán tanto o más resolutivos que los análogos ya estudiados en el capítulo anterior, y que sólo implicaban dominación entre dos estrategias puras. Aun así, este proceso de cálculo de la solución del juego sigue teniendo el inconveniente, en general, de la falta de resolución, pues frecuentemente existen muchas estrategias no dominadas (a veces, todas), y en tal caso el proceso no permite predecir apenas nada del desarrollo del juego.

Ejemplo 3.20

a) En el dilema del prisionero, es fácil observar que tanto la EIE-PM como EID-PM conducen a (Confesar, Confesar), que es el único perfil superviviente.

b) En la batalla de los sexos, cualquier perfil (σ_1, σ_2) posible del juego es un perfil superviviente, tanto de la EIE-PM como de la EID-PM.

Relación entre EN y Eliminación Iterativa Estricta (EIE-PM)

El siguiente teorema complementa los enunciados en el Capítulo 2 sobre las relaciones entre el EN y las soluciones basadas en el concepto de dominación. Es de notar que no aparecen enunciados nuevos relativos al perfil de estrategias dominantes, y ello es debido a que dicho perfil de estrategias puras, siendo un equilibrio de Nash en estrategias puras (el llamado equilibrio en estrategias dominantes), también lo es en estrategias mixtas.

Teorema 3.8

Dado el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ y la combinación de estrategias

$$s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*):$$

a) Si G es finito y s^* es un EN en estrategias puras, las estrategias que lo constituyen sobreviven al proceso de Eliminación Iterativa Estricta (EIE-PM).

b) Si G es finito y s^* está constituida por las únicas estrategias que sobreviven al proceso de Eliminación Iterativa Estricta (EIE-PM), s^* es el único EN del juego.

c) Si la estrategia s_i resulta eliminada en el proceso de Eliminación Iterativa Estricta (EIE-PM), y en particular, si s_i es estrictamente dominada, no pertenece al soporte de ninguna estrategia mixta que forme parte de un equilibrio de Nash.

Demostración:

Para los apartados a y b, siguen siendo válidas, en todos sus detalles, las demostraciones de los enunciados análogos (Teorema 2.5, apartados a y b) del capítulo anterior, hechas para el proceso de eliminación EIE.

Nota: Podría pensarse que en las definiciones anteriores de dominación débil y de dominación estricta, debería haberse sustituido s_{-i} (combinación de estrategias puras de los otros) por σ_{-i} (combinación de estrategias mixtas de los otros), pero ello no es necesario, pues es fácil ver que si las desigualdades se cumplen para todo s_{-i} también se cumplen para todo σ_{-i}.

En cuanto al apartado c, si s_i perteneciera a SOP(σ_i^*), formando σ_i^* parte de un EN $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_i^*, ..., \sigma_n^*)$, de ello se deduciría que s_i es respuesta óptima a σ_{-i}^*, lo que le impediría ser eliminada en el proceso EIE-PM.

De este teorema se deduce que podemos aplicar el proceso de eliminación iterativa estricta antes de calcular un EN en estrategias mixtas, pues las estrategias puras eliminadas no van a formar parte de ningún soporte de estrategias mixtas de equilibrio. El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

Ejemplo 3.21

Juego 3.5

		J2				
		C1	C2	C3	C4	C5
J1	F1	5, 5	5, 0	7, 0	3, 1	0, 3
	F2	2, 7	2, 8	8, 7	0, 5	4, 7
	F3	1, 0	1, 3	6, 9	1, 3	1, 10
	F4	2, 2	1, 3	1, 3	4, 4	13, 2

En la primera etapa eliminatoria queda descartada la estrategia F3 de J1 (estrictamente dominada por (1/2)F1 + (1/2)F2), en la segunda se descarta C3 de J2 y C5 de J2 (estrictamente dominadas, respectivamente, por (3/4)C2 + (1/4)C4 y (2/3)C1 + (1/3)C2), en la tercera se descarta F2 de J1 (estrictamente dominada por F1), y en la cuarta y última se elimina C2 de J2 (estrictamente dominada por C4). El juego residual es

		J2	
		C1	C4
J1	F1	5, 5	3, 1
	F4	2, 2	4, 4

Por tanto, los EN del juego podemos calcularlos en el juego residual. Es fácil deducir que, aparte de los dos EN en estrategias puras (F1, C1) y (F4, C4), este juego tiene un EN en estrategias mixtas, que es [(1/3)F1 + (2/3)F4, (1/4)C1 + (3/4)C4]. Así pues,

$$\mathbf{S^{EN} = \{(F1, C1), (F4, C4), [(1/3)F1 + (2/3)F4, (1/4)C1 + (3/4)C4]\}}$$

Estrategias racionalizables

El concepto de estrategia racionalizable, que también podríamos llamar justificable, se propone explorar un camino intermedio entre los conceptos de solución basados en la dominación estricta y en la dominación débil, es decir, entre los basados en la idea de que ningún jugador racional debería usar una estrategia estrictamente dominada y los basados en la idea de que ningún jugador racional debería usar una estrategia débilmente dominada. Ya hemos visto que, aplicadas iterativamente, la primera idea conduce a resultados seguros, pero en general poco precisos, mientras que la segunda aumenta a veces la precisión, pero no siempre, y además descarta a veces, según qué orden de eliminación se use, resultados tan buenos como los elegidos. La idea a explorar se basa en el comportamiento optimizador de los agentes racionales, y en particular en el hecho de que, en un juego en forma estratégica, ningún jugador racional jugará una estrategia que no maximice sus pagos en vista de cómo él supone que jugarán los demás, sea cual sea esa suposición o conjetura. La hipótesis de racionalidad de todos los jugadores, junto con la hipótesis de que tal racionalidad es de dominio público nos permitirán, de modo análogo a como se hizo en el capítulo anterior, construir procesos de eliminación de estrategias insatisfactorias, de modo que consideraremos aceptables las estrategias que sobrevivan a dicho proceso, y consideraremos un nuevo concepto de solución, que consiste en identificar como soluciones del juego a todos los perfiles que están constituidos por tales estrategias supervivientes.

Los conceptos de conjetura o creencia y de estrategia nunca óptima permiten precisar las ideas anteriores.

Definición 3.10

En el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$:

a) Llamamos **conjetura** del jugador i sobre cómo jugarán los demás, a toda distribución de probabilidad $\sigma_{-i} = (\sigma_1, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_n)$ sobre el espacio $S_{-i} = S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$ de las estrategias puras de los demás jugadores.

b) Decimos que la estrategia σ_i **es respuesta óptima del jugador i a su conjetura** σ_{-i} si la desigualdad

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geqslant u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$$

se cumple para toda estrategia mixta σ'_i de dicho jugador.

c) Decimos que la estrategia σ_i del jugador i es **nunca óptima** si no existe ninguna conjetura σ_{-i} de dicho jugador a la cual σ_i sea respuesta óptima.

El nuevo concepto de estrategia nunca óptima está estrechamente relacionado con el de estrategia estrictamente dominada. De hecho, es fácil ver que, para todo jugador i, toda estrategia estrictamente dominada (por alguna estrategia pura o mixta) es una estrategia nunca óptima, pues aquella que la domina produce a dicho jugador pagos estrictamente mayores, independientemente de cómo jueguen los demás. Más adelante confirmaremos que la implicación en sentido contrario no siempre es cierta.

Ejemplo 3.22

En el juego Halcón-Paloma:

		Jugador 2	
		Paloma	Halcón
Jugador 1	Paloma	$V/2$, $V/2$	0, V
	Halcón	V, 0	$V/2$-C, $V/2$-C

(donde $V > 0$, $C > 0$)

Si $C < V/2$, la estrategia Paloma de cualquier jugador está estrictamente dominada por Halcón, y por tanto no es respuesta óptima para ninguna conjetura de dicho jugador sobre cómo actuará el otro jugador. Sin embargo, si $C = V/2$, la estrategia Paloma sólo está débilmente dominada por Halcón, y en este caso sí es respuesta óptima a la conjetura según la cual el otro jugará Halcón con certeza.

Así pues, el hecho de ser débilmente dominada no implica el ser estrategia nunca óptima.

Definición 3.11

En el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, decimos que la estrategia pura s_i del jugador i es **racionalizable** o **justificable** si sobrevive al proceso de eliminación iterativa de estrategias nunca óptimas.

La razón de que a las estrategias racionalizables se les llame también justificables es que su uso por un jugador puede ser justificado por éste mediante una cadena de razonamientos, basados en el hecho de que es de dominio público que ambos jugadores son racionales (y en particular maximizadores de sus ganancias) y conocen los detalles del juego.

Ejemplo 3.23

a) Dado el Juego 3.4:

		Jugador 2		
		A	B	C
Jugador 1	X	2, 6	6, 0	1, 1
	Y	1, 3	2, 7	4, 4
	Z	2, 3	5, 1	3, 1

En la primera etapa eliminamos la estrategia C del jugador 2 porque, al estar dominada estrictamente por $\sigma_2 = (1/2, 1/2, 0)$, es una estrategia nunca óptima. En la segunda etapa eliminamos la estrategia Y del jugador 1 porque está dominada estrictamente por Z. En la tercera y última etapa eliminamos la estrategia B del jugador 2 porque, en ausencia de la estrategia Y de J1, está dominada estrictamente por A. Sobreviven por tanto al proceso de eliminación iterativa de estrategias nunca óptimas (que en este caso coincide con el proceso de eliminación iterativa estricta EIE-PM) las estrategias X y Z del jugador 1 y la estrategia A del jugador 2. En conclusión:

Conjunto de estrategias racionalizables del jugador 1 = {X, Z}
Conjunto de estrategias racionalizables del jugador 2 = {A}

Que J1 juegue X está justificado por:

1. X de J1 es respuesta óptima a la conjetura de J1 según la cual J2 va a jugar A.
2. A de J2 es respuesta óptima a la conjetura de J2 según la cual J1 va a jugar X.

La cadena de justificaciones para Z de J1 sería análoga, y para A de J2 es la ya escrita, pero invirtiendo el orden. Es de notar que las cadenas de justificación son tan cortas en este caso por ser equilibrios de Nash todos los perfiles construibles a partir de las estrategias supervivientes.

b) Dado el Juego 3.4 modificado (haciendo u_1(X, A) = 1 y u_2(Z, B) = 8):

		Jugador 2		
		A	B	C
Jugador 1	X	1, 6	6, 0	1, 1
	Y	1, 3	2, 7	4, 4
	Z	2, 3	5, 8	3, 1

La primera y segunda etapas son exactamente iguales que en el caso anterior, pero ahí acaba el proceso de eliminación (que también en este caso coincide con el proceso de eliminación iterativa estricta EIE-PM). En conclusión:

Conjunto de estrategias racionalizables del jugador 1 = {X, Z}
Conjunto de estrategias racionalizables del jugador 2 = {A, B}

La cadena de razonamientos justificatorios de X por J1 sería:

X de J1 es respuesta óptima a la conjetura de J1 según la cual J2 va a jugar B.
B de J2 es respuesta óptima a la conjetura de J2 según la cual J1 va a jugar Z.
Z de J1 es respuesta óptima a la conjetura de J1 según la cual J2 va a jugar A.
A de J2 es respuesta óptima a la conjetura de J2 según la cual J1 va a jugar X.

Las cadenas de razonamientos justificatorios de Z por J1, de A por J2 y de B por J2 serían la misma cadena anterior, pero comenzando en otro punto. Las cadenas de justificación son más largas en este caso, porque no es equilibrio de Nash ninguno de los perfiles de estrategias puras construibles a partir de las estrategias supervivientes.

En los dos casos del ejemplo anterior hemos visto que el proceso de eliminación iterativa de estrategias nunca óptimas coincide exactamente con el proceso de eliminación iterativa estricta EIE-PM. ¿Será siempre así? Planteemos la discusión en términos aún más simples. Ya sabemos que toda estrategia pura estrictamente dominada por otra (pura o mixta) es una estrategia nunca óptima, mientras que hay estrategias débilmente dominadas que no son estrategias nunca óptimas, ya que pueden ser respuestas óptimas a algunas conjeturas. Pero, ¿dada una estrategia pura s_i del jugador i en un juego G, es equivalente decir que s_i está estrictamente dominada y decir que s_i es una estrategia nunca óptima?

El siguiente teorema, del que sólo demostramos el apartado (c), establece que esa equivalencia se da con seguridad en los juegos de sólo dos jugadores, y también se da con toda generalidad si se hace una salvedad en la interpretación del significado de las conjeturas de un jugador, pero no se da si no se hace tal salvedad.

Teorema 3.9

Dado el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ y una estrategia pura o mixta cualquiera σ_i del jugador i:

a) Si $n = 2$, σ_i es una estrategia estrictamente dominada si y sólo si es una estrategia nunca óptima.

b) Si aceptamos como conjetura del jugador i cualquier distribución de probabilidad $\sigma_{-i} = (\sigma_1, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_n)$ sobre S_{-i}, incluso aunque las variables aleatorias componentes σ_j estén correlacionadas entre sí, entonces σ_i es una estrategia estrictamente dominada si y sólo si es una estrategia nunca óptima.

c) Si sólo aceptamos como conjeturas del jugador i aquellas distribuciones de probabilidad $\sigma_{-i} = (\sigma_1, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, ... , \sigma_n)$ sobre S_{-i} en las que las variables aleatorias σ_j son independientes entre sí, entonces, para el caso de 3 o más jugadores, ser una estrategia nunca óptima no implica ser una estrategia estrictamente dominada.

Demostración de (c):

Nos bastará con exhibir un contraejemplo. Sea el juego con tres jugadores, tomado de Osborne y Rubinstein (1994), en el que los tres reciben el pago indicado en cada casilla:

Juego 3.6

J3: M_1		J2 I	J2 D
J1	A	8	0
	B	0	0

J3: M_2		J2 I	J2 D
J1	A	4	0
	B	0	4

J3: M_3		J2 I	J2 D
J1	A	0	0
	B	0	8

J3: M_4		J2 I	J2 D
J1	A	3	3
	B	3	3

Aquí, la estrategia M_2 de J3, no está estrictamente dominada por ninguna otra, ni pura ni mixta. Efectivamente, si estuviera dominada por la estrategia mixta $(\alpha, 0, \beta, 1 - \alpha - \beta)$ se cumplirían las dos desigualdades siguientes, correspondientes al caso en que J1 juega A y J2 juega I y al caso en que J1 juega B y J2 juega D:

$$4 < 8\alpha + \beta(0) + 3(1 - \alpha - \beta)$$

$$4 < (0)\alpha + 8\beta + 3(1 - \alpha - \beta)$$

lo que implica que se cumpliría la desigualdad resultante de sumarlas miembro a miembro:

$$8 < 8\alpha + 8\beta + 6(1 - \alpha - \beta); \quad 8 < 2(\alpha + \beta) + 6; \quad 2 < 2(\alpha + \beta); \quad 1 < \alpha + \beta$$

y ello es imposible, por ser $(\alpha, 0, \beta, 1 - \alpha - \beta)$ un vector de probabilidad.

Y sin embargo, la estrategia M_2 de J3 no es respuesta óptima de J3 a ninguna conjetura $\sigma_{-3} = (\sigma_1, \sigma_2)$ sobre la que puedan jugar los otros dos jugadores, si exigimos que las variables aleatorias σ_1 y σ_2 sean independientes entre sí. En efecto, si $\sigma_1 = (\alpha, 1 - \alpha)$ y $\sigma_2 = (\beta, 1 - \beta)$ son estrategias mixtas de J1 y J2 respectivamente, y son independientes entre sí, el pago que obtiene J3 respondiendo con M_2 es

$$4\alpha\beta + 4(1 - \alpha)(1 - \beta) = 8\alpha\beta + 4(1 - \alpha - \beta)$$

mientras que respondiendo con M_1 sería $8\alpha\beta$, respondiendo con M_3 sería $8(1 - \alpha)(1 - \beta) = 8\alpha\beta + 8(1 - \alpha - \beta)$, y respondiendo con M_4 sería 3. Así pues, M_2 es respuesta óptima sólo si $8\alpha\beta + 4(1 - \alpha - \beta) \geqslant \max\{8\alpha\beta, 8\alpha\beta + 8(1 - \alpha - \beta), 3\}$.

Veamos que esta desigualdad no puede cumplirse para ningún par de valores de α y β en el intervalo $[0, 1]$. Para que $8\alpha\beta + 4(1 - \alpha - \beta) \geqslant 8\alpha\beta$, el sumando $4(1 - \alpha - \beta)$ ha de ser positivo o nulo, lo que exige que $1 \geqslant \alpha + \beta$. Para que $8\alpha\beta + 4(1 - \alpha - \beta) \geqslant 8\alpha\beta + 8(1 - \alpha - \beta)$, el sumando $4(1 - \alpha - \beta)$ ha de ser negativo o nulo, lo que exige que $\alpha + \beta \geqslant 1$. Por tanto, $\alpha + \beta$ es igual necesariamente a 1. Pero en ese caso, $8\alpha\beta$ no puede ser mayor o igual que 3, pues el programa

$$\max\ 8\alpha(1 - \alpha)$$

$$\text{sujeto a:}\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

tiene un valor máximo global de 2, que se alcanza cuando $\alpha = 1/2$.

Por tanto, la estrategia M_2 de J3 no es respuesta óptima de J3 a ninguna conjetura $\sigma_{-3} = (\sigma_1, \sigma_2)$ donde σ_1 y σ_2 son independientes.

Si, por el contrario, no exigimos que las variables aleatorias σ_1 y σ_2 sean independientes entre sí, M_2 de J3 sí es respuesta óptima de J3 a alguna conjetura $\sigma_{-3} = (\sigma_1, \sigma_2)$ sobre la que puedan jugar los otros dos jugadores. En efecto, si J3 tiene una conjetura σ_{-3} en la que las combinaciones (A, I), (B, D), (A, D) y (B, I) se producen con probabilidades 1/2, 1/2, 0 y 0, entonces M_2 sí es respuesta óptima de J3 a la conjetura σ_{-3}, ya que el pago que obtiene J3 respondiendo con M_2 es $4(1/2) + 4(1/2) = 4$, mientras que respondiendo con M_1 sería $8(1/2) = 4$, respondiendo con M_3 sería $8(1/2) = 4$, y respondiendo con M_4 sería $3(1/2) + 3(1/2) = 3$.

Ejemplo 3.24

Dado el juego introducido en el Ejemplo 3.21,

		J2				
		C1	C2	C3	C4	C5
J1	F1	5, 5	5, 0	7, 0	3, 1	0, 3
	F2	2, 7	2, 8	8, 7	0, 5	4, 7
	F3	1, 0	1, 3	6, 9	1, 3	1, 10
	F4	2, 2	1, 3	1, 3	4, 4	13, 2

el proceso de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas, realizado en dicho ejemplo, establece que las únicas supervivientes son las estrategias F1 y F4 de J1, y las estrategias C1 y C4 de J2. Puesto que sólo hay dos jugadores, el apartado (a) del Teorema 3.9 permite afirmar que las estrategias estrictamente dominadas coinciden con las estrategias nunca óptimas, y en consecuencia los conjuntos de estrategias racionalizables son $Z_1 = \{F1, F4\}$ y $Z_2 = \{C1, C4\}$.

Cerramos la sección con el siguiente teorema, que tampoco demostraremos. Este teorema permite definir las estrategias racionalizables de manera compacta, y equivalente a la anterior, de modo que la cadena de justificaciones que hemos utilizado anteriormente queda claramente fundamentada.

Teorema 3.10

Dado el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$,

a) Los conjuntos $Z_1, ..., Z_i, ..., Z_n$ son los conjuntos de estrategias puras racionalizables de los jugadores si y sólo si para cada jugador i el conjunto Z_i es el mayor subconjunto de S_i que cumple lo siguiente:

Toda estrategia pura z_i de Z_i es una respuesta óptima del jugador i a alguna conjetura σ_{-i} cuyo soporte es un subconjunto de $Z_{-i} = Z_1 \times \cdots \times Z_{i-1} \times Z_{i+1} \times Z_n$. (Es decir, en σ_{-i} la probabilidad de que algún jugador $j \neq i$ juegue alguna estrategia pura externa a Z_j es nula.)

b) En el caso en que $n = 2$, la estrategia pura z_i del jugador i pertenece a Z_i si y sólo si pertenece al soporte de una estrategia σ_i que forma parte de un EN.

Ilustremos este teorema con un ejemplo.

Ejemplo 3.25

a) Dado el juego introducido en el Ejemplo 3.21, el conjunto de los equilibrios de Nash, calculado en dicho ejemplo, es

$$\mathbf{S^{EN} = \{(F1, C1), (F4, C4), [(1/3)F1 + (2/3)F4, (1/4)C1 + (3/4)C4]\}}$$

y los conjuntos de estrategias racionalizables, calculados en el Ejemplo 3.24, son $Z_1 = \{F1, F4\}$ y $Z_2 = \{C1, C4\}$.

Las dos estrategias de Z_1 son respuesta óptima a alguna conjetura de J1 con soporte en Z_2 (F1 es respuesta óptima a la conjetura (1, 0, 0, 0, 0) de J1 según la cual J2 jugará C1 con seguridad, y F4 es respuesta óptima a la conjetura (0, 0, 0, 1, 0) de J1 según la cual J2 jugará C4 con seguridad). Análogamente, las dos estrategias de Z_2 son respuesta óptima a alguna conjetura de J2 con soporte en Z_1. Más específicamente, y puesto que (F1, C1) y (F4, C4) son EN, cada estrategia de Z_i pertenece al soporte de una estrategia σ_i que forma parte de un EN.

b) En el juego de las monedas, los conjuntos de estrategias racionalizables son $Z_1 = \{Cara, Cruz\}$ y $Z_2 = \{Cara, Cruz\}$. Comprobemos que cada estrategia de Z_i pertenece al soporte de una estrategia σ_i que forma parte de un EN. En efecto, *Cara* y *Cruz* del jugador 1 pertenecen al soporte de $\sigma_1 = (1/2, 1/2)$, *Cara* y *Cruz* del jugador 2 pertenecen al soporte de $\sigma_2 = (1/2, 1/2)$, y el perfil (σ_1, σ_2) es un EN.

3.4. REFINAMIENTOS DEL EQUILIBRIO DE NASH PARA JUEGOS EN FORMA NORMAL

De los conceptos de solución vistos hasta ahora, se ha demostrado que el equilibrio de Nash es el concepto más resolutivo. Sin embargo, hay muchos juegos estáticos con información completa, algunos de los cuales modelan situaciones de gran relevancia práctica, que tienen varios, a veces muchos, equilibrios de Nash. Por otra parte, hay equilibrios de Nash que parecen intuitivamente poco satisfactorios, bien porque no son óptimos de Pareto, bien porque se basan en conjeturas muy poco plausibles por parte de alguno de los jugadores. En definitiva, seguimos teniendo planteados tanto problemas de multiplicidad como problemas de explicación satisfactoria, y esto abre un campo de exploración y estudio al que podríamos llamar selección de equilibrios de Nash. Dentro de este campo, merece la pena distinguir dos aspectos muy diferentes.

El primero se plantea cómo seleccionar uno de entre varios equilibrios de Nash igualmente satisfactorios, es decir, que son equivalentes desde un punto de vista teórico. El ejemplo más fácil de esta situación lo constituye el juego de la batalla de los sexos, en el que encontramos dos equilibrios de Nash en estrategias puras cuya simetría los hace indistinguibles desde un punto de vista teórico. Otro ejemplo extremo es el juego de las peticiones de Nash, en el cual todos los equilibrios $(\alpha, 1 - \alpha)$, en los cuales $0 < \alpha < 1$, son igualmente meritorios teóricamente.

El segundo aspecto a considerar, que es el que exploraremos de manera más sistemática en esta sección, se plantea cómo seleccionar, de entre varios equilibrios de Nash, aquel cuyo mérito teórico sea mayor, es decir, aquel que resulte más razonable como predicción del comportamiento de jugadores racionales. El siguiente ejemplo ilustrará la idea.

Ejemplo 3.26

Juego 3.7

		Jugador 2			
		A	B	C	D
Jugador 1	A	7, 7	2, 2	1, 1	0, 0
	B	2, 2	2, 2	1, 3/2	3, 0
	C	1, 1	3/2, 1	1, 1	0, 0
	D	0, 0	0, 3	0, 0	0, 0

En este juego, los tres perfiles sombreados (A, A), (B, B) y (C, C) son equilibrios de Nash, los únicos en estrategias puras, pero basta un análisis somero para concluir que sus méritos son distintos y que, en consecuencia no son igualmente satisfactorios y su valor predictivo es diferente. Efectivamente, analizando el tercero de ellos, que es el perfil (C, C), observamos que la estrategia C de J1 está débilmente dominada por A y por B, y lo mismo le ocurre a la estrategia C de J2. Que cualquiera de ellos juegue C sólo se justifica si está seguro de que el otro va a jugar C, y aun en ese caso C no es estrictamente mejor que A o B, sino igual de mala. Lo mismo ocurre para J2 con su estrategia pura C. Resumiendo, no hay nada peor que ambos jugadores puedan hacer, si se exceptúa jugar D, que jugar su estrategia C.

Si analizamos el segundo de los equilibrios, el (B, B), observamos un mérito de ese perfil, que comparte con el primero (A, A). Consiste en que la estrategia de cada jugador en ese perfil es no dominada.

Si, por último, analizamos el primero de los equilibrios, el (A, A), encontramos un mérito de ese perfil, que no comparte con ninguno de los otros equilibrios de Nash. Consiste en que la estrategia de cada jugador en ese perfil, A en este caso, es la única respuesta óptima a la estrategia del otro jugador en ese perfil. Otro aspecto de interés, aunque no se refiere a la racionalidad individual e independiente de los jugadores, sino al análisis desde el punto de vista del conjunto de los jugadores, salta a la vista: el equilibrio (A, A) es mejor que el (B, B), y éste mejor que el (C, C), en el sentido de Pareto. En efecto, el equilibrio (A, A) Pareto-domina al equilibrio (B, B) y el (B, B) Pareto-domina al (C, C).

En esta sección nos interesaremos por el segundo de los aspectos recién descritos. Para ello, exploraremos conceptos de solución que a las condiciones del equilibrio de Nash añadan otras condiciones teóricas deseables. Las soluciones de un juego en ese caso ya no serían todos los equilibrios de Nash del juego sino sólo aquellos que cumplen las condiciones teóricas adicionales que hemos impuesto. Por eso, a dichos conceptos de solución se les llama refinamientos del equilibrio de Nash.

Podríamos ser muy exigentes e imponer condiciones que consideremos muy deseables, pero que sean difíciles de cumplir. Un caso extremo ilustrativo sería exigir un equilibrio en estrategias estrictamente dominantes, como el del dilema del prisionero, es decir, exigir que en el perfil solución la estrategia de cada jugador domine estrictamente a todas las demás estrategias de dicho jugador. Se conseguiría así en grado máximo el objetivo de lograr que el concepto sea resolutivo, pues dicha solución, si existe, es obviamente única. El problema con ese planteamiento exigente es que dicho concepto tendrá poca relevancia, al ser aplicable en escasas ocasiones. Otra posibilidad, diametralmente opuesta, sería exigir muy poco más a los equilibrios de Nash, para asegurarnos de que el concepto en cuestión sea siempre o casi siempre aplicable. En ese caso, conseguiríamos el objetivo de máxima aplicabilidad, pues todos los juegos finitos, y muchos de los infinitos, tienen algún equilibrio de Nash, pero no discerniríamos bien los mejores equilibrios, fallando así en el criterio de resolutividad. Ante esta escala de posibilidades, la idea interesante radica en buscar un punto de equilibrio entre aplicabilidad y resolutividad, es decir, explorar aquellas propiedades a exigir que sean lo suficientemente débiles como para que las soluciones existan siempre o casi siempre, y lo suficientemente fuertes como para que el número de soluciones sea pequeño.

Comenzaremos por dos refinamientos, el equilibrio admisible y el equilibrio estricto, que están situados, respectivamente, en los extremos débil y fuerte de la escala de refinamientos. Ambos son fáciles de definir y de interpretar. El equilibrio admisible exige a sus estrategias constituyentes que no estén dominadas, ni siquiera débilmente, mientras que el equilibrio estricto exige a sus estrategias constituyentes que sean la única respuesta óptima a la combinación de estrategias de los otros jugadores. Como era de esperar, el equilibrio admisible existe casi siempre, pero no así el estricto. En concreto, todos los juegos finitos tienen algún equilibrio admisible, pero no todos tienen equilibrio estricto.

Equilibrio admisible

El equilibrio admisible también recibe los nombres de **equilibrio no dominado** y de **equilibrio en estrategias no dominadas.**

Definición 3.12

Dado el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, decimos que el perfil de estrategias (puras o mixtas) $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$ es un **equilibrio admisible** si es un equilibrio de Nash y además todas sus estrategias componentes σ_i^* son no dominadas.

Los siguientes ejemplos ilustran este concepto.

Ejemplo 3.27

En el Juego 3.7 en el Ejemplo 3.26, los equilibrios en estrategias puras (A, A) y (B, B) son admisibles, pero el (C, C) no lo es, pues la estrategia C está débilmente dominada, para cualquier jugador, por la B.

Ejemplo 3.28

En los juegos descritos en el Apartado 2.1 del capítulo anterior (dilema del prisionero, batalla de los sexos, etc.) todos los equilibrios de Nash son admisibles, salvo en el juego Halcón-Paloma con $C = V/2$ y en el juego de votación por mayoría.

En el juego Halcón-Paloma, siendo $C = V/2$,

		Jugador 2	
		Paloma	Halcón
Jugador 1	Paloma	$V/2, V/2$	$0, V$
	Halcón	$V, 0$	$V/2 - C, V/2 - C$

de sus tres equilibrios de Nash en estrategias puras, sólo el equilibrio (*Halcón*, *Halcón*) es admisible. Los equilibrios (*Halcón*, *Paloma*) y (*Paloma*, *Halcón*) no son admisibles, ya que la estrategia *Paloma* está débilmente dominada por *Halcón*.

En el juego de votación por mayoría, los únicos equilibrios admisibles son aquellos que incluyen algún voto útil, (A, B, A) y (A, C, C), mientras que los demás equilibrios, (A, A, A), (B, B, B) y (C, C, C), no son admisibles. En efecto, en este juego, el jugador C1 tiene sus estrategias B y C dominadas por A, el jugador C2 tiene su estrategia A dominada por B, y el jugador C3 tiene su estrategia B dominada por C.

Una importante propiedad de este concepto es que es muy ampliamente aplicable. En particular, todos los juegos finitos tienen algún EN admisible.

Equilibrio estricto

El equilibrio de Nash estricto puede interpretarse intuitivamente como un equilibrio de Nash que no dejaría de serlo aunque se hubiera cometido un error minúsculo al estimar los pagos del juego.

Definición 3.13

Dado el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, decimos que el perfil de estrategias $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$ es un **equilibrio de Nash estricto** si cada una de sus estrategias componentes σ_i^* es respuesta óptima única a la combinación σ^*_{-i} de estrategias de los demás jugadores.

(Es decir, $\forall i$, $(\forall \sigma_i \in \Delta(S_i)$, $U_i(\sigma_i^*, \sigma^*_{-i}) > U_i(\sigma_i, \sigma^*_{-i}))$

Se trata de un equilibrio robusto ante errores suficientemente pequeños en los pagos. Una característica curiosa e interesante de los equilibrios de Nash estrictos, muy fácil de deducir de la definición, es que **sólo las estrategias puras pueden formar parte de**

ellos. Un aspecto negativo de este concepto de equilibrio es que no existe en todos los juegos finitos. En particular, **no existe EN estricto en el juego de las monedas**, al no tener este juego equilibrios de Nash en estrategias puras.

Los siguientes ejemplos ayudan también a ilustrar el concepto.

Ejemplo 3.29

En el Juego 3.7, en el Ejemplo 3.26 el único EN en estrategias puras estricto es el (A, A).

Ejemplo 3.30

El juego de las monedas no tiene EN estricto, pues su único EN, el perfil ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2)), está constituido por estrategias mixtas propias. Efectivamente, la estrategia mixta (1/2, 1/2) de J1 no es la única respuesta óptima a la estrategia (1/2, 1/2) de J2, ya que tanto la estrategia *Cara* como la estrategia *Cruz* son también respuestas óptimas.

Ejemplo 3.31

De los otros juegos descritos en el Apartado 2.1 del capítulo anterior, todos tienen EN estricto. En los juegos dilema del prisionero, batalla de los sexos, Halcón-Paloma (siendo C distinto de $V/2$) y la caza del ciervo son estrictos todos los EN en estrategias puras. En el juego Halcón-Paloma (siendo $C = V/2$) no existe ningún EN estricto. En el juego de las peticiones de Nash, son estrictos todos los EN del tipo $(x, 1 - x)$ donde $0 < x < 1$, y sólo ellos.

Este concepto de solución, el equilibrio estricto, es el más exigente de cuantos vamos a examinar, y un aspecto negativo asociado a esa exigencia es que no todos los juegos finitos tienen equilibrio estricto, como demuestra el caso del juego de las monedas. Sin embargo, cabe preguntarse si es muy frecuente el caso de los juegos finitos que no tienen ningún equilibrio estricto o, por el contrario, se trata de casos excepcionales. No entraremos en el análisis riguroso de esta cuestión, que se basa en el concepto de juego «genérico en forma estratégica», pero sí diremos que la respuesta, en términos intuitivos, a dicha pregunta es que **casi todos** los juegos finitos en forma estratégica son tales que todos sus equilibrios de Nash son estrictos. A continuación vamos a analizar dos conceptos de solución que, en la escala de exigencias, se sitúan cerca del punto crítico en que la exigencia es la mayor posible con la condición de que tales soluciones existan en todos los juegos finitos.

El primero de ellos, el equilibrio perfecto (también llamado equilibrio perfecto de mano temblorosa) se debe a Selten y puede interpretarse intuitivamente como un equilibrio robusto ante errores suficientemente poco probables al conjeturar un jugador qué estrategias jugarán los demás (como si la mano de los otros jugadores, al señalar la estrategia a seguir, sufriera un pequeño temblor que pudiera hacerla elegir por error cualquier otra). El segundo, el equilibrio propio, se debe a Myerson y puede interpretarse igual que el anterior, pero exigiendo además que los errores que conducen a resultados peores sean mucho menos probables.

Equilibrio perfecto (o perfecto de mano temblorosa)

La definición que sigue de equilibrio perfecto no es la original de Selten, sino una definición equivalente elaborada por Myerson, que nos resulta más conveniente por servir de base para la posterior definición de equilibrio propio.

Definición 3.14

a) Dado un juego finito en forma estratégica $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, y dado un número positivo ε, el perfil de estrategias mixtas $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ es **un equilibrio ε-perfecto** si dado un jugador cualquiera i, y una estrategia pura z cualquiera del jugador i, la probabilidad estipulada en σ_i de que juegue z es

1. Estrictamente positiva.
2. Estrictamente menor que ε, si z no es una respuesta óptima del jugador i al vector de estrategias σ_{-i} de los otros jugadores.

b) Dado un juego finito en forma normal $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, el perfil σ es un **equilibrio de Nash perfecto** si existe una sucesión $\{\varepsilon_k\}_{k=1,\ 2,...}$ de números estrictamente positivos y existe una sucesión $(\sigma^k)_{k=1,\ 2,...}$ de perfiles, tales que

1. Para todo k, el perfil σ^k es un equilibrio ε_k-perfecto de G.
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ y $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma^k = \sigma$.

Lo que hemos llamado equilibrio ε-perfecto no es necesariamente un equilibrio de Nash, pero sí está cerca de uno. El siguiente ejemplo comenzará a aclarar estos conceptos:

Ejemplo 3.32

En el siguiente juego, en el que (A, A) y (B, B) son sus EN en estrategias puras,

Juego 3.8

		Jugador 2	
		A	B
Jugador 1	A	7, 7	2, 2
	B	2, 2	2, 2

a) El perfil $\sigma = ((0{,}9,\ 0{,}1), (0{,}9,\ 0{,}1))$ es un equilibrio ε-perfecto para $\varepsilon = 0{,}2$, ya que cualquiera de los jugadores juega con probabilidad suficientemente pequeña (menor que ε) su estrategia pura B que no es óptima frente a la estrategia (0,9, 0,1) del otro jugador. Sin embargo, σ no es equilibrio ε-perfecto para ningún ε igual o menor que 0,1, ya que el jugador 1 juega B con una probabilidad demasiado alta (no estrictamente menor que ε), a pesar de que B no es óptima frente a (0,9, 0,1) de su adversario. Obsérvese que σ no es un equilibrio de Nash.

b) El perfil ((0,1, 0,9), (0,1, 0,9)) es un equilibrio ε-perfecto para $\varepsilon = 0{,}95$ (aunque no lo es para ningún ε igual o menor que 0,9).

c) El perfil $((1 - \delta/2,\ \delta/2),\ (1 - \delta/2,\ \delta/2))$, siendo $0 < \delta < 1$, es un equilibrio δ-perfecto.

d) La sucesión de perfiles ε_k-perfectos $\{\sigma^k\}_{k=1,2,\ldots}$, donde

$$\sigma^k = \left[\left(1 - \frac{\varepsilon_k}{2}, \frac{\varepsilon_k}{2}\right), \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{2}, \frac{\varepsilon_k}{2}\right)\right] \quad \text{y} \quad \varepsilon_k = 1/2^k$$

tiene por límite el perfil $\sigma = ((1, 0), (1, 0)) = (\mathrm{A}, \mathrm{A})$, y en consecuencia **(A, A) es un equilibrio perfecto**.

e) La sucesión de perfiles $\{\sigma^k\}_{k=1,2,\ldots}$, donde

$$\sigma^k = \left[\left(\frac{\varepsilon_k}{2}, 1 - \frac{\varepsilon_k}{2}\right), \left(\frac{\varepsilon_k}{2}, 1 - \frac{\varepsilon_k}{2}\right)\right] \quad \text{y} \quad \varepsilon_k = 1/2^k$$

tiene por límite el perfil $\sigma = ((0, 1), (0, 1)) = (\mathrm{B}, \mathrm{B})$, pero ni los perfiles de esta sucesión son ε_k-perfectos, ni lo son los de ninguna sucesión cuyo límite sea el perfil (B, B). En consecuencia, el equilibrio de Nash **(B, B) no es un equilibrio perfecto.**

Ejemplo 3.33

En el siguiente juego, en el que (A, A), (B, B) y (C, C) son sus EN en estrategias puras,

Juego 3.9

		Jugador 2		
		A	B	C
Jugador 1	A	7, 7	2, 2	1, 1
	B	2, 2	2, 2	1, 2
	C	1, 1	2, 1	1, 1

a) Utilizando el mismo razonamiento que en el ejemplo anterior, la sucesión de perfiles ε_k-perfectos $\{\sigma^k\}_{k=1,2,\ldots}$, donde $\sigma^k = [(1 - \varepsilon_k - \varepsilon'_k, \varepsilon_k, \varepsilon'_k), (1 - \varepsilon_k - \varepsilon'_k, \varepsilon_k, \varepsilon'_k)]$ y $\varepsilon_k = \varepsilon'_k = 1/2^k$, tiene por límite el perfil $\sigma = ((1, 0, 0), (1, 0, 0)) = (\mathrm{A}, \mathrm{A})$, y en consecuencia **(A, A) es un equilibrio perfecto**.

b) Ninguna sucesión de perfiles $\{\sigma^k\}_{k=1,2,\ldots}$ en estrategias mixtas completas, donde $\sigma^k = [(\varepsilon_k, 1 - \varepsilon_k - \varepsilon'_k, \varepsilon'_k), (\delta_k, 1 - \delta_k - \delta'_k, \delta'_k)]$ y $\lim \varepsilon_k = \lim \varepsilon'_k = \lim \delta_k = \lim \delta'_k = 0$, y con límite el perfil $\boldsymbol{x} = ((0, 1, 0), (0, 1, 0)) = (\mathrm{B}, \mathrm{B})$, está constituida por equilibrios ε_k-perfectos, ya que A del jugador 2 es la única respuesta óptima a $(\varepsilon_k, 1 - \varepsilon_k - \varepsilon'_k, \varepsilon'_k)$ del jugador 1, y por tanto $1 - \delta_k - \delta'_k$ tendría que ser menor que ε_k, lo que contradice el hecho de que $\lim \varepsilon_k = \lim \varepsilon'_k = \lim \delta_k = \lim \delta'_k = 0$. Lo mismo puede argumentarse acerca del perfil (C, C). En conclusión, **ni (B, B) ni (C, C) son equilibrios perfectos.**

Equilibrio propio

Definición 3.15

a) Dado un juego finito en forma estratégica $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, y dado un número positivo ε, el perfil de estrategias mixtas $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ es **un equilibrio de Nash ε-propio** si dado un jugador cualquiera i, y un par cualquiera de estrategias puras z y z' del jugador i:

1. Las probabilidades estipuladas en σ_i de que juegue z o z', $p_{\sigma,i}(z)$ y $p_{\sigma,i}(z')$, son ambas estrictamente positivas.
2. Si $U_i(z, \sigma_{-i}) < U_i(z', \sigma_{-i})$, entonces $p_{\sigma,i}(z) \leqslant \varepsilon \cdot p_{\sigma,}(z')$ (es decir, si z le reporta menor utilidad esperada que z', juega z con probabilidad menor o igual que ε veces la probabilidad con que juega z').

b) Dado un juego finito en forma estratégica $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, el perfil $\boldsymbol{x}$ es un **equilibrio de Nash propio** si existe una sucesión $\{\varepsilon_k\}_{k=1,\ 2,...}$ de números estrictamente positivos y existe una sucesión $\{\sigma^k\}_{k=1,\ 2,...}$ de perfiles, tales que

1. Para todo k, el perfil σ^k es un equilibrio ε_k-propio de G.
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ y $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma^k = \sigma$.

Ejemplo 3.34

En el juego del Ejemplo 3.32:

a) El perfil $\sigma = [(1 - \delta/h, \delta/h), (1 - \delta/h, \delta/h)]$, siendo $h \geqslant 2$ y $0 < \delta < 1$, es un equilibrio δ-propio. En efecto, cumple la condición 1 porque todas las estrategias del perfil son mixtas completas, y además satisface la condición 2 porque, cumpliendo los pagos la relación

$$U_i(\text{B}, \sigma_{-i}) = 2 < U_i(\text{A}, \sigma_{-i}) = 7(1 - \delta/h) + 2(\delta/h) = 7 - 5\delta/h$$

ocurre que las probabilidades cumplen la relación

$$p_{\sigma,i}(\text{B}) = \delta/h \leqslant \delta \cdot p_{\sigma,i}(\text{A}) = \delta(1 - \delta/h) = (h - \delta)(\delta/h)$$

b) La sucesión de perfiles ε_k-propios $\{\sigma^k\}_{k=1,2,...}$, donde

$$\sigma^k = \left[\left(1 - \frac{\varepsilon_k}{2}, \frac{\varepsilon_k}{2}\right), \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{2}, \frac{\varepsilon_k}{2}\right)\right]$$

y $\varepsilon_k = 1/2^k$, tiene por límite el perfil $\sigma = ((1, 0), (1, 0)) = (\text{A, A})$, y en consecuencia el perfil **(A, A) es un equilibrio propio.**

Es muy fácil ver, y se demostrará más adelante, que **todo equilibrio propio es perfecto**. Intuitivamente, si el equilibrio σ es propio, no sólo es robusto para al menos una sucesión de temblores cada vez más pequeños, como cumplen los equilibrios perfectos, sino que también es robusto para al menos una sucesión de temblores «razonables» (es decir, temblores cuyos errores asociados cumplen la condición 2 de los equilibrios ε-propios, que asegura que los errores más graves tienen asignada una probabilidad de un menor orden de magnitud que los menos graves).

Otra propiedad que se deduce inmediatamente de la definición es que **todo equilibrio de Nash interior (es decir, constituido por estrategias mixtas completas) es un equilibrio propio**. En efecto, si $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i ,..., \sigma_n)$ es un EN y σ_i es una estrategia mixta completa para todo i (toda estrategia pura de i se juega con probabilidad estrictamente positiva), existe un valor ε positivo tal que dicho perfil es un equilibrio ε-propio. Concretamente, bastaría tomar ε igual a 1/2, puesto que cualquier estrategia pura z del jugador i es respuesta óptima a σ_{-i}, y por tanto no se activa la exigencia de que $p_{\sigma,i}(z) \leqslant \varepsilon \cdot p_{\sigma,i}(z')$. Y entonces bastará elegir la sucesión $\{\varepsilon_k\}_{k=1,\ 2,...}$, donde $\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^k}$, y la sucesión $\{\sigma^k\}_{k=1,\ 2,...}$, donde $\sigma^k = \sigma$, para que se cumpla

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} \sigma^k = \sigma$$

y podamos concluir que σ es un equilibrio propio.

La gran importancia teórica del concepto de equilibrio propio radica en dos características adicionales que tiene. La primera es que si σ es equilibrio propio de un juego en forma normal G, σ induce un equilibrio secuencial (concepto que será definido en el Capítulo 6) en cualquier juego en forma extensiva cuya representación en forma normal coincida con G. La segunda es que existe para todo juego finito, como se afirma en el próximo teorema.

Otra caracterización de los equilibrios perfecto y propio

Los teoremas que siguen establecen características de ambos equilibrios que resultan muy conveniente a efectos de cálculo, por su facilidad de aplicación. Para la demostración de estos teoremas, dentro de un tratamiento riguroso de estos conceptos, véase Ritzberger (2002) y Van Damme (1987).

Teorema 3.11

Dado un juego finito en forma estratégica $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, el perfil de estrategias $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ es un equilibrio perfecto **si y sólo si** σ es el límite de una sucesión $\{\sigma^k\}_{k=1,\ 2,...}$ de perfiles, tales que

1. Para todo k, el perfil σ^k está constituido por estrategias mixtas completas.

2. Para cualquier jugador i, su estrategia σ_i en σ es respuesta óptima a la combinación σ^k_{-i} de estrategias de los demás para cualquier perfil σ^k de la sucesión.

Teorema 3.12

Dado un juego finito en forma estratégica $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, sea el perfil de estrategias $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ un **equilibrio propio**, y sean $\{\varepsilon_k\}_{k=1,\ 2,...}$ una sucesión de números estrictamente positivos con límite nulo y $\{\sigma^k\}_{k=1,\ 2,...}$ una sucesión de equilibrios ε_k-propios con límite σ.

Entonces, para cualquier jugador i, su estrategia σ_i en σ es respuesta óptima a la combinación σ^k_{-i} de estrategias de los demás para cualquier perfil σ^k tal que ε_k sea suficientemente pequeño.

Intuitivamente, podríamos interpretar que las estrategias de σ^k, que son estrategias mixtas completas y que se aproximan cada vez más a las de σ, son perturbaciones de éstas ocasionadas por temblores cada vez más pequeños de la mano de cada jugador. De acuerdo con esa interpretación, el equilibrio σ es perfecto si es robusto para al menos una sucesión de temblores, en el sentido de que cada σ_i es respuesta óptima a la combinación σ^k_{-i} si ésta está suficientemente cerca de σ_{-i}.

Ejemplo 3.35

En el juego Halcón-Paloma, siendo $C = V/2 = 3$

		Jugador 2	
		Paloma	Halcón
Jugador 1	Paloma	3, 3	0, 6
	Halcón	6, 0	0, 0

a) Sus equilibrios $\sigma = (Halcón, Paloma)$ y $\sigma' = (Paloma, Halcón)$ no son perfectos. En efecto, si σ lo fuera, σ sería el límite de una sucesión $\{\sigma^k\}_{k=1,\ 2,\ldots}$ de perfiles constituidos por estrategias mixtas completas, y para cualquier jugador i, su estrategia σ_i en σ sería respuesta óptima a la combinación σ^k_{-i} de estrategias de los demás para cualquier perfil σ^k de la sucesión. Sin embargo, dado $\sigma^k_{-2} = \sigma^k_1 = (\varepsilon_k, 1 - \varepsilon_k)$, *Paloma* no es respuesta óptima de 2 ya que $U_2(Paloma, \sigma^k_1) = 3\varepsilon_k$, mientras que $U_2(Halcón, \sigma^k_1) = 6\varepsilon_k$.

b) Su equilibrio $(Halcón, Halcón)$ es propio, pues la sucesión $(\sigma^k)_{k=1,\ 2,\ldots}$, donde

$$\sigma^k = (\sigma^k_1, \sigma^k_2) = [((\varepsilon_k)^2, 1 - (\varepsilon_k)^2), ((\varepsilon_k)^2, 1 - (\varepsilon_k)^2)] \quad \text{y} \quad \varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$$

está constituida por ε_k-equilibrios propios y tiene por límite el perfil $(Halcón, Halcón)$.

Jerarquía lógica entre los refinamientos definidos y condiciones de existencia de éstos

El siguiente teorema, del cual sólo se demostrarán los apartados a) y d), establece la relación de implicación entre los refinamientos estudiados y afirma la existencia del equilibrio propio.

Teorema 3.13

Dado un juego finito en forma estratégica $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$:

a) Si el perfil estratégico $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ es un equilibrio perfecto entonces es un equilibrio admisible.

b) Si el juego G es bipersonal ($n = 2$) y el perfil estratégico $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ es un equilibrio admisible entonces es un equilibrio perfecto.

c) Si el perfil estratégico $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ es un equilibrio estricto, entonces también es un equilibrio propio.

d) Si el perfil estratégico $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ es un equilibrio propio, entonces también es un equilibrio perfecto.

e) Existe al menos un perfil de estrategias (puras o mixtas) que es un equilibrio propio.

Demostración de los apartados a y d

a) Por reducción al absurdo, si un equilibrio $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ no es admisible, existe un jugador i que juega una estrategia σ_i débilmente dominada por otra estrategia σ_i'. Ahora bien, en ese caso σ_i no es respuesta óptima a ningún vector de estrategias mixtas completas de los demás, pues σ_i' le proporcionará un pago esperado estrictamente mayor que σ_i (en términos intuitivos, σ_i deja de ser óptima en cuanto se produce el más mínimo temblor que hace posible que los demás jugadores jueguen todas sus estrategias puras, incluso aquellas contra las cuales σ_i da pagos estrictamente inferiores que los de σ_i'). Por tanto, no existe ninguna sucesión $(\sigma^k_{-i})_{k=1,2,...}$ de perfiles de estrategias mixtas completas que cumpla lo establecido en el Teorema 3.11. Así pues, el equilibrio σ no es perfecto.

d) Se deduce de manera inmediata de la definición dada que todo equilibrio ε-propio es ε-perfecto, ya que si z no es respuesta óptima al vector de estrategias σ_{-i} de los otros jugadores, le reporta a i menor utilidad esperada frente a σ_{-i} que otra estrategia pura z', luego jugará z con probabilidad menor o igual que ε veces la probabilidad con que juega z' (que es menor que la unidad), y por tanto jugará z con probabilidad estrictamente menor que ε. Y de lo anterior se deduce que todo equilibrio propio es perfecto.

En cuanto al apartado b), merece la pena hacer observar que si $n > 2$ no se cumple la proposición, como se demostrará más adelante en el Ejemplo 3.38, en el que hay tres jugadores y existe un equilibrio admisible que no es perfecto. Por último, aunque no hemos intentado una demostración detallada y rigurosa del apartado c), es fácil argumentar intuitivamente que todo equilibrio estricto es también propio. En efecto, al ser un equilibrio estricto robusto a cualquier perturbación de los pagos suficientemente pequeña, también lo será a cualquier perturbación o temblor en el proceso de señalar la estrategia pura elegida, siempre que este temblor sea lo suficientemente pequeño como para que las probabilidades de señalar otras estrategias puras por error sean a su vez suficientemente pequeñas, lo que haría que los pagos esperados difirieran de los pagos sin errores en cantidades insignificantes. Pero si el equilibrio es robusto ante cualquier temblor suficientemente pequeño, lo será también para los casos en que las probabilidades de error se ajustan a la pauta exigida por la definición de equilibrio propio.

En la Figura 3.8 se resumen las implicaciones lógicas y las condiciones de existencia de los refinamientos, en una escala lineal.

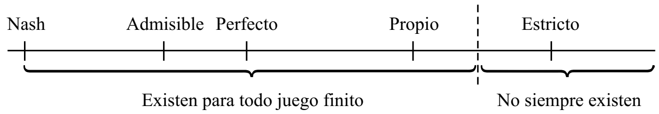


Figura 3.8 Implicaciones lógicas y existencia de los refinamientos.

Otros ejemplos ilustrativos

Ejemplo 3.36

En el Juego 3.10:

Juego 3.10

		Jugador 2			
		A	B	C	D
Jugador 1	A	7, 7	2, 2	1, 1	0, 0
	B	2, 2	2, 2	1, 2	3, 0
	C	1, 1	2, 1	1, 1	0, 0
	D	0, 0	0, 3	0, 0	0, 0

a) El equilibrio (C, C) no es admisible, pues la estrategia C está débilmente dominada, para cualquier jugador, por la B. Por tanto, no es ni perfecto ni propio ni estricto.

b) El equilibrio (A, A) es estricto, y por tanto es propio y perfecto. Puede comprobarse mediante la sucesión de perfiles $\{\sigma^k\}_{\mathrm{k}=1,\ 2,\dots}$ en la cual $\sigma^k = (\sigma_1^k, \sigma_2^k)$, donde $\sigma_1^k = \sigma_2^k = (1 - \varepsilon_k - \varepsilon_k^2 - \varepsilon_k^3, \varepsilon_k, \varepsilon_k^2, \varepsilon_k^3)$ y donde $\varepsilon_k = \dfrac{1}{2^{5+k}}$, cuyo límite es el perfil (A, A).

c) Veamos que el equilibrio (B, B) es perfecto, pero no propio. Sea la sucesión de perfiles $\{\sigma^k\}_{k=1,2,\dots}$ en la cual $\sigma^k = (\sigma_1^k, \sigma_2^k)$, donde $\sigma_1^k = \sigma_2^k = (\varepsilon_k, 1 - 5\varepsilon_k, \varepsilon_k, 3\varepsilon_k)$ y donde $\varepsilon_k = \dfrac{1}{2^{5+k}}$, cuyo límite es el perfil (B, B). Es fácil comprobar que B del jugador i es respuesta óptima a $\sigma_j^k = (\varepsilon_k, 1 - 5\varepsilon_k, \varepsilon_k, 3\varepsilon_k)$ del jugador j para todo k. En efecto:

$$U_i(\mathrm{B}, \sigma_2^k) = 2\varepsilon_k + 2(1 - 5\varepsilon_k) + \varepsilon_k + 9\varepsilon_k) = 2 + 2\varepsilon_k$$

$$U_i(\mathrm{A}, \sigma_2^k) = 7\varepsilon_k + 2(1 - 5\varepsilon_k) + \varepsilon_k) = 2 - 2\varepsilon_k$$

$$U_i(\mathrm{C}, \sigma_2^k) < U_i(\mathrm{B}, \sigma_2^k) \text{ y } U_i(\mathrm{D}, \sigma_2^k) < U_i(\mathrm{B}, \sigma_2^k)$$

por estar C y D dominadas por B. Así pues, (B, B) cumple la caracterización del Teorema 3.11, y por tanto es un equilibrio perfecto. También podríamos haber invocado el Teorema 3.13, apartado b), ya que (B, B) es admisible y sólo hay dos jugadores.

Para ver que el equilibrio (B, B) no es propio, procedamos por reducción al absurdo. Sea una sucesión cualquiera de perfiles $\{\sigma^k\}_{k=1,2,...}$ ε_k-propios cuyo límite en el perfil (B, B) conforme ε_k tiende a cero. Sea $\sigma^k = (\sigma_1^k. \sigma_2^k)$, donde

$$\sigma_1^k = (\alpha_k, 1 - \alpha_k - \beta_k - \gamma_k, \beta_k, \gamma_k) \quad \text{y} \quad \sigma_2^k = (\alpha'_k, 1 - \alpha'_k - \beta'_k - \gamma'_k, \beta'_k, \gamma'_k)$$

$$U_2(\sigma_1^k, \text{A}) = 7\alpha_k + 2(1 - \alpha_k - \beta_k - \gamma_k) + \beta_k = 2 + 5\alpha_k - \beta_k - 2\gamma_k$$

$$U_2(\sigma_1^k, \text{B}) = 2\alpha_k + 2(1 - \alpha_k - \beta_k - \gamma_k) + \beta_k + 3\gamma_k = 2 - \beta_k + \gamma_k$$

$$U_2(\sigma_1^k, \text{C}) = 1\alpha_k + 2(1 - \alpha_k - \beta_k - \gamma_k) + \beta_k = 2 - \alpha_k - \beta_k - 2\gamma_k$$

$$U_2(\sigma_1^k, \text{D}) = 0$$

Puesto que $U_2(\sigma_1^k, \text{D}) < U_2(\sigma_1^k, \text{C}) < U_2(\sigma_1^k, \text{A})$, es preciso que $\gamma_k \leqslant \varepsilon_k\beta_k \leqslant \varepsilon_k^2\alpha_k$. Sin embargo, en virtud de la caracterización del Teorema 3.12 para los equilibrios propios, B del jugador 2 ha de ser respuesta óptima a $\sigma_1^k = (\alpha_k, 1 - \alpha_k - \beta_k - \gamma_k, \beta_k, \gamma_k)$ para todo k en el que ε_k sea suficientemente pequeño. Por tanto,

$$U_2(\sigma_1^k, \text{B}) = 2\alpha_k + 2(1 - \alpha_k - \beta_k - \gamma_k) + \beta_k + 3\gamma_k > U_i(\sigma_1^k, \text{A}) =$$
$$= 7\alpha_k + 2(1 - \alpha_k - \beta_k - \gamma_k) + \beta_k$$

de donde se deduce que $\gamma_k > 5\alpha_k/3$, y esto está en contradicción con $\gamma_k \leqslant \varepsilon_k^2\alpha_k$.

Merece la pena observar que el Juego 3.10 es el resultado de añadir al Juego 3.9 una estrategia pura estrictamente dominada para cada jugador, la estrategia D, y sin embargo en el Juego 3.10 el perfil (B, B) sí es perfecto mientras que en el Juego 3.9 no lo era. Por tanto, podemos decir que el conjunto de los EN perfectos no es robusto (invariante) ante la adición de estrategias estrictamente dominadas.

Ejemplo 3.37

Analicemos los juegos descritos en el Apartado 2.1 del capítulo anterior:

En el dilema del prisionero el único equilibrio de Nash es estricto, y por tanto propio y perfecto.

En la batalla de los sexos, todos sus EN son propios, pues los dos EN en estrategias puras son estrictos, mientras que el equilibrio en estrategias mixtas completas es necesariamente propio.

En el juego de las monedas su único EN, el perfil ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2)), al estar constituido por estrategias mixtas completas, es un equilibrio propio.

Ejemplo 3.38

Dado el juego con tres jugadores, tomado de Van Damme (1987):

Juego 3.11

Jugador 3: X		**Jugador 2**	
		I	D
Jugador 1	A	1, 1, 1	1, 0, 1
	B	1, 1, 1	0, 0, 1

Jugador 3: Y		**Jugador 2**	
		I	D
Jugador 1	A	1, 1, 0	0, 0, 0
	B	0, 1, 0	1, 0, 0

los únicos EN en estrategias puras son los perfiles (A, I, X) y (B, I, X), ambos con el vector de pagos (1, 1, 1). **El equilibrio (B, I, X) es admisible, pero no es perfecto**. En efecto, sea la sucesión de perfiles $\{\sigma^k\}_{k=1,2,\dots}$ en estrategias mixtas completas, donde $\sigma^k = [(\varepsilon_k, 1 - \varepsilon_k), (1 - \varepsilon'_k, \varepsilon'_k), (1 - \varepsilon''_k, \varepsilon''_k)]$, donde $\lim \varepsilon_k = \lim \varepsilon'_k = \lim \varepsilon''_k = 0$. Dicha sucesión tiene por límite el perfil $x = ((0, 1), (1, 0), (1, 0)) = (\mathrm{B, I, X})$, pero veremos que no está constituida por equilibrios ε_k-perfectos. Efectivamente, si los jugadores 2 y 3 juegan $\sigma^k_{-1} = [(1 - \varepsilon'_k, \varepsilon'_k), (1 - \varepsilon''_k, \varepsilon''_k)]$, el jugador 1 puede responder:

A, lo que le proporcionaría un pago igual a

$$U_1(\mathrm{A}, \sigma^k_{-1}) = (1 - \varepsilon'_k)(1 - \varepsilon''_k)(1) + (1 - \varepsilon'_k)\varepsilon''_k(1) + \varepsilon'_k(1 - \varepsilon''_k)(1) + \varepsilon'_k\varepsilon''_k(0)$$

B, lo que le proporcionaría un pago igual a

$$U_1(\mathrm{B}, \sigma^k_{-1}) = (1 - \varepsilon'_k)(1 - \varepsilon''_k)(1) + (1 - \varepsilon'_k)\varepsilon''_k(0) + \varepsilon'_k(1 - \varepsilon''_k)(0) + \varepsilon'_k\varepsilon''_k(1)$$

Restando miembro a miembro:

$$U_1(\mathrm{A}, \sigma^k_{-1}) - U_1(\mathrm{B}, \sigma^k_{-1}) =$$

$$= (1 - \varepsilon'_k)\varepsilon''_k + \varepsilon'_k(1 - \varepsilon''_k) - \varepsilon'_k\varepsilon''_k(1) > 0 \text{ (pues } \varepsilon'_k \ll 1 - \varepsilon''_k \text{ y } \varepsilon''_k \ll 1 - \varepsilon''_k)$$

Así pues, B del jugador 1 no es respuesta óptima a σ^k_{-1} de los otros dos, y por tanto $1 - \varepsilon_k$ tendría que ser menor que ε_k, lo que contradice al hecho de que $\lim \varepsilon_k = \lim \varepsilon'_k = \lim \varepsilon''_k = 0$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

3.1 Considérense los siguientes juegos en forma estratégica:

Juego 1

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	3, 2	2, 6
	B	1, 3	3, 0

Juego 2

		Jugador 2		
		I	M	D
Jugador 1	A	7, 2	2, 7	3, 6
	C	6, 4	1, 3	2, 3
	B	2, 7	7, 2	4, 5

Juego 3

		Jugador 2		
		I	M	D
Jugador 1	A	5, 4	2, 3	1, 4
	C	2, 2	1, 3	2, 2
	B	6, 3	2, 2	1, 2

1. Determine todos los equilibrios de Nash en estrategias puras y mixtas.
2. Averigüe cuáles de ellos son admisibles, perfectos, propios o estrictos.

3.2 Calcule en función del parámetro desconocido $a > 0$ todos los equilibrios de Nash de la siguiente versión del juego de las monedas modificado:

		Jugador 2	
		Cara	Cruz
Jugador 1	Cara	$a, -1$	$-1, 1$
	Cruz	$-1, 1$	$1, -1$

3.3 Sean los siguientes juegos:

Juego 1

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	4, 4	f, f
	B	$2 - f, 1$	1, 3

Juego 2

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	f, 5	$f+2$, g
	B	1, -1	f, 0

Juego 3

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	5, f	9, 2
	B	1, 2	g, 1

Juego 4

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	4, f	3, 1	2, 2
	B	2, 0	1, -3	g, 1

Juego 5

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	4, f	g, 1	9, 0
	B	2, 2	1, 0	0, 0

1. Averigüe qué condiciones han de cumplir los parámetros del juego para que exista un único equilibrio de Nash.
2. Averigüe qué condiciones han de cumplir los parámetros del juego para que exista algún equilibrio de Nash en estrategias mixtas propias.
3. Averigüe qué condiciones han de cumplir los parámetros del juego para que exista algún equilibrio de Nash estricto.

3.4 En el juego siguiente:

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	5, f	7/2, 7/2
	B	f, 7/2	f, f

Deduzca todos los equilibrios de Nash, que no lo sean en estrategias puras, en función del parámetro f.

3.5 Identifique, para los juegos siguientes, cuáles de las afirmaciones que le siguen son ciertas y cuáles son falsas:

a)

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	3, 3	0, g
	B	f, 0	$7+f$, $7+f$

Existe algún equilibrio de Nash en estrategias mixtas propias:

1. Sólo si $g > 0$.
2. Sólo si $g > -13$.
3. Si $g > -13$.
4. Sólo si $g > -7$.
5. Si $f = g = 2$.

b)

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	2, 2	0, 9
	B	9, 0	f, f

Existe algún equilibrio de Nash en el que:

1. Si $f = -1$, el pago esperado para el jugador 2 es 10/64.
2. Si $f = -1$, el pago esperado para el jugador 2 es 1/4.
3. El pago esperado para el jugador 2 es 33, sólo si $f = 2$.
4. El pago esperado para el jugador 2 es -33, sólo si $f = 2$.
5. Los pagos esperados de los jugadores coinciden, sólo si $f \leqslant 9$.

3.6 En el juego siguiente, demuestre que los perfiles estratégicos

$$\sigma = [(1/4, 0, 3/4), (0, 1/2, 1/2)] \quad \text{y} \quad \sigma' = [(1/2, 1/2, 0), \text{M}]$$

son equilibrios de Nash. ¿Son ambos equilibrios perfectos?

		Jugador 2		
		I	M	D
Jugador 1	A	2, 4	3, 5	2, 2
	C	1, 5	3, 4	1, 1
	B	3, 1	2, 3	3, 4

3.7 Sea el siguiente juego de suma cero expresado en forma matricial, donde $a \in R$:

		Jugador 2		
		I	M	D
Jugador 1	A	2	7	3
	C	1	-1	3
	B	4	a	-4

Determine para qué valores del parámetro a existe un punto de silla.

3.8 En el llamado juego del coronel Blotto hay dos jugadores, el coronel Blotto y su adversario el coronel Cotton. Ambos libran una batalla en la que se disputan h posiciones $p_1, ..., p_h$ sobre un territorio, cuyos valores son

$$v_1 \leqslant v_2 \leqslant \cdots \leqslant v_i \leqslant \cdots \leqslant v_h$$

todos positivos. El coronel Blotto, que dispone de k_1 unidades de soldados, y el coronel Cotton, que dispone de k_2 unidades, han de asignar sus unidades a las distintas posiciones para luchar por controlarlas, y dicha asignación han de decidirla simultáneamente. El pago que cada jugador recibe de cada posición p_j depende del resultado de la lucha por dicha posición, de modo que cada jugador obtiene el valor v_j si consigue su control, el opuesto de dicho valor si el adversario consigue su control, y un valor nulo si ninguno consigue el control. Supondremos que cada jugador consigue el control de una posición si asigna más unidades a esa posición que su adversario, y que ninguno lo consigue si ambos asignan el mismo número de unidades. El pago total para cada jugador es la suma de los pagos parciales.

Considérense los siguientes casos:

a) Existen $h = 3$ posiciones, igualmente valoradas por los jugadores, $v_1 = v_2 = v_3 = 1$, y disponen del mismo número de unidades a asignar, $k_1 = k_2 = 2$.
b) Existen $h = 2$ posiciones, donde $0 < v_1 < v_2$, y disponen del mismo número de unidades a asignar, $k_1 = k_2 = 5$.
c) Existen h posiciones, donde $0 < v_1 < v_2 < \cdots < v_{h-1} < v_h$, y disponen de k_1 y k_2 unidades a asignar, siendo $k_1 < h$ y $k_2 < h$. Además, supóngase que cada jugador no puede asignar más de una unidad de soldados por posición.

Determine, para cada caso, los valores de seguridad, y calcule el valor del juego. Calcule asimismo todos los EN del juego para los tres casos.

3.9 Sea el juego con tres jugadores, tomado de Van Damme (1987, pág. 30):

Jugador 3: X		**Jugador 2**	
		I	D
Jugador 1	A	1, 1, 1	0, 0, 1
	B	0, 0, 1	0, 0, 1

Jugador 3: Y		**Jugador 2**	
		I	D
Jugador 1	A	0, 0, 0	0, 0, 0
	B	0, 0, 0	1, 1, 0

1. Calcule los EN propios (en estrategias puras) de este juego.
2. Calcule los EN propios (en estrategias puras) del juego resultante de eliminar la estrategia pura Y de J3, que está estrictamente dominada. Comente el resultado obtenido.

3.10 En el siguiente juego,

		Jugador 2		
		A	B	C
Jugador 1	A	2, 2	2, 1	0, 0
	B	2, 2	0, 1	2, 2

identifique, si los hay, todos los perfiles de estrategias puras que sean:

a) Equilibrios perfectos (es decir, que tengan la particularidad de ser robustos a alguna sucesión de temblores de tamaño tendente a cero).
b) Equilibrios estrictos.

3.11 En los juegos llamados concursos de belleza, hay n jugadores

$$J_i, \quad i \in \{1, 2, ..., n\}$$

cada uno de los cuales escribe un número x_i entre 0 y 100. Resulta vencedor aquel jugador J_k cuyo número x_k resulte estar más cercano de $r\bar{x}$, siendo $0 \leqslant r \leqslant 1$ y siendo $\bar{x}$ la media aritmética de todos los números escritos, es decir, $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$ (si varios números están igual de cerca de $r\bar{x}$, se elige de entre ellos un único vencedor al azar). El premio al vencedor es una cantidad de 1.000 euros.

Considérense los siguientes casos:

1. Hay $n = 2$ jugadores, $r = 1$ y el número x_i ha de ser entero

$$(x_i \in \{0, 1, 2, ..., 99, 100\})$$

2. Hay $n = 2$ jugadores, $r = 3/4$ y el número x_i ha de ser entero

$$(x_i \in \{0, 1, 2, ..., 99, 100\})$$

3. Hay n jugadores, $0 \leqslant r < 1$ y el número x_i ha de ser real

$$(x_i \in [0, 100])$$

Determine, para los dos primeros casos, los valores de seguridad, y calcule el valor del juego. Calcule asimismo las estrategias racionalizables y los EN del juego para los tres casos.

3.12 Sea el juego con tres jugadores, adaptado a partir de Fudenberg y Tirole (1991, págs. 62-63):

Jugador 3: X		**Jugador 2**	
		I	D
Jugador 1	A	3, 3, 3	0, 0, 0
	B	0, 0, 0	0, −5, 0

Jugador 3: Y		**Jugador 2**	
		I	D
Jugador 1	A	0, 0, 0	3, −3, 3
	B	−3, 3, 3	0, 0, 0

Jugador 3: Z		**Jugador 2**	
		I	D
Jugador 1	A	0, 0, 0	0, −5, 0
	B	−5, 0, 0	3, −3, 3

Jugador 3: T		**Jugador 2**	
		I	D
Jugador 1	A	2, 2, 2	0, 0, 0
	B	0, 0, 0	2, 2, 2

Demuestre que la estrategia pura T del jugador 3 es nunca óptima, a pesar de que no está estrictamente dominada, y calcule las estrategias racionalizables y los EN.

CAPÍTULO 4

Juegos dinámicos con información completa

En este capítulo vamos a analizar los juegos dinámicos con información completa, que son aquellos en los que los jugadores pueden tomar decisiones en distintos instantes del tiempo y donde cada jugador conoce con toda certeza las funciones de pagos de todos los jugadores. Su forma de representación natural es la extensiva.

Al incluir en el análisis las características temporales del juego, se hace posible que un jugador tenga, en el momento de jugar, un conocimiento de las decisiones tomadas por otros jugadores en momentos anteriores, y prevea la posibilidad de que sus decisiones actuales sean conocidas por los otros jugadores, si éstos juegan con posterioridad. Ello implica una ampliación del conjunto de los juegos objeto de estudio, lo que obliga a plantearse de nuevo cuál es el concepto de solución apropiado para esta nueva situación. En las secciones siguientes se aborda, tras una primera sección introductoria, el estudio de dos importantes conceptos, el proceso de inducción hacia atrás y el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Se concluye con dos aplicaciones, el duopolio de Stackelberg y un modelo de Leontief.

4.1. INTRODUCCIÓN

En esta sección iniciamos el estudio detallado de los juegos dinámicos con información completa mediante un recordatorio de los elementos de la representación de un juego en forma extensiva, y mediante la introducción de la terminología básica y de algunos ejemplos que serán útiles a lo largo del capítulo.

Significado de juego dinámico

Tal como se estudió en el Capítulo 1, en los juegos dinámicos o secuenciales se especifica el momento del juego en que tiene lugar cada jugada y el jugador a quien le corresponde jugar. Se especifica asimismo qué sabe dicho jugador del desarrollo anterior del juego. Se supone además que la estructura del juego es de dominio público. Una suposición adicional a lo largo de este capítulo es que la información es completa, es decir, las funciones de pagos o ganancias de los jugadores son de dominio público.

Merece la pena recordar aquí que los juegos estáticos estudiados en los Capítulos 2 y 3 son un caso particular de juegos dinámicos donde todas las decisiones se toman a la vez (o, expresándolo de manera equivalente, pero más adecuada, en el momento de tomar su decisión, ningún jugador conoce las decisiones de los demás).

Elementos de un juego representado en forma extensiva. Ejemplos iniciales

Recuérdese que la representación en forma extensiva de un juego requiere responder a las preguntas: ¿quiénes?, ¿cuándo?, ¿cómo?, ¿qué saben? y ¿cuánto? Concretando el significado de estas preguntas, es necesario precisar:

1. Quiénes son los jugadores.
2. **a)** Cuándo tiene que jugar cada jugador.
   b) Qué cosas puede hacer cuando le toca jugar (acciones factibles).
   c) Qué sabe dicho jugador, cuando le toca jugar, acerca del desarrollo previo del juego.
3. A cuánto asciende la ganancia de cada jugador para cada posible desarrollo del juego.

En el Capítulo 1 se formalizó la descripción de un juego en forma extensiva con ayuda de los conceptos de **nodo** (nodo de azar, nodo de decisión y nodo terminal), **conjunto de información**, **acción** y **estrategia,** los cuales permiten, junto con las nociones de **jugadores** y **pagos**, una descripción completa de estos juegos y abren el camino a la búsqueda de su solución.

A continuación se proponen algunos ejemplos de juegos dinámicos con su representación en forma extensiva, que nos permitirán más adelante ilustrar los nuevos conceptos e ideas. Mientras no se diga lo contrario, supondremos que, cuando los resultados del juego consistan en ingresos monetarios (positivos o negativos) para los jugadores, esas cantidades a ingresar representan las ganancias del juego.

Ejemplo 4.1 Un juego de disuasión

En el siguiente juego de disuasión, la empresa INCUMBRON ejerce un monopolio de hecho en el mercado de un bien, lo cual le produce unos beneficios altos, de 7 u.m. Por su parte, la empresa ENTRON, que opera en otros mercados, está estudiando la posibilidad de entrar en el mercado monopolizado por INCUMBRON porque sabe que podría aumentar sus beneficios de 3 a 5 u.m., siempre que la reacción de ésta sea buena y se establezca una competencia razonable. En ese caso, la empresa establecida, INCUMBRON, obtendría unos beneficios moderados, de 5 u.m. Sin embargo, una competencia dura, por ejemplo una guerra de precios, haría que ambas empresas se quedaran sin beneficios.

Esta situación se representa como un juego en forma extensiva en la Figura 4.1, en donde ENTRON es la jugadora 1 e INCUMBRON es la jugadora 2.

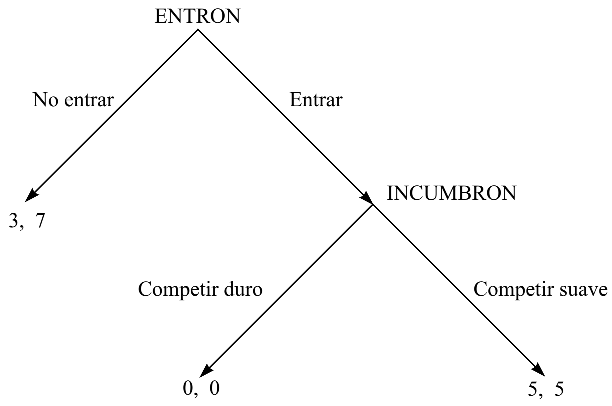


Figura 4.1 Juego de disuasión 1.

Consideremos ahora la siguiente variación: la entrada de ENTRON obligaría a ambas empresas, como única manera de subsistir, a diferenciar su producto adaptándolo a sólo uno de los dos colectivos diferenciados, A y B, que lo demandan. En concreto, supongamos que ambas empresas han de decidir simultáneamente qué colectivo seleccionan, sabiendo que los pagos serán los siguientes: si ambas empresas seleccionan el mismo colectivo se ven abocadas a unas pérdidas de 2 u.m. si éste es A y de 1 u.m. si es B, mientras que si seleccionan colectivos diferentes, ENTRON obtiene con A o B unos beneficios de 4 ó 1 u.m., respectivamente, e INCUMBRON unos beneficios de 4 ó 2 u.m.

La representación sería ahora la que aparece en la Figura 4.2.

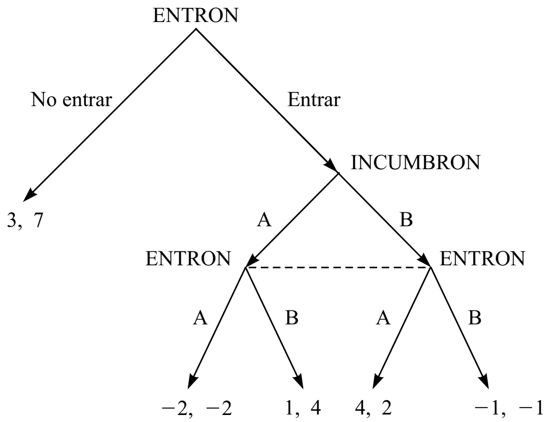


Figura 4.2 Juego de disuasión 2.

Ejemplo 4.2 El juego del trespiés

En este juego hay dos montones de monedas sobre la mesa, que inicialmente tienen una moneda cada uno, y dos jugadores, J1 y J2, uno junto a cada montón. Los jugadores toman, de manera alternada, decisiones consistentes en seguir (S) o en terminar (T). Comienza J1, y si elige T se acaba el juego, mientras que si elige S el juego prosigue de modo que los montones pasan a tener 0 monedas el primero y 3 el segundo y le toca el turno a J2. Si J2 elige T se acaba el juego, mientras que si juega S los montones pasan a tener 2 monedas el primero y 2 el segundo (es decir, disminuye en una moneda el montón del jugador que acaba de tomar la decisión S, y aumenta en dos monedas el montón del otro jugador), y el juego prosigue hasta una última jugada a cargo de J1. Si en su última jugada J1 elige T se acaba el juego y si elige S los montones varían de igual modo (pasando a tener una moneda el primero y 4 el segundo), y se acaba el juego. Cuando el juego termina, cada jugador recibe como pago su propio montón de monedas.

La Figura 4.3 recoge la representación en forma extensiva de este juego.

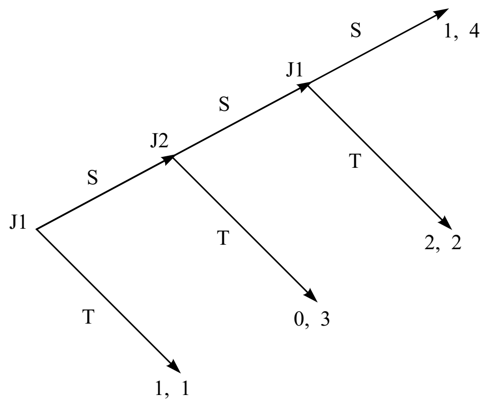


Figura 4.3 Juego del trespiés.

Ejemplo 4.3 El juego del ciempiés

Al igual que en el juego del trespiés, los montones tienen inicialmente una moneda cada uno, y los dos jugadores, J1 y J2, toman, de manera alternada, decisiones consistentes en seguir (S) o en terminar (T). También las consecuencias de cada opción son análogas: tras la decisión T se acaba el juego y tras la decisión S se alteran las cantidades mediante el procedimiento ya descrito (disminuye en una moneda el montón de quien ha tomado la decisión S y aumenta en dos monedas el montón del otro jugador) y prosigue el juego. La única diferencia es que si en el caso del trespiés había tres nodos de decisión de los que salían tres pies rotulados como T, en el caso del ciempiés hay cien nodos de decisión de los que salen cien pies rotulados como T.

Este juego fue inventado por Rosenthal, y debe su nombre al aspecto de ciempiés que tiene su representación en forma extensiva, la cual se muestra en la Figura 4.4.

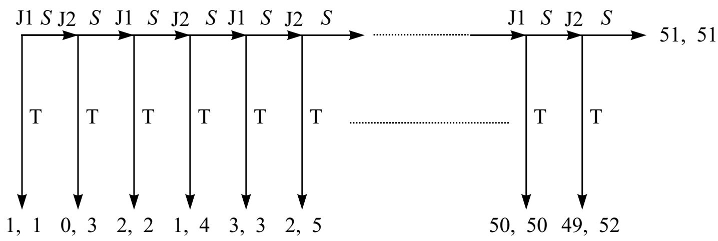


Figura 4.4 Juego del ciempiés.

Ejemplo 4.4 Dilema del prisionero repetido *n* veces

Dos jugadores juegan n veces consecutivas el dilema del prisionero. Se supone que al comenzar cada una de ellas es de dominio público cómo han jugado ambos jugadores en las etapas anteriores y que los pagos finales del juego se calculan sumando los pagos correspondientes a las distintas etapas.

La representación en forma extensiva de este juego, para $n = 2$, se recoge en la Figura 4.5.

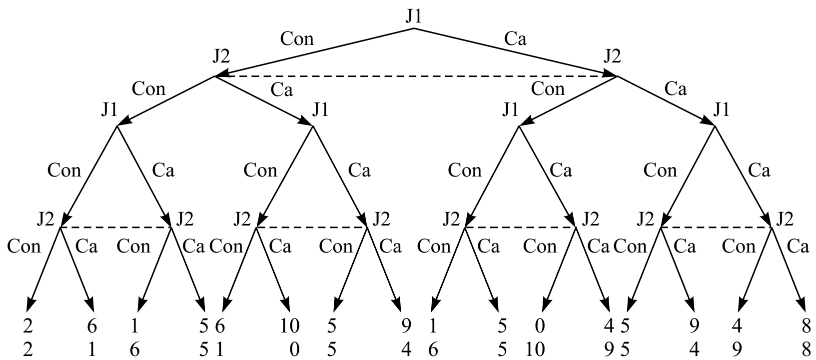


Figura 4.5 Dilema del prisionero, repetido 2 veces.

Ejemplo 4.5 Juego del reparto. Versión discreta

Se trata de repartir una bolsa con $n (n > 1)$ monedas iguales, cuyo contenido es de dominio público, entre dos jugadores. El jugador J1 saca, para ofrecérselas a J2, un número m de monedas de la bolsa (0 como mínimo y n como máximo). A continuación, J2 ve las monedas sacadas por J1 y dice ***«Sí»***, o bien dice ***«Resto»***. J2 recibe como pago del juego las monedas sacadas por J1 si su acción es «Sí», y las que han quedado en la bolsa si su acción es «Resto». J1 recibe las monedas que no se han dado a J2.

La representación en forma extensiva de este juego, para $n = 4$, aparece en la Figura 4.6.

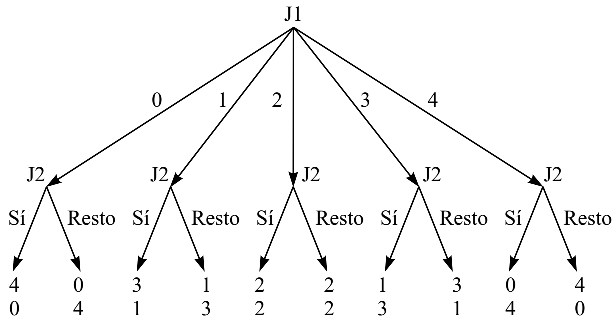


Figura 4.6 Juego del reparto, con $n = 4$ monedas.

Versión continua

Se trata de repartir un solar cuadrado, cuya área es de dominio público, entre dos jugadores. El jugador 1 escribe un número real r entre 0 y 100. A continuación, J2 observa el número escrito por J1 y dice ***«Sí»***, o bien dice ***«Resto»***. J2 recibe un r% del solar si dice «Sí», y un $(100 - r)$% si dice «Resto». J1 recibe lo que queda del solar. Cabe otra interpretación más informal y expresiva, según la cual se trata de repartir un pastel entre dos jugadores, el jugador 1 hace dos partes con un cuchillo y el jugador 2 se come la parte que él mismo elige.

Ejemplo 4.6 Juego del ultimátum (versión discreta)

Se trata de repartir una bolsa con $n(n > 1)$ monedas iguales, cuyo contenido es de dominio público, entre dos jugadores. El jugador J1 saca, para ofrecérselas a J2, un número m de monedas (0 como mínimo y n como máximo). A continuación, J2 ve las monedas sacadas por J1 y dice ***«Sí»*** o ***«No»***, que significan ***«Acepto»*** y ***«No Acepto»***, respectivamente. Si J2 dice «Sí», recibe en pago las $\boldsymbol{m}$ monedas sacadas y J1 recibe $\boldsymbol{n - m}$ (las restantes). Pero si J2 dice «No», ambos reciben 0 monedas.

La representación en forma extensiva de este juego, para $n = 4$, sería la que aparece en la Figura 4.7.

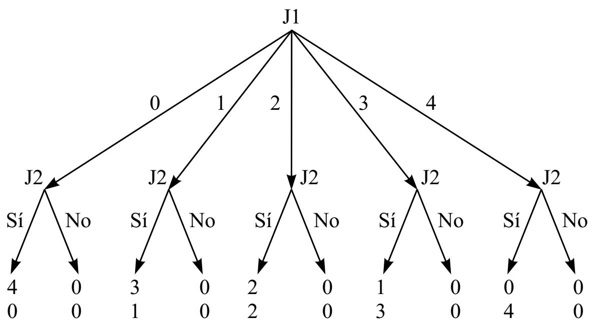


Figura 4.7 Juego del ultimátum, con $n = 4$ monedas.

Terminología básica adicional

Recuérdese que la representación en forma extensiva de un juego finito se realiza mediante un **árbol** constituido por **ramas** y **nodos**, que las ramas son los segmentos orientados que unen dos nodos y representan las acciones o jugadas, y que los nodos son los extremos de una o más ramas. Recuérdese asimismo que:

— El **nodo inicial** representa el comienzo del juego y no es precedido por ningún otro, que los **nodos finales o terminales** representan el final del juego y no preceden a ningún otro, y que los nodos no terminales son de dos tipos: **nodos de azar**, si representan una jugada del azar, y **nodos de decisión** si representan una jugada o decisión de uno de los jugadores.

— Cada nodo terminal ha de llevar una etiqueta que informa de los pagos que corresponden a cada uno de los jugadores. De tales vectores de pagos puede decirse que son los **resultados** del juego, interpretando aquí la palabra resultados como las consecuencias en términos de utilidad del juego.

— Los **conjuntos de información** permiten representar el conocimiento que cada jugador tiene (en el momento de decidir en un nodo) del desarrollo previo del juego.

— Una **estrategia** pura de un jugador es un plan de acción completo. Especifica una acción factible de dicho jugador para cada uno de sus conjuntos de información. Un **perfil** estratégico es un vector de estrategias, una por cada uno de los jugadores.

— Todo camino que, siguiendo las ramas del árbol, conduce desde el nodo inicial a un nodo terminal es una **senda, resultado, desarrollo o trayectoria** posible del juego. Cada vez que se juega efectivamente un juego se recorre uno, y sólo uno, de los desarrollos posibles (cuál sea este desarrollo depende de cómo hayan jugado los jugadores y de qué resultados se hayan producido en las jugadas de azar). Así pues, todos los desarrollos posibles del juego han de estar a la vista en el árbol del juego, y hay tantos como nodos terminales. Cada perfil estratégico determina un desarrollo del juego, salvo en lo que se refiere a las jugadas del azar. Obsérvese que la palabra resultado se usa aquí como sinónimo de desarrollo o trayectoria, y no en su acepción de pagos finales.

El siguiente ejemplo ilustrativo ayudará a aclarar estos términos

Ejemplo 4.7

a) En el juego de la Figura 4.3 (juego del trespiés), hay 3 nodos de decisión (2 para J1, uno de ellos el inicial, y uno para J2), todos los cuales tienen el mismo conjunto {S, T} de acciones factibles, y 4 nodos terminales.

Hay 4 desarrollos posibles del juego, y son los siguientes: T, $S \rightarrow T$, $S \rightarrow S \rightarrow T$ y $S \rightarrow S \rightarrow S$. Cada nodo terminal culmina y representa un desarrollo posible del juego, de modo que el primer nodo terminal (el situado más a la izquierda) culmina el desarrollo T, el segundo nodo terminal culmina el desarrollo $S \rightarrow T$, y así sucesivamente.

Todos los conjuntos de información de este juego son unitarios, y las estrategias puras de cada jugador son todas las funciones que van desde el conjunto de sus nodos de decisión hasta el conjunto {S, T}. Así pues, J1 tiene 4 estrategias puras (que son $S - S$, $S - T$, $T - S$ y $T - T$) mientras que J2 tiene 2 (que son S y T). En consecuencia, el número de perfiles estratégicos es 8.

b) De manera análoga, en el juego de la Figura 4.4 (juego del ciempiés), hay 100 nodos de decisión (50 para cada jugador, todos los cuales tienen el mismo conjunto {S, T} de acciones factibles) y 101 nodos terminales. Hay 101 desarrollos posibles del juego, cada uno de los cuales culmina en un nodo terminal, y son los siguientes:

$$\mathrm{T},\ \mathrm{S} \to \mathrm{T},\ \mathrm{S} \to \mathrm{S} \to \mathrm{T},\ \mathrm{S} \to \mathrm{S} \to \mathrm{S} \to \mathrm{T},\ ...,\ \mathrm{S} \to \mathrm{S} \to \mathrm{S} \to \mathrm{S} \to \cdots \to \mathrm{S}$$

Todos los conjuntos de información de este juego son unitarios, y las estrategias puras de cada jugador son todas las funciones que van desde el conjunto de sus 50 nodos de decisión hasta el conjunto de acciones factibles {S, T}. Hay, por tanto, 2^{50} estrategias puras para cada jugador y 2^{100} perfiles estratégicos.

Una estrategia pura genérica para el jugador i, s_i, puede describirse mediante una 50-pla $s_i = (a_1, a_2, ..., a_{50})$ o bien mediante una expresión como $a_1 - a_2 - \cdots - a_{49} - a_{50}$, donde cada a_k se sustituye por una de las acciones S o T, interpretándose como que el jugador en cuestión planea realizar esa acción en su conjunto de información o nodo de decisión k-ésimo. Por ejemplo, la estrategia $\mathrm{S} - \mathrm{T} - \mathrm{T} - \mathrm{T} - \cdots - \mathrm{T}$ de J1 es el plan del jugador 1 consistente en jugar S en el nodo inicial y T en cualquiera de los otros nodos en los que pudiera tocarle jugar, mientras que la estrategia $\mathrm{S} - \mathrm{S} - \mathrm{S} - \mathrm{S} - \cdots - \mathrm{S}$ de J2 es el plan del jugador 2 consistente en jugar S en cualquiera de sus nodos.

Observación sobre el significado de las estrategias

Aunque hemos descrito intuitivamente las estrategias puras de un jugador como planes completos de acción de dicho jugador, que especifican qué acciones decidirá dicho jugador en cada una de las situaciones en que pudiera corresponderle jugar, es necesario resaltar que la definición formal dada en el Capítulo 1 establece que una estrategia ha de especificar una acción factible para cada uno de los conjuntos de información de tal jugador. La diferencia saltará a la vista cuando examinemos la estrategia $\mathrm{T} - \mathrm{T}$ del jugador 1 en el juego del trespiés. En efecto, vista como un simple plan de acciones futuras, podríamos objetar al plan $\mathrm{T} - \mathrm{T}$ como redundante y confuso, ya que especifica que el jugador 1 realizará la acción T en su segundo nodo de decisión, aun cuando está claro que ese mismo plan $\mathrm{T} - \mathrm{T}$ ya especifica una acción T en el primer nodo de J1 que hará terminar el juego, haciendo imposible que dicho jugador se enfrente a una nueva decisión en su segundo nodo.

¿Para qué puede servir entonces especificar la acción a realizar por J1 en el segundo nodo cuando la especificada en el primer nodo es T? No servirá para nada útil si nuestro propósito es sólo describir los distintos resultados y desarrollos posibles de un juego. Pero supongamos por un momento que es de dominio público que ambos jugadores son racionales (tienen el propósito de acabar el juego con los pagos más altos posibles y la inteligencia necesaria para analizar el juego). Al analizar el juego por anticipado, el jugador 2 sí presta atención a la segunda T del hipotético plan $\mathrm{T} - \mathrm{T}$, ya que indica el acertado propósito de J1 de maximizar su pago en el caso de tener que decidir en ese segundo nodo (consigue 2 con T, y sólo 1 con S). Esta reflexión provoca en J2 la respuesta, también hipotética, de jugar T si tuviera la oportunidad de hacerlo (consiguiendo 3 en lugar de 2), y estas reflexiones provocan a su vez en J1 la respuesta de jugar T en su primer nodo (consiguiendo 1 en lugar de 0). Así pues, en este análisis la estrategia T − T de J1 sí ha tenido perfecto sentido, y sin embargo la estrategia «T a secas» de J1 hubiera sido insuficiente.

Concluyendo, especificar planes intuitivos del estilo «T y se acaba el juego» para J1 puede ser suficiente cuando se trate sólo de dentificar los posibles resultados y desarrollos del juego en función de sus jugadas, pero no es suficiente si se pretende hacer, tal como hace la teoría de juegos, análisis desde el punto de vista de jugadores racionales que aspiran a maximizar sus pagos.

Ejemplo 4.8

a) En el juego de la Figura 4.2 (juego de disuasión 2), hay 4 nodos de decisión, que forman tres conjuntos de información, dos de ellos unitarios, y hay 5 desarrollos posibles. La empresa ENTRON tiene 4 estrategias puras, que son *Entrar* − A, *Entrar* − B, *No Entrar* − A y *No Entrar* − B, mientras que INCUMBRON tiene sólo 2 estrategias puras, A y B.

b) En el dilema del prisionero repetido 2 veces, J1 tiene 5 conjuntos de información, todos unitarios, y J2 tiene otros 5, todos binarios. En cualquiera de los anteriores conjuntos de información, las opciones factibles son *Confesar* y *Callar*, y por tanto ambos jugadores tienen 2^5 estrategias puras y el número de perfiles es 2^{10}. Hay $2^4 = 16$ nodos terminales, y por tanto 16 trayectorias o desarrollos posibles del juego, pero sólo hay 9 resultados finales en cuanto a pagos se refiere, pues algunos de los 16 desarrollos conducen a los mismos vectores de pagos. Por ejemplo, los desarrollos

$$\textit{Confesar} \rightarrow \textit{Confesar} \rightarrow \textit{Confesar} \rightarrow \textit{Callar} \text{ y } \textit{Confesar} \rightarrow \textit{Callar} \rightarrow \textit{Confesar} \rightarrow \textit{Confesar}$$

conducen al vector de pagos (6, 1). Merece la pena resaltar que el número total de perfiles estratégicos (2^{10}) es mayor que el número total de desarrollos posibles del juego (2^4). Efectivamente, puesto que este juego no tiene jugadas de azar, cada perfil estratégico determina uno y sólo un desarrollo del juego, pero puede ocurrir, y así ocurre en este caso, que varios perfiles distintos determinen el mismo desarrollo. Por ejemplo, los perfiles (*Confesar-Confesar-Confesar-Confesar-Confesar*, *Confesar-Confesar-Confesar-Confesar-Confesar*) y (*Confesar-Confesar-Confesar-Confesar-Callar*, *Confesar-Confesar-Confesar-Confesar-Callar*) determinan ambos el desarrollo *Confesar* → *Confesar* → *Confesar* → *Confesar*.

Juegos con información perfecta y juegos con información imperfecta

La distinción entre estas dos categorías de juegos es muy importante, ya que los juegos que están en una y otra tienen propiedades generales muy distintas. En particular, los juegos con información perfecta son más simples y cumplen propiedades teóricas de las que los otros juegos carecen.

Definición 4.1

Sea *G* un juego de información completa (la estructura y los pagos del juego son de dominio público).

Decimos que *G* es de **información perfecta** si cada conjunto de información de cualquiera de sus jugadores es unitario. Si, por el contrario, existe un jugador con algún conjunto de información no unitario, decimos que el juego *G* es de **información imperfecta.**

Algunos juegos de salón famosos, como el ajedrez y las damas, son juegos de información perfecta, mientras que los juegos de cartas no suelen serlo (cada jugador desconoce, al menos parcialmente, las cartas de los demás, es decir, desconoce el resultado de algunas jugadas de azar, y ello le impide saber, en el momento de realizar su jugada, en qué nodo se encuentra).

En cuanto a los juegos descritos en este capítulo, son de información perfecta los juegos del trespiés y del ciempiés, el juego de disuasión 1, y los juegos de reparto y ultimátum. Por el contrario, el juego de disuasión 2 (con un conjunto de información binario) y el dilema del prisionero repetido 2 veces (con cinco conjuntos de información binarios) son de información imperfecta.

Aclarada la terminología básica referente a los juegos dinámicos de información completa (perfecta o imperfecta), podemos empezar a plantearnos algunas de las principales cuestiones relativas al análisis de dichos juegos. En particular, comencemos por preguntarnos qué relación hay entre las dos categorías de juegos estudiadas hasta ahora (estáticos con información completa y dinámicos con información completa).

Aunque un vistazo superficial a la cuestión podría hacernos pensar que se trata de categorías disjuntas, de modo que un juego perteneciente a una estaría excluido de la otra, lo cierto es que la nueva categoría incluye a la anterior como caso particular. En efecto, cualquier juego estático puede interpretarse como un juego dinámico en el cual las jugadas se realizan secuencialmente, pero de tal modo que cada jugador desconoce totalmente, en el momento de jugar, cuáles han sido las jugadas realizadas por los jugadores que le han precedido. Además, ese juego dinámico puede representarse sin dificultad en forma extensiva, con sólo usar los conjuntos de información que sean necesarios para reflejar dicho desconocimiento. El siguiente ejemplo aclara la interpretación dinámica de los juegos estáticos.

Ejemplo 4.9

a) La representación en forma extensiva del juego estático dilema del prisionero es la siguiente:

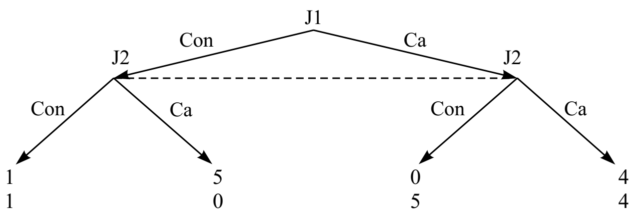


Figura 4.8 Dilema del prisionero en forma extensiva.

b) La representación en forma extensiva del Juego 2.5 (definido en el Ejemplo 2.14) con tres jugadores

Juego 2.5

Jugador 3: X		**Jugador 2**		
		I	M	D
Jugador 1	A	1, 3, 0	−1, 2, 3	−1, 0, −2
	B	2, 1, 1	4, 1, 3	0, 0, 1

Jugador 3: Y		**Jugador 2**		
		I	M	D
Jugador 1	A	0, 2, −1	4, 3, 2	1, 2, 0
	B	2, −2, 5	5, 5, 2	4, 6, 4

es la que aparece en la Figura 4.9.

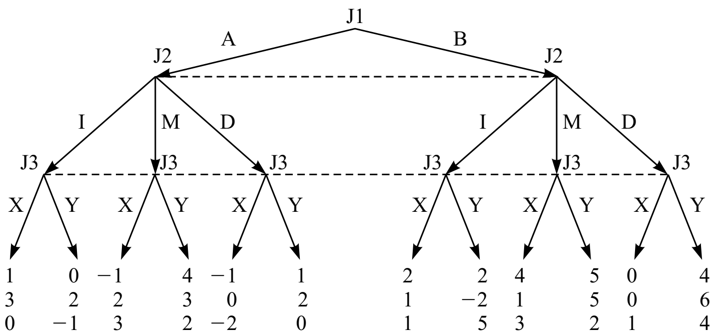


Figura 4.9 Juego 2.5 en forma extensiva.

Otra cuestión de suma importancia se refiere a la solución de estos juegos. ¿Bastará con los conceptos de solución estudiados hasta ahora, sin más que adaptarlos mecánicamente a la nueva situación, o será preciso reelaborar los conceptos de modo que se adecúen mejor a la nueva situación? En concreto, ¿bastará con el concepto de equilibrio de Nash ya estudiado o habrá que inventar un nuevo concepto de equilibrio?

Un modo razonable de proceder al intentar contestar a la pregunta anterior consiste en aplicar el concepto de equilibrio de Nash a la nueva situación y ver si los resultados son intuitivamente satisfactorios. Así lo haremos y encontraremos que los resultados no son completamente satisfactorios, lo que nos obligará a elaborar un concepto de equilibrio más adecuado.

Representación en forma estratégica de un juego dado en forma extensiva

Cada juego en forma extensiva puede representarse mediante un juego en forma normal o estratégica donde imaginamos a los jugadores escogiendo simultáneamente las estrategias que pondrán en práctica. Esa representación en forma estratégica del juego original en forma extensiva consiste simplemente en enumerar, para cada jugador, todas sus estrategias, e indicar, para cada perfil de estrategias, los pagos que corresponderían a cada jugador si el juego se desarrollara de acuerdo con dicho perfil estratégico. Las jugadas de azar se tienen en cuenta calculando los correspondientes pagos esperados. Se dispone así de un esquema de representación (bimatricial en el caso de dos jugadores) idéntico al que utilizamos en los juegos estáticos de los capítulos anteriores.

Este juego en forma normal puede considerarse una especie de resumen estático del juego dinámico original. Es cierto que al representar en forma normal un juego que originalmente estaba en forma extensiva puede perderse algo (y en general se pierde) de la información original del juego, pero aun así dicha representación puede ser útil para el análisis del juego, ya que pone a nuestra disposición todos los instrumentos de análisis del juego desarrollados en los Capítulos 2 y 3, en particular los conceptos de dominación de estrategias, de dominación de Pareto, de estrategias mixtas y de equilibrio de Nash, ya estudiados.

En los ejemplos siguientes, se da la representación en forma estratégica de algunos de los juegos presentados anteriormente, y se calculan sus equilibrios de Nash en estrategias puras.

Ejemplo 4.10

En el juego de disuasión 2, las estrategias de ENTRON son (*Entrar*, A), (*Entrar*, B), (*No entrar*, A) y (*No entrar*, B), y las de INCUMBRON son A y B. Por tanto, su representación en forma normal es:

Juego de disuasión 2

		INCUMBRON	
		A	B
ENTRON	(Entrar, A)	−2, −2	4, 2
	(Entrar, B)	1, 4	−1, −1
	(No entrar, A)	3, 7	3, 7
	(No entrar, B)	3, 7	3, 7

Los EN en estrategias puras son [(*Entrar*, A), B], [(*No entrar*, A), A] y [(*No entrar*, B), A].

Ejemplo 4.11

En el juego del trespiés, el conjunto de estrategias de J1 es $S_1 = \{T - T, T - S, S - T, S - S\}$ y el de J2 es $S_2 = \{T, S\}$. Por tanto, su representación en forma normal es:

Juego del trespiés

		J2	
		T	S
J1	T − T	1, 1	1, 1
	T − S	1, 1	1, 1
	S − T	0, 3	2, 2
	S − S	0, 3	1, 4

Los EN en estrategias puras son (T − T, T) y (T − S, T).

Ejemplo 4.12

Sea el juego de cartas del Ejemplo 1.13 (Capítulo 1), que reproducimos a continuación:

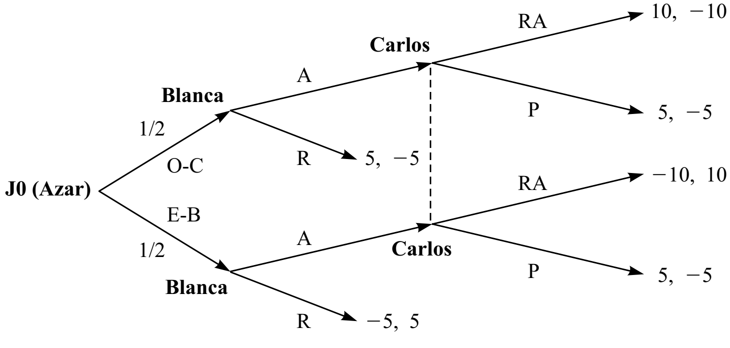


Figura 4.10 Juego de cartas.

El conjunto de estrategias puras de Blanca es $S_1 = \{A - A, A - R, R - A, R - R\}$, donde A − R significa *Apostar* si la carta es oro o copa, y *Retirarse* si es espada o basto. El conjunto de estrategias puras de Carlos es $S_2 = \{RA, P\}$. Por tanto, su representación en forma estratégica (tal como aparece en el Ejemplo 1.19) es

Juego de cartas en forma estratégica

		Carlos	
		RA	P
Blanca	A − A	0, 0	5, −5
	A − R	5/2, −5/2	0, 0
	R − A	−5/2, 5/2	5, −5
	R − R	0, 0	0, 0

No existe ningún EN en estrategias puras. El único EN, expresado como perfil de estrategias mixtas, es ((1/3, 2/3, 0, 0), (2/3, 1/3)). Obsérvese que las estrategias R − A y R − R de Blanca están débilmente dominadas por las otras dos.

Observación 4.1:

El único equilibrio de Nash de este juego se corresponde con el perfil de estrategias de comportamiento [(A, (1/3, 2/3); (2/3, 1/3)] que significa:

Para Blanca: «Si la carta es oro o copa, *Apostar* con seguridad, y si es espada o basto, *Apostar* con probabilidad 1/3 y *Retirarse* con probabilidad 2/3».

Para Carlos: «Recoger la *Apuesta* con probabilidad 2/3 y *Pasar* con probabilidad 1/3».

Merece la pena observar que, si bien todo juego en forma extensiva tiene una representación única en forma estratégica, esta propiedad no es reversible, pues un juego en forma estratégica dado puede tener distintas representaciones en forma extensiva con distinto desarrollo dinámico (aunque siempre se podrá construir una en la que los jugadores escogen sus estrategias simultáneamente).

4.2. EQUILIBRIO DE NASH PERFECTO EN SUBJUEGOS

La estructura temporal de un juego dinámico con información completa obliga a cada jugador a tener en cuenta que sus decisiones en cada momento influyen en las posibilidades y pagos posteriores para él y para los demás, y que al mismo tiempo las decisiones futuras previsibles suyas y de los demás condicionan sus decisiones presentes. Aparece así un elemento de vital importancia, la credibilidad que se puede dar a las decisiones futuras a la hora de determinar las decisiones presentes, es decir, la credibilidad de las posibles amenazas o promesas que se pueden plantear sobre el comportamiento futuro para condicionar el comportamiento presente de los jugadores.

En esta sección vamos a presentar un concepto de equilibrio llamado equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Este concepto representa, para el caso de los juegos dinámicos con información completa, una adecuación y una mejora con respecto al equilibrio de Nash, precisamente porque tiene en cuenta ese elemento de credibilidad antes mencionado.

Los equilibrios de Nash de un juego representado en forma extensiva

Puesto que todo juego en forma extensiva puede representarse en forma estratégica una vez identificadas las estrategias de todos los jugadores, podemos hacer una propuesta de solución de un juego en forma extensiva, que consistiría simplemente en el conjunto de los equilibrios de Nash de su representación en forma estratégica.

Ahora bien, puesto que sabemos que se pierde información al traducir a forma estratégica la forma extensiva de un juego, hemos de tomar con cautela esa propuesta de solución. En efecto, podría suceder que algunos o todos los EN encontrados fuesen razonables desde una perspectiva estática del juego, pero no lo fuesen desde la perspectiva dinámica que tiene en cuenta detalles omitidos en la forma estratégica.

Hagamos un ejercicio consistente en identificar todos los EN de un juego sencillo en forma extensiva, el juego de disuasión 1 por ejemplo, y a continuación analizarlos intuitivamente para averiguar si son todos igualmente razonables.

Ejemplo 4.13 Análisis de los EN del juego de disuasión 1

En este juego, las estrategias de ENTRON son *Entrar* y *No entrar*, y las de INCUMBRON son *Competir duro* y *Competir suave*. Por tanto, su representación en forma estratégica es:

Juego de disuasión 1

		INCUMBRON	
		Competir duro	Competir suave
ENTRON	Entrar	0, 0	5, 5
	No entrar	3, 7	3, 7

Los EN en estrategias puras son $\boldsymbol{s}^*$ = (*Entrar*, *Competir suave*) y $\boldsymbol{s}'^*$ = (*No entrar*, *Competir duro*). Aunque ambos EN parecen razonables a la vista de la tabla de pagos aquí representada, veremos que el primero de ellos es más razonable que el segundo si analizamos ambos en su desarrollo temporal. Supongamos que un juez neutral propone que se ponga en práctica el perfil $\boldsymbol{s}^*$ = (*Entrar*, *Competir suave*). En ese caso sabemos que a cualquiera de los jugadores le interesa atenerse a su estrategia particular en dicho perfil, siempre que el otro haga lo mismo, ya que este perfil es un EN.

La realización práctica del perfil $\boldsymbol{s}^*$ tendría el siguiente desarrollo razonado: ENTRON hace su jugada prevista *Entrar* y a continuación INCUMBRON (que acaba de observar que ENTRON ha entrado) hace su jugada prevista *Competir suave*, que es respuesta óptima a *Entrar* (la que realmente le conviene suponiendo que ENTRON juegue *Entrar*), mientras que *Entrar* también es respuesta óptima de ENTRON a la jugada prevista por INCUMBRON. Todo se conforma al sentido común en este caso y, a la vista de este razonamiento, los jugadores confirman su interés en no desviarse unilateralmente de ese desarrollo previsto.

Sin embargo, si el juez propusiera poner en práctica el perfil $\mathbf{s}'^* =$ (*No entrar*, *Competir duro*), el desarrollo propuesto sería el siguiente: ENTRON hace su jugada prevista *No entrar* e INCUMBRON no se ve obligado a hacer su jugada prevista *Competir duro*, ya que el juego se ha acabado. No todo aquí se aviene tan fácilmente al sentido común, pues el jugador ENTRON podría pensar lo siguiente: «Yo juego *No entrar* porque es mi respuesta óptima a la jugada prevista o anunciada *Competir duro* de INCUMBRON, pero INCUMBRON se permite el lujo de anunciar *Competir duro* porque si yo juego *No entrar* no tendrá que ejecutarla con lo cual *Competir duro* sí es respuesta óptima a *No entrar*. Sin embargo, si yo jugara *Entrar* no le convendría ejecutar la jugada anunciada *Competir duro*, pues obtendría un pago nulo en lugar de un pago 5. En conclusión, la jugada anunciada *Competir duro* sólo le conviene si no tiene que ejecutarla, por lo que ese anuncio no tiene verdadera credibilidad, o lo que es lo mismo, la estrategia *Competir duro* es una amenaza no creíble». Otro modo de describir esa característica intuitivamente insatisfactoria del EN $\mathbf{s}'^* =$ (*No entrar*, *Competir duro*) es decir que hay una cierta incoherencia entre el juicio que merece $\mathbf{s}'^*$ al analizarlo desde la perspectiva del juego global y el juicio que merece al analizarlo desde la perspectiva de un momento particular del juego. En efecto, *Competir duro* es una respuesta óptima de INCUMBRON a *No entrar* desde la perspectiva del juego global, pero no lo es si nos situamos en el nodo de decisión en que a INCUMBRON le toca jugar.

Así pues, en el juego de disuasión 1 hay dos EN en estrategias puras pero sólo uno de ellos, $\mathbf{s}^*$, parece plenamente satisfactorio.

A la vista de lo observado en el ejemplo anterior, vamos a intentar mejorar el concepto de solución imponiendo una mayor coherencia entre el análisis global del juego y los posibles análisis parciales.

Subjuegos

Cuando en un punto del desarrollo de un juego en forma extensiva se da la circunstancia de que lo que ha ocurrido hasta ese momento en el juego (qué jugadas han realizado los distintos jugadores y qué resultados se han producido en las jugadas de azar) es de dominio público, ello hace que los jugadores puedan ver la parte que falta por jugar como un juego en sí mismo. Parece natural pensar que los criterios de actuación que les guíen a partir de ese momento coincidirán con los que tenían antes de iniciar el juego. Esta idea va a permitir definir, en una sección posterior, el nuevo concepto de equilibrio que estamos buscando. Dicho concepto añade, a las características del ya conocido equilibrio de Nash, la exigencia de coherencia entre el modo de comportamiento antes de iniciarse el juego, y el modo de comportamiento cuando el juego ya se ha iniciado.

Es preciso, por tanto, identificar con precisión qué partes del juego pueden razonablemente considerarse como un juego en sí mismas. A dichas partes las llamaremos subjuegos.

Definición 4.2

Dado un juego G con información completa en forma extensiva, y un nodo de decisión $\boldsymbol{x}$ de G, decimos que G' es un **subjuego** de G con inicio en $\boldsymbol{x}$ si G' es una parte de G que cumple lo siguiente:

a) Contiene al nodo $\boldsymbol{x}$ y a todos los nodos que siguen a $\boldsymbol{x}$, y sólo a ellos.
b) El nodo $\boldsymbol{x}$ es un conjunto de información unitario.
c) Si el nodo $\boldsymbol{y}$ pertenece a G', también pertenecen a G' todos los nodos del conjunto de información al que pertenece $\boldsymbol{y}$, es decir, G' no rompe ningún conjunto de información.

Observación 4.2:

1. Es evidente que el propio G es siempre un subjuego de G. Llamamos **subjuegos propios** de G a aquellos subjuegos que no coinciden con G (es decir, que no comienzan en el nodo inicial de G).
2. Si G es de información perfecta, cualquier parte que comience en un nodo de decisión y contenga todos los nodos que le siguen es un subjuego (debido a que todos los conjuntos de información son unitarios).
3. Un subjuego puede empezar en un nodo de azar, porque consideramos que dicho nodo es un conjunto de información unitario.
4. También se consideran subjuegos aquellos en los que ya sólo va a intervenir uno de los jugadores.
5. Los juegos estáticos representados en forma extensiva no tienen ningún subjuego propio, ya que el único conjunto de información unitario que tienen es el nodo inicial.

Ejemplo 4.14

a) En el juego de disuasión 1, el único subjuego propio corresponde a la parte del árbol que comienza en el nodo de decisión de INCUMBRON que hay tras la jugada *Entrar* de ENTRON.

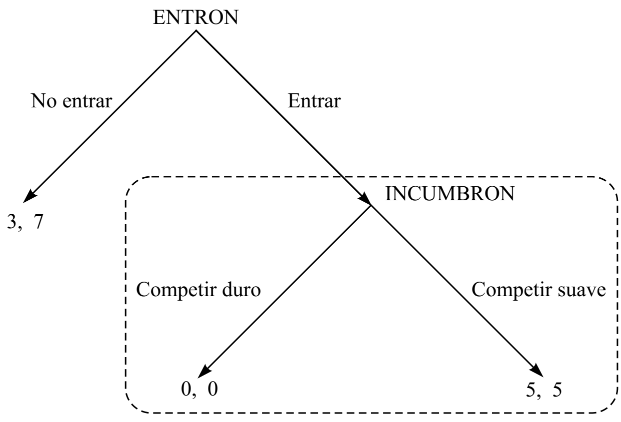


Figura 4.11 Subjuegos propios del juego de disuasión 1.

b) En el juego de disuasión 2, el único subjuego propio corresponde igualmente a la parte del árbol que comienza en el nodo de decisión de INCUMBRON. La Definición 4.2 excluye que haya subjuegos que comiencen en el conjunto de información (con dos nodos) de ENTRON o en alguno de sus dos nodos.

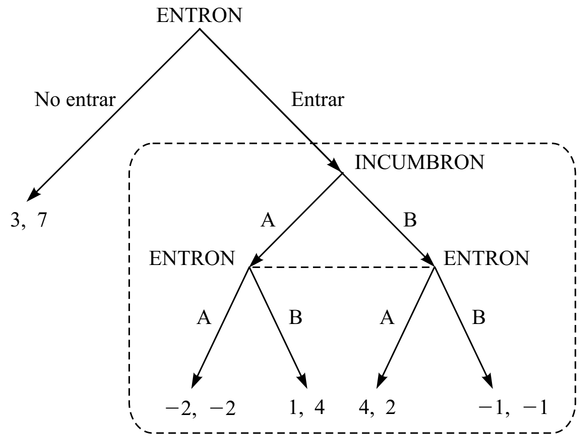


Figura 4.12 Subjuegos propios del juego de disuasión 2.

c) En el juego del trespiés, los dos subjuegos propios corresponden a la parte del árbol que comienza en los dos nodos de decisión distintos del inicial. Sin embargo, el dilema del prisionero, como todos los juegos estáticos, carece de subjuegos propios.

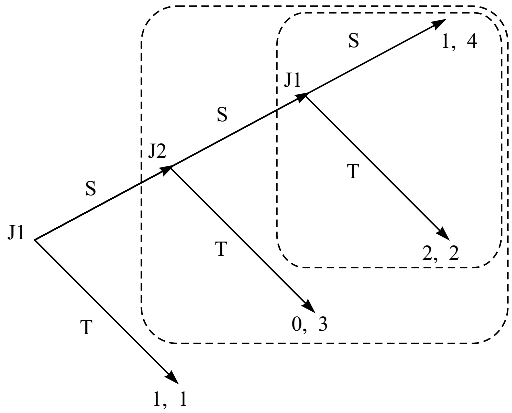


Figura 4.13 Subjuegos propios del juego del trespiés.

Por otra parte, el dilema del prisionero repetido dos veces tiene 4 subjuegos propios que empiezan en cada uno de los nodos de decisión de J1 distintos del nodo inicial, tal como se ve en la Figura 4.14.

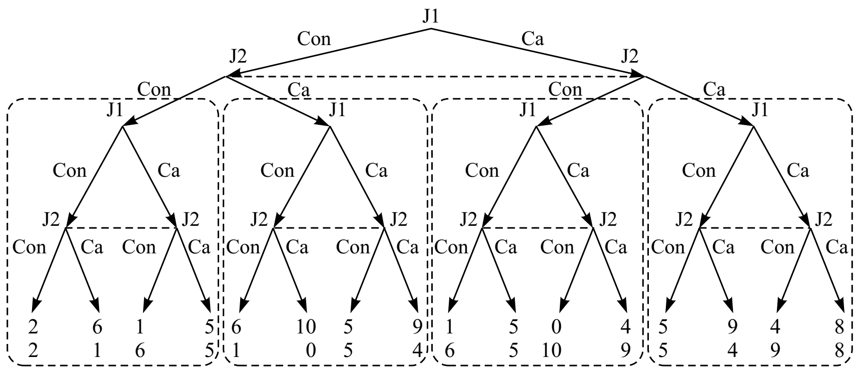


Figura 4.14 Subjuegos propios del dilema del prisionero, repetido 2 veces.

Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Resultado perfecto en subjuegos

Estamos ya en condiciones de definir el nuevo concepto de equilibrio, que fue propuesto por Reinhard Selten en 1965. Este autor recibió el Premio Nobel de Economía en 1994 por sus contribuciones a la teoría de juegos, especialmente las referidas a éste y otros conceptos de equilibrio (como el equilibrio perfecto de mano temblorosa definido en el Capítulo 3).

Definición 4.3

Sea G un juego en forma extensiva

a) Sea $\boldsymbol{s}$ un perfil de estrategias de G que es un EN. Decimos que $\boldsymbol{s}$ es un **Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos** (ENPS) de G si la restricción de $\boldsymbol{s}$ a cualquier subjuego de G es un EN de dicho subjuego.

b) Sea $\boldsymbol{r}$ un resultado o desarrollo posible de G. Decimos que $\boldsymbol{r}$ es un **Resultado Perfecto en Subjuegos** (RPS) de G si $\boldsymbol{r}$ puede obtenerse como realización de un perfil $\boldsymbol{s}$ que es un ENPS.

Recuérdese que algunos subjuegos representan situaciones en las que sólo queda por jugar un jugador. Consideraremos que los EN de tales subjuegos son las estrategias óptimas de dicho jugador.

Los siguientes ejemplos nos permitirán ilustrar ambos conceptos. Por razones de sencillez nos ocuparemos principalmente de los equilibrios y resultados en estrategias puras.

Ejemplo 4.15

a) En el juego de disuasión 1, el único subjuego propio es aquel que comienza en el nodo de decisión de INCUMBRON, que se ha representado en la Figura 4.11. En dicho subjuego, con un único jugador, el único EN consiste en que INCUMBRON juegue *Competir suave*, y por tanto serán ENPS del juego global aquellos, y sólo aquellos, perfiles que sean EN del juego global y cuya restricción al subjuego propio sea precisamente *Competir suave*. Hay dos EN en estrategias puras del juego global, que son s^* = (*Entrar*, *Competir suave*) y s'^* = (*No entrar*, *Competir duro*). De ellos, sólo s^* produce la acción *Competir suave* al restringirlo al subjuego, y en consecuencia, el único ENPS en estrategias puras es s^*.

b) En el juego de disuasión 2, el único subjuego propio es también aquel que comienza en el nodo de decisión de INCUMBRON, representado en la Figura 4.12. Dicho subjuego, cuya representación en forma estratégica es

		INCUMBRON	
		A	B
ENTRON	A	−2, −2	4, 2
	B	1, 4	−1, −1

tiene dos EN, que son s^* = (A, B) y s'^* = (B, A). Por otra parte, los EN en estrategias puras del juego global son [(*Entrar*, A), B], [(*No entrar*, A), A] y [(*No entrar*, B), A], tal como los hemos calculado en el Ejemplo 4.10. Veamos qué perfiles EN del juego global inducen un EN del subjuego al ser restringidos a dicho subjuego.

El perfil [(*Entrar*, A), B] induce en el subjuego el perfil (A, B), que sí es EN.
El perfil [(*No entrar*, A), A] induce en el subjuego el perfil (A, A), que no es EN.
El perfil [(*No entrar*, B), A] induce en el subjuego el perfil (B, A), que sí es EN.

En conclusión, los perfiles [(*Entrar*, A), B] y [(*No entrar*, B), A] son los ENPS buscados.

Ejemplo 4.16

En el juego del trespiés, hay dos subjuegos propios, tal como se ha representado en la Figura 4.13. El segundo, que llamaremos subjuego 2, es a su vez subjuego del primero (subjuego 1). El subjuego 1 comienza en el primer nodo de decisión de J2 y el subjuego 2 comienza en el segundo nodo de decisión de J1. El subjuego 1, cuya representación en forma normal es

		J2	
		S	T
J1	S	1, 4	0, 3
	T	2, 2	0, 3

tiene un único EN, que es s^* = (T, T), mientras que el único EN del subjuego 2 es obviamente T. Por otra parte, los EN en estrategias puras del juego global, que se han calculado en el Ejemplo 4.11 son (T − T, T) y (T − S, T).

Veamos qué perfiles EN del juego global inducen un EN en cada uno de los subjuegos al ser restringidos a dichos subjuegos. El perfil (T − T, T) induce en el subjuego 1 el perfil (T, T), que sí es EN y en el subjuego 2 el perfil T que también es EN. Por otra parte, el perfil (T − S, T) induce en el subjuego 1 el perfil (S, T), que no es EN y en el subjuego 2 el perfil S que tampoco lo es.

En conclusión, el perfil (T-T, T) es el ENPS buscado.

Observación sobre el significado de las estrategias (continuación)

Estamos ahora en condiciones de completar la discusión sobre el hecho de que fuese necesario, al definir las estrategias de un jugador en un juego en forma extensiva, especificar una acción factible para todos y cada uno de los conjuntos de información de tal jugador, incluso en aquellos que no van a ser alcanzados en el desarrollo del juego. Decíamos que era necesario para poder hacer un análisis serio del juego, pero ahora podemos concretar que las jugadas a realizar en conjuntos de información excluidos del desarrollo del juego no son necesarias si el análisis se limita al cálculo de los EN, pero sí lo son si profundizamos algo más, por ejemplo calculando los ENPS.

En efecto, obsérvese el juego del trespiés, del que repetimos su forma estratégica:

Juego del trespiés. Forma estratégica

		J2	
		T	S
J1	T − T	1, 1	1, 1
	T − S	1, 1	1, 1
	S − T	0, 3	2, 2
	S − S	0, 3	1, 4

Desde el punto de vista de la forma estratégica, las estrategias T − T y T − S de J1 son equivalentes (a cualquier jugador le es indiferente que J1 juegue una u otra), por eso ambas intervienen del mismo modo en los EN del juego, que son (T − T, T) y (T − S, T), y por eso podría eliminarse la redundancia, refiriéndonos a ellas como T, cuyo significado sería «J1 juega T y se acaba el juego». En ese caso, la forma estratégica del juego con tres estrategias para J1, que llamaríamos forma estratégica reducida, sería:

Juego del trespiés. Forma estratégica reducida

		J2	
		T	S
J1	T	1, 1	1, 1
	S − T	0, 3	2, 2
	S − S	0, 3	1, 4

Es evidente que este juego reducido tiene un único EN, que es (T, T). Este análisis, que no distingue entre T − S y T − T, es correcto si sólo estamos interesados en los EN del juego. Sin embargo, en el Ejemplo 4.16 se ha identificado el perfil (T − T, T) como el único ENPS del juego, lo que demuestra que la distinción entre T − S y T − T es necesaria si estamos interesados en los ENPS del juego.

Ejemplo 4.17

En el juego del reparto con $n = 4$, hay cinco subjuegos propios, en todos los cuales juega solamente J2, uno tras cada una de las posibles jugadas de J1. Se muestran en la Figura 4.15.

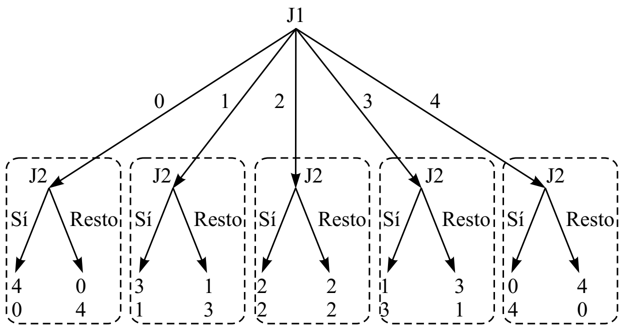


Figura 4.15 Subjuegos propios del juego del reparto con 4 monedas.

Los EN de dichos subjuegos son, de izquierda a derecha:

Del primer subjuego (tras la jugada 0 de J1): *Resto*.
Del segundo subjuego (tras la jugada 1 de J1): *Resto*.
Del tercer subjuego (tras la jugada 2 de J1): *Resto* y *Sí*.
Del cuarto subjuego (tras la jugada 3 de J1): *Sí*.
Del quinto subjuego (tras la jugada 4 de J1): *Sí*.

Puesto que no hemos representado en forma estratégica este juego, debido a sus dimensiones (J1 y J2 disponen, respectivamente, de 5 y de 32 estrategias puras), no vamos a intentar calcular todos sus EN. Sin embargo, sí podemos identificar fácilmente todos los EN del juego global cuya restricción a cada uno de los subjuegos propios sea un EN de dicho subjuego. En efecto, todos ellos han de ser perfiles $\boldsymbol{s}^* = (s_1^*, s_2^*)$ cuya segunda componente s_2^* sea o bien *Resto-Resto-Resto-Sí-Sí* o bien *Resto-Resto-Sí-Sí-Sí*. Además, la primera componente s_1^* es necesariamente una respuesta óptima de J1 a s_2^*, y en consecuencia es la estrategia 2 de J1.

Así pues, (2, *Resto-Resto-Resto-Sí-Sí*) y (2, *Resto-Resto-Sí-Sí-Sí*) son los únicos ENPS en estrategias puras del juego. Obsérvese que si se pone en práctica cualquiera de estos dos equilibrios, el desarrollo resultante es que J1 juega 2 (ofrece 2 monedas) y J2 dice *Sí* o *Resto*, y el resultado en términos de pagos es que ambos reciben 2 monedas.

Ejemplo 4.18

El juego del ultimátum con $n = 4$ tiene la misma estructura que el del reparto con $n = 4$. Sus subjuegos se muestran en la Figura 4.16.

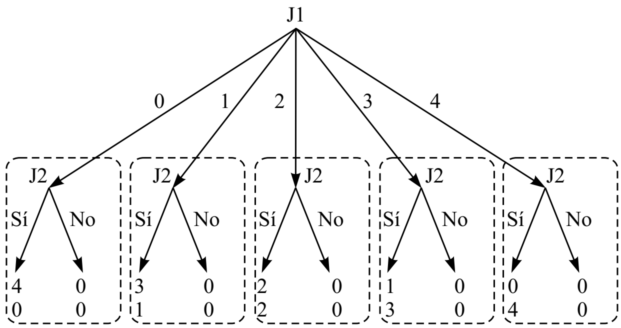


Figura 4.16 Subjuegos propios del juego del ultimátum con 4 monedas.

Los EN de dichos subjuegos son, de izquierda a derecha:

Del primer subjuego (tras la jugada 0 de J1): *Sí* y *No*.

Del segundo subjuego (tras la jugada 1 de J1): *Sí*.

Del tercer subjuego (tras la jugada 2 de J1): *Sí*.

Del cuarto subjuego (tras la jugada 3 de J1): *Sí*.

Del quinto subjuego (tras la jugada 4 de J1): *Sí*.

Todos los EN del juego global cuya restricción a cada uno de los subjuegos propios sea un EN de dicho subjuego han de ser perfiles $\boldsymbol{s}^* = (s_1^*, s_2^*)$ cuya segunda componente s_2^* sea o bien *Sí-Sí-Sí-Sí-Sí* o bien *No-Sí-Sí-Sí-Sí*. Además, la primera componente s_1^* es necesariamente una respuesta óptima de J1 a s_2^*, y en consecuencia es o bien la estrategia 0 de J1 o bien la estrategia 1 de J1.

Así pues, (0, *Sí-Sí-Sí-Sí-Sí*) y (1, *No-Sí-Sí-Sí-Sí*) son los únicos ENPS en estrategias puras del juego. Obsérvese que si se ponen en práctica estos dos equilibrios, el desarrollo resultante del primero es que J1 juega 0 (ofrece 0 monedas) y J2 dice *Sí* (de modo que J1 recibe 4 monedas y J2 recibe 0), y el desarrollo resultante del segundo es que J1 juega 1 (ofrece 1 moneda) y J2 dice *Sí* (de modo que J1 recibe 3 monedas y J2 recibe 1).

¿Y no sería también en el ejemplo anterior un ENPS el perfil (2, *No-No- Sí-Sí-Sí*) que podría ser consecuencia del siguiente anuncio de J2, previo al comienzo del juego: «Sólo aceptaré diciendo *Sí* la oferta de J1, si dicha oferta es 2 o más»? La respuesta es que no, ya que ese anuncio-amenaza no resulta creíble, y no es creíble porque J2 se está comprometiendo a decir *No* aun cuando J1 le ofreciera 1, lo cual le perjudicaría (con *No* obtendría un pago de 0 mientras que con *Sí* obtendría 1).

Comentario acerca del significado de ENPS

El concepto de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos es un nuevo concepto de solución de un juego que constituye un refinamiento del concepto previo de equilibrio de Nash. Pretende ser una solución mejor porque, basándose en el criterio de la **credibilidad**, descarta los equilibrios de Nash basados en amenazas no creíbles o promesas no sostenibles (es decir, proposiciones que no serán cumplidas) dado el desarrollo temporal del juego. Al exigir respuestas óptimas en cada punto que sea inicio de un subjuego, el concepto de ENPS es un paso en la puesta en práctica del **principio de racionalidad secuencial**, según el cual la estrategia (en el equilibrio) de cualquier jugador ha de ser una respuesta óptima, en cada punto del juego (sea o no sea el inicio de un subjuego, y esté o no esté en la trayectoria de dicho equilibrio), a las estrategias del resto de jugadores.

¿Cuáles son los ENPS, si los tiene, de un juego estático representado en forma extensiva? La respuesta no puede ser más fácil y, al mismo tiempo, menos interesante. Puesto que tales juegos no tienen ningún subjuego propio, todos sus equilibrios de Nash cumplen (de manera vacía, ya que el único subjuego es el propio juego global) la definición de ENPS. Así pues, y en virtud del Teorema de existencia 3.4 (que afirma que todo juego estático finito tiene algún EN), podemos asegurar que todo juego estático finito tiene algún ENPS. ¿Ocurrirá también para los juegos no estáticos? Eso es lo que establece, para los juegos dinámicos finitos, el siguiente teorema, que enunciamos sin demostrar (en los apartados siguientes se demuestra un resultado más general).

Teorema 4.1 Teorema de existencia de ENPS

Si G es un Juego dinámico finito (número finito de jugadores, cada uno de ellos con un conjunto finito de estrategias), existe un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos de G.

Observación 4.3:

Puede ocurrir que no exista ningún ENPS en estrategias puras, lo que implicaría que alguna (o todas) las estrategias que constituyen ese ENPS que ha de existir, sean estrategias mixtas propias. Así ocurre en el juego de cartas analizado en el Ejemplo 4.12, cuyo único EN (y por tanto único ENPS), es el perfil en estrategias mixtas ((1/3, 2/3, 0, 0), (2/3, 1/3)).

4.3. JUEGOS DINÁMICOS CON INFORMACIÓN COMPLETA Y PERFECTA. INDUCCIÓN HACIA ATRÁS

En esta sección se introduce el algoritmo de inducción hacia atrás, se ilustra mediante algunos ejemplos y se relaciona con el concepto de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

Inducción hacia atrás

En los juegos dinámicos con información completa y perfecta, existe un algoritmo llamado **inducción hacia atrás** (aunque también recibe los nombres de inducción retroactiva, algoritmo de Zermelo o algoritmo de Kuhn) que permite identificar con claridad, y hallar de manera sistemática, los ENPS del juego. Este algoritmo refleja un modo de razonar conocido desde antiguo, y que en situaciones secuenciales sencillas es bastante concluyente y satisfactorio.

Vamos a describir cómo funciona este algoritmo en el caso más simple, que es aquel en que cada uno de los subjuegos que vamos a encontrarnos tiene una acción óptima única. Consiste en razonar por etapas, de adelante hacia atrás (o desde el futuro al presente) de acuerdo con la Definición 4.4.

Definición 4.4

Dado un juego G finito en forma extensiva con información completa y perfecta, llamamos **algoritmo de inducción hacia atrás** al que procede así:

1. Se identifican todos los subjuegos que se producen en último lugar (es decir, aquellos que comienzan en los nodos de decisión que sólo preceden a nodos terminales. Estos subjuegos tienen un único jugador, y su EN es por definición la acción óptima de dicho jugador). A continuación se elimina cada uno de esos subjuegos, salvo su nodo de comienzo, y se considera que dicho nodo pasa a ser nodo terminal del juego global, y se le atribuyen los pagos que se habrían hecho efectivos de haberse jugado la acción óptima correspondiente a ese nodo. De esta manera se han podado las últimas ramas del árbol del juego global inicial, y nos encontramos con un árbol más corto.

2. Se repite con el árbol reducido lo dicho en la etapa anterior, y se continúa con este proceso hasta que se llega al nodo inicial del juego de partida.

Es evidente que, acabado el proceso, habremos identificado una acción óptima en cada nodo de decisión, y dichas acciones óptimas determinan un perfil de estrategias óptimas para cada jugador y, en consecuencia, un desarrollo del juego que podríamos calificar también como óptimo, y que discurre desde el nodo inicial hasta un nodo final a través de acciones óptimas. Pues bien, es evidente que se identifica así un perfil estratégico (cuyas estrategias consisten en especificar para cada nodo de decisión la correspondiente acción óptima) que es ENPS del juego, y que el desarrollo del juego que este perfil determina es resultado perfecto en subjuegos.

Observación 4.4:

1. Hay dos situaciones que requieren una aclaración adicional.

- La primera se refiere a la posibilidad de que en algún nodo de decisión haya varias acciones óptimas. En ese caso, el proceso sólo cambia en el hecho de que habría que considerar todas las posibilidades. Es decir, habría que formar tantos árboles reducidos para la etapa siguiente del análisis (anterior en el tiempo) como combinaciones hubiera de acciones óptimas en la etapa actual. Al final, obtendríamos varios resultados perfectos en subjuegos posibles y varios equilibrios de Nash perfectos en subjuegos, uno por cada proceso de poda diferente.

- La segunda se refiere a la posibilidad de que en algún nodo de decisión haya un número infinito de acciones, pero manteniendo finita la longitud de cualquier desarrollo posible del juego. En ese caso, el proceso sigue siendo válido siempre que, en cada nodo de decisión, exista alguna acción factible óptima.

2. Si el juego de partida no es de información perfecta, es decir, si hay en la forma extensiva algún conjunto de información no unitario, el algoritmo de inducción hacia atrás puede no ser aplicable, y en general no lo es. En efecto, al intentar llevar a cabo el proceso nos encontraremos necesariamente con un nodo de decisión que pertenece a un conjunto de información no unitario. En ese momento puede ocurrir que sea imposible determinar cuáles son las acciones óptimas del jugador al que le toca jugar, ya que a distintos nodos dentro de ese conjunto de información pueden corresponder distintas acciones óptimas, y puede ocurrir que el jugador no sepa cuál elegir ya que no sabe en qué nodo está.

3. Algunos juegos de mesa famosos, como el ajedrez y las damas, son juegos finitos de información perfecta. Eso significa que el algoritmo de inducción hacia atrás les es aplicable y por tanto, pueden calcularse en principio todos los resultados perfectos en subjuegos. Decimos «en principio» porque en la práctica el cálculo es imposible, tanto con los medios de cómputo actuales (Pentium IV y siguientes, Deep Blue, Cyber, Deep Fritz, Deep Junior, etc.) como con los de un futuro previsible. Que la inducción hacia atrás sea aplicable es muy importante en cuanto a la búsqueda de buenas estrategias de juego, pues de ello se deduce (teniendo en cuenta también que ambos son juegos de suma cero), que necesariamente ha de ser cierta una, y sólo una, de las siguientes afirmaciones:

a) Existe una estrategia de juego ganadora para las piezas blancas. (Es decir, el jugador con piezas blancas puede garantizarse la victoria, pues existe para él un plan completo de acción tal que, si sigue ese plan, ganará con seguridad.)
b) Existe una estrategia de juego ganadora para las piezas negras.
c) Ambos jugadores tienen una estrategia que les garantiza tablas (empate).

Nadie sabe cuál de las tres afirmaciones anteriores es cierta. Si pudiera realizarse efectivamente, de manera práctica, la inducción hacia atrás para ambos juegos, ambos dejarían de ser juegos interesantes.

El siguiente teorema, cuya primera parte constituye el teorema de Zermelo-Kuhn, muestra la relación entre el algoritmo de inducción hacia atrás y el concepto de equilibrio ENPS.

Teorema 4.2

Cada juego finito con información completa y perfecta G tiene un Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos (ENPS) en estrategias puras que se obtiene por el método de inducción hacia atrás. Además, si ningún jugador tiene más de una acción óptima en cada nodo de decisión, tal ENPS es único.

Demostración:

Veamos, en primer lugar, que en juegos finitos con información completa y perfecta el procedimiento de inducción hacia atrás está bien definido. El jugador que mueve en cada nodo de decisión tiene un número finito de elecciones posibles, por lo que en cada etapa del procedimiento tiene alguna acción óptima. Si un jugador es indiferente entre varias acciones, podemos elegir cualquiera de sus acciones óptimas.

Sea $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, ..., s_n)$ un perfil de estrategias puras obtenido por este procedimiento. Veamos, por reducción al absurdo, que se trata de un equilibrio de Nash del juego G. En efecto, si no fuera equilibrio de Nash, existiría un jugador i para el cual existe una estrategia $\bar{s}_i$ que verifica:

$$u_i(\bar{s}_i, \boldsymbol{s}_{-i}) > u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \tag{4.1}$$

en donde $\boldsymbol{s}_{-i} = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$.

Veamos, por inducción, que esto nos lleva a contradicción.

Diremos que el nodo de decisión x del juego G tiene una distancia m si, entre las diferentes trayectorias que le siguen hasta los nodos terminales, el máximo número de nodos de decisión que hay entre x y un nodo terminal es m. Sea M la distancia máxima posible de los nodos de decisión del juego. Como G es un juego finito, se verifica que M es un número natural finito.

Sea $\bar{s}_i(m)$ la siguiente estrategia del jugador i:

$\bar{s}_i(m)$ coincide con s_i en todos los nodos con distancia 0, 1, ..., m.

$\bar{s}_i(m)$ coincide con $\bar{s}_i$ en todos los nodos con distancia mayor que m.

Por construcción de $\boldsymbol{s}$ a través del procedimiento de inducción hacia atrás, se verifica que $u_i(\bar{s}_i(0), \boldsymbol{s}_{-i}) \geqslant u_i(\bar{s}_i, \boldsymbol{s}_{-i})$, ya que el jugador i seguro que no empeora (y puede mejorar) con respecto a su estrategia $\bar{s}_i$ si en sus nodos de decisión finales (por tanto, con distancia cero) elige su acción óptima, manteniendo la estrategia $\bar{s}_i$ en los demás nodos de decisión.

Supongamos ahora (hipótesis de inducción) que

$$u_i(\bar{s}_i(m-1), \boldsymbol{s}_{-i}) \geqslant u_i(\bar{s}_i, \boldsymbol{s}_{-i})$$

Veamos que ello implica que

$$u_i(\bar{s}_i(m), \boldsymbol{s}_{-i}) \geqslant u_i(\bar{s}_i, \boldsymbol{s}_{-i})$$

En efecto: la única diferencia entre las estrategias $\bar{s}_i(m)$ y $\bar{s}_i(m-1)$ del jugador i está en las elecciones del jugador i en los nodos con distancia m. En ambas estrategias, el jugador i juega de acuerdo con la estrategia s_i en todos los nodos de decisión que siguen a los nodos con distancia m y de acuerdo con la estrategia $\bar{s}_i$ en todos los anteriores a ellos. Pero, puesto que todos los jugadores están jugando en concordancia con el perfil de estrategias $\boldsymbol{s}$ después de los nodos con distancia m, los movimientos que el procedimiento de inducción hacia atrás determina para los nodos con distancia m (aquellos que forman parte de s_i) deben ser elecciones óptimas para el jugador i en dichos nodos. Por tanto, tiene que ser:

$$u_i(\bar{s}_i(m), \boldsymbol{s}_{-i}) \geqslant u_i(\bar{s}_i(m-1), \boldsymbol{s}_{-i})$$

lo que implica que

$$u_i(\bar{s}_i(m), \boldsymbol{s}_{-i}) \geqslant u_i(\bar{s}_i, \boldsymbol{s}_{-i})$$

De acuerdo con el método de inducción finita se llega a que

$$u_i(\bar{s}_i(M), \boldsymbol{s}_{-i}) \geqslant u_i(\bar{s}_i, \boldsymbol{s}_{-i})$$

pero $\bar{s}_i(M) = s_i$ y se llega a una contradicción con la expresión (4.1).

Por tanto, $\boldsymbol{s}$ es un equilibrio de Nash del juego G.

Por otra parte, de la misma manera que el perfil de estrategias $\boldsymbol{s}$, obtenido por el método de inducción hacia atrás, constituye un equilibrio de Nash del juego G, la restricción de $\boldsymbol{s}$ a cualquier subjuego de G es asimismo un equilibrio de Nash en el subjuego (se puede utilizar para el subjuego el mismo razonamiento que se ha utilizado para el juego), lo que garantiza que $\boldsymbol{s}$ es un ENPS del juego G.

Por último, si ningún jugador tiene más de una acción óptima en cada etapa del proceso y, por tanto, el método de inducción hacia atrás identifica un único perfil de estrategias para el juego, tal ENPS es único.

Ejemplos de aplicación de la inducción hacia atrás

Tal como la hemos definido, la inducción hacia atrás no es aplicable ni al juego de disuasión 2, del Ejemplo 4.1, ni al dilema del prisionero repetido, del Ejemplo 4.4, debido a que ambos juegos son de información imperfecta. Sí lo es al resto de los juegos definidos en este capítulo, por ser todos de información perfecta. En las figuras de los ejemplos que siguen, se señalarán las acciones óptimas engrosando las ramas de esas acciones, y se indicarán los pagos resultantes de cada poda colocando una caja con los pagos junto al correspondiente nodo.

Ejemplo 4.19

a) En el juego de disuasión 1, del Ejemplo 4.1, el único nodo de decisión que sólo precede a nodos terminales es el de INCUMBRON. Su acción óptima es *Competir suave*, y la poda correspondiente conduce al juego reducido que aparece en la parte (a) de la Figura 4.17 sobre la línea de puntos. Ahora, el único nodo de decisión que queda es el inicial, y su acción óptima es *Entrar*, con lo cual el nodo inicial pasa a ser nodo terminal, con pagos (5, 5), y acaba el proceso. En la parte (b) se observa el proceso completo, que permite apreciar que el único resultado perfecto en subjuegos es *Entrar* → *Competir suave*, que el vector de pagos resultante es (5, 5), y que el único ENPS es (*Entrar*, *Competir suave*).

b) Sea el juego del trespiés del Ejemplo 4.2, cuyo árbol hemos colocado aquí en forma vertical por conveniencia del dibujo. Procediendo de manera análoga a la descrita en el apartado anterior, tendríamos el resultado de la primera poda en (a), el de la segunda en (b) y el de la tercera en (c).

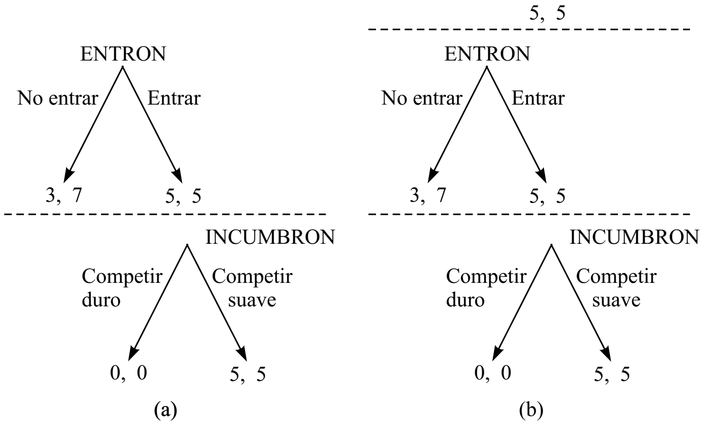


Figura 4.17 Inducción hacia atrás en el juego de disuasión 1.

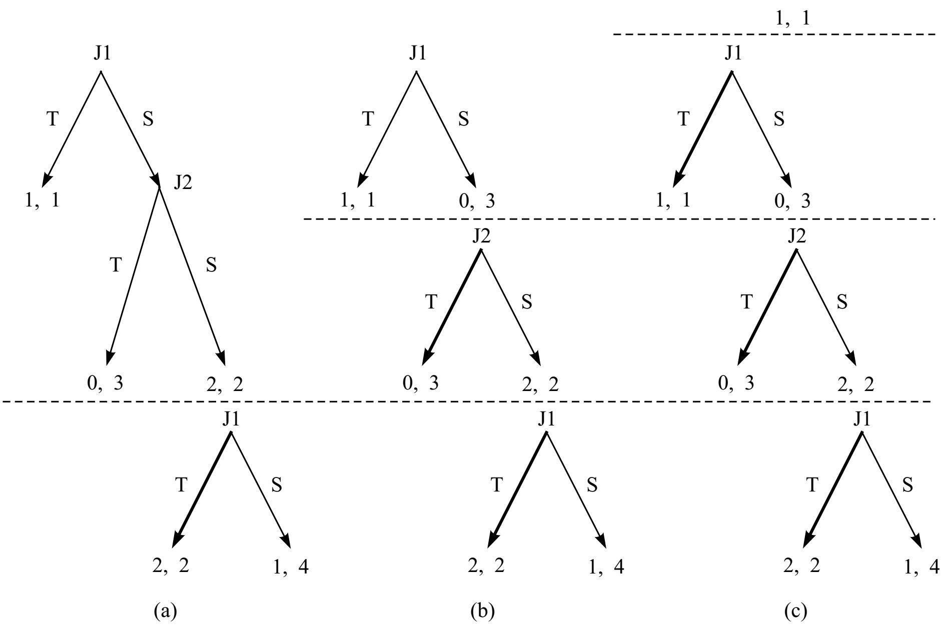


Figura 4.18 Inducción hacia atrás en el juego del trespiés.

Por tanto, el único resultado perfecto en subjuegos es T, el vector de pagos resultante es (1, 1), y el único ENPS es (T − T, T)

Ejemplo 4.20

En el juego del ciempiés del Ejemplo 4.3, análogo al del trespiés, el proceso de inducción hacia atrás conduce, expresado de modo resumido (colocando en una caja sobre cada nodo que se convierte en terminal, los pagos finales en caso de que ahí terminara el juego), a la siguiente situación:

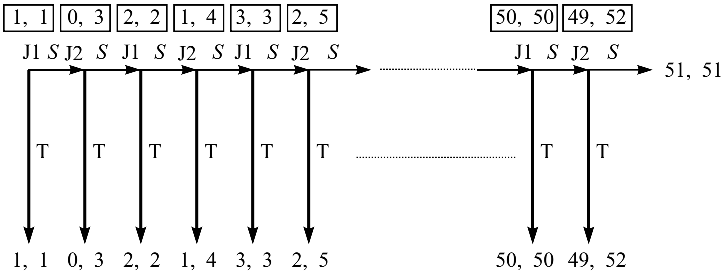


Figura 4.19 Inducción hacia atrás en el juego del ciempiés.

donde el único resultado perfecto en subjuegos es T, el vector de pagos resultante es (1, 1), y el único ENPS es el perfil (*Jugar T en cualquier nodo*, *Jugar T en cualquier nodo*).

Ejemplo 4.21

En el juego del reparto, con $n = 4$ monedas, el proceso de inducción hacia atrás conduce, expresado de modo resumido, a las dos situaciones posibles siguientes, según sea la acción óptima elegida por el jugador 2 tras la acción 2 del jugador 1:

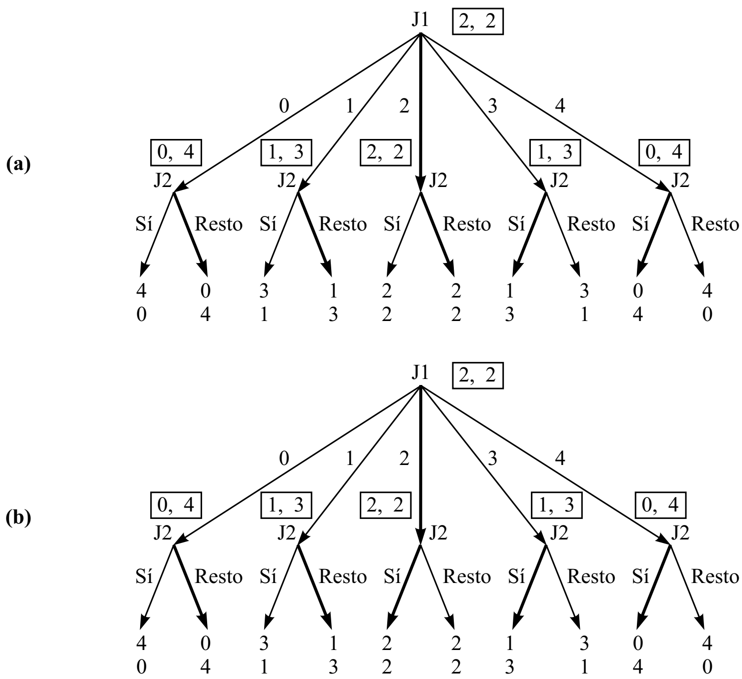


Figura 4.20 Inducción hacia atrás en el juego del reparto, con $n = 4$ monedas.

En la situación (a) el resultado perfecto en subjuegos es $2 \rightarrow$ *Resto*, el vector de pagos resultante es (2, 2), y el ENPS es el perfil (2, *Resto-Resto-Resto-Sí-Sí*), mientras que en la situación (b) el resultado perfecto en subjuegos es $2 \rightarrow$ *Sí*, el vector de pagos resultante es (2, 2), y el ENPS es el perfil (2, *Resto-Resto-Sí-Sí-Sí*). En conclusión, los dos ENPS son el perfil (2, *Resto-Resto-Resto-Sí-Sí*) y el perfil (2, *Resto-Resto-Sí-Sí-Sí*).

Ejemplo 4.22

En el juego del ultimátum, con $n = 4$ monedas, el proceso de inducción hacia atrás conduce, expresado de modo resumido, a las dos situaciones posibles siguientes, según sea la acción óptima elegida por el jugador 2 tras la acción 0 del jugador 1:

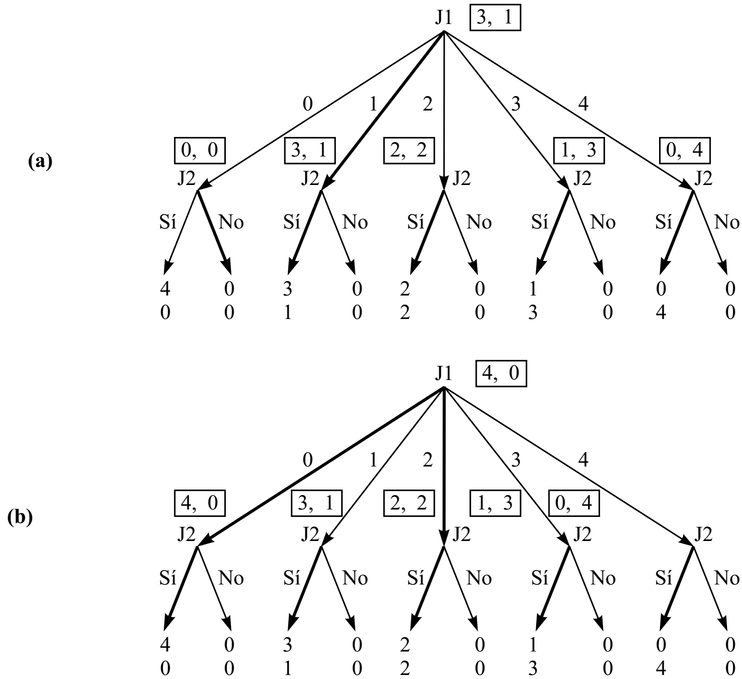


Figura 4.21 Inducción hacia atrás en el juego del ultimátum, con $n = 4$ monedas.

En la situación (a) el resultado perfecto en subjuegos es $1 \rightarrow$ *Sí*, el vector de pagos resultante es (3, 1), y el ENPS es el perfil (1, *No- Sí-Sí-Sí-Sí*), mientras que en la situación (b) el resultado perfecto en subjuegos es $0 \rightarrow$ *Sí*, el vector de pagos resultante es (4, 0), y el ENPS es el perfil (0, *Sí-Sí-Sí-Sí-Sí*). En conclusión, los dos ENPS son el perfil (1, *No-Sí-Sí-Sí-Sí*) y el perfil (0, *Sí-Sí-Sí-Sí-Sí*).

Ejemplo 4.23

En el juego del reparto en versión continua, del Ejemplo 4.5, el proceso de inducción hacia atrás es el siguiente:

Comenzamos en los nodos de decisión de J2. Sea un nodo cualquiera, tras haber escrito J1 el número r. La acción óptima de J2 será *Sí*, si $r > 50$, será *Resto* si $r < 50$ y serán ambas si $r = 50$. Podando ahora el árbol, tendremos un árbol reducido en el que el nodo que sigue a cualquier jugada de J1 es un nodo terminal, y los pagos correspondientes a ese nodo son $(100 - r, r)$ *si* $r > 50$, $(r, 100 - r)$ si $r < 50$, y (50, 50) si $r = 50$. En consecuencia, la jugada óptima única de J1 es $r = 50$. Así pues, los únicos resultados perfectos en subjuegos son $50 \rightarrow$ *Sí* y $50 \rightarrow$ *Resto*. El vector de pagos resultante es (50, 50) en ambos casos, y los dos únicos ENPS son (50, «*Sí* si $r \geqslant 50$, y *Resto* en caso contrario») y (50, «*Sí* si $r > 50$, y *Resto* en caso contrario»). En la Figura 4.22 intenta representarse gráficamente la situación.

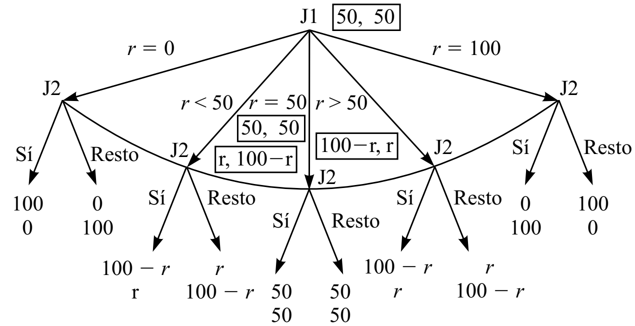


Figura 4.22 Inducción hacia atrás en el juego del reparto, versión continua.

4.4. JUEGOS DINÁMICOS CON INFORMACIÓN COMPLETA PERO IMPERFECTA. INDUCCIÓN HACIA ATRÁS GENERALIZADA

Aunque el algoritmo de inducción hacia atrás sólo es aplicable a los juegos de información perfecta, ello no quiere decir que la idea que hay tras dicho algoritmo no sea aplicable a otros tipos de juegos. Presentamos a continuación una generalización del algoritmo de inducción hacia atrás para juegos dinámicos con información imperfecta, es decir, un procedimiento para determinar los ENPS cuando existen subjuegos propios con conjuntos de información no unitarios (con varios nodos de decisión) para al menos un jugador.

Inducción hacia atrás generalizada

Definición 4.5

Dado un juego G finito en forma extensiva con información completa, pero no necesariamente perfecta, llamamos **algoritmo de inducción hacia atrás generalizado** al que procede así:

1. Se identifican todos los subjuegos que se producen en último lugar (es decir, aquellos que comienzan en los nodos de decisión lo más cercanos posible a los nodos terminales. Estos subjuegos pueden tener uno o varios jugadores. Se calculan los EN de dichos subjuegos.

2. A continuación, si sólo existe un único EN en estrategias puras en cada subjuego, se elimina cada uno de esos subjuegos, salvo su nodo de comienzo que es reemplazado por el nodo terminal del juego global al que se habría llegado de haberse jugado el perfil EN correspondiente a ese subjuego, y se le atribuyen los pagos de dicho perfil. De esta manera se han podado las ramas del árbol correspondientes a los subjuegos finales del juego global inicial, y nos encontramos con un árbol más corto.

3. Se repite con el árbol reducido lo dicho en las etapas anteriores, y se continúa con este proceso hasta que se llega al nodo inicial del juego de partida.

Acabado el proceso, tendremos unos pagos asociados al nodo inicial del juego, y unas ramas del árbol señaladas como componentes de los EN de cada subjuego. Pues bien, el único desarrollo del juego (camino desde el nodo inicial hasta un nodo terminal) consistente en ramas señaladas es el único resultado perfecto en subjuegos, y los pagos asociados al nodo inicial son los que corresponderían a ese desarrollo del juego. Por otra parte, el único perfil de estrategias en el que la estrategia de cada jugador consiste en jugar la acción indicada en cada uno de sus conjuntos de información, es el único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

Observación 4.5:

1. En el caso de que existan **múltiples EN en alguno o varios de los subjuegos**, el proceso sólo cambia en que hay que considerar todas las posibilidades, es decir, se forman tantos árboles reducidos como combinaciones haya de EN en la etapa actual. Al final, obtendremos resultados perfectos en subjuegos (todos) y equilibrios de Nash perfectos en subjuegos.
2. En el caso de que existan EN en estrategias mixtas, el proceso no varía salvo en que deberemos atribuir al nodo de comienzo de los subjuegos con EN en estrategias mixtas los pagos esperados correspondientes a ese EN.

Teorema 4.3

Si un juego admite la inducción hacia atrás generalizada, y todos y cada uno de sus subjuegos finales (tanto en el juego global como en los reducidos) admiten un EN único, el resultado mediante inducción del juego es el único resultado perfecto en subjuegos y las estrategias generadas a partir de las acciones tomadas por cada jugador en cada uno de sus conjuntos de información constituyen el **único** equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

Como en el caso de la inducción hacia atrás para juegos con información perfecta, no podemos asegurar que dicho equilibrio se produzca en estrategias puras, a no ser que añadamos alguna exigencia adicional. Por otra parte, cabe preguntarse, al igual que se hizo en el caso de información perfecta, si el proceso de inducción hacia atrás generalizada sigue siendo válido cuando en algún nodo de decisión haya un número infinito de acciones factibles (pero manteniendo finita la longitud de cualquier desarrollo posible del juego). La respuesta es análoga a la que se dio entonces: el proceso sigue siendo válido siempre que existan las acciones óptimas y los equilibrios de Nash en los cuales se basa. En el Ejemplo 4.28 se analiza un juego con espacios continuos de acciones factibles.

Ejemplos de aplicación de la inducción hacia atrás generalizada

Ejemplo 4.24

Sea el siguiente juego expresado en forma extensiva (Figura 4.23):

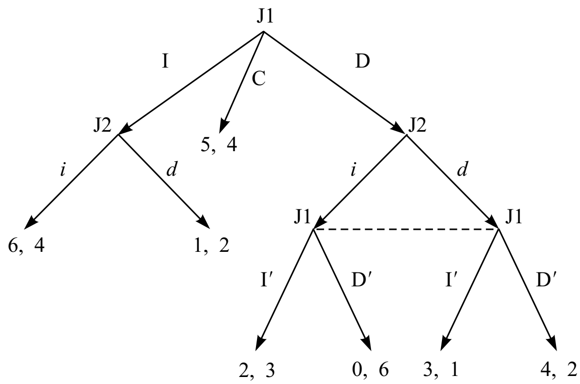


Figura 4.23 Juego con información imperfecta.

Si analizamos el juego, vemos que tiene dos subjuegos propios. En el primero de ellos juega sólo J2 (tras la decisión I de J1), mientras que el otro (tras la decisión D de J1) es un juego de decisiones simultáneas y por tanto con un conjunto de información no unitario para uno de los jugadores, en este caso para J1. Es justamente este segundo subjuego el que nos indica que un modo apropiado de determinar los ENPS del juego es el algoritmo de inducción hacia atrás generalizado.

La aplicación de la inducción hacia atrás generalizada supone el siguiente desarrollo:

1. Analizar los subjuegos finales. En este caso los únicos que existen son:

— El subjuego que comienza tras la decisión de I de J1. En este subjuego, J2 decidirá la acción *i*, pues le permite obtener un pago (igual a 4) superior al de *d* (igual a 2).

— El subjuego que comienza tras la decisión D de J1, que es un juego con información imperfecta con la siguiente forma estratégica:

		J2	
		i	*d*
J1	I′	2, 3	3, 1
	D′	0, 6	4, 2

El único EN de este subjuego es el perfil (I′, *i*).

2. Reemplazar los nodos de inicio de cada subjuego por los nodos terminales correspondientes a los equilibrios de Nash de cada subjuego y repetir el proceso una vez podado el árbol.

3. En la última fase del algoritmo, la situación es que, teniendo en cuenta cómo se jugará en cada uno de los subjuegos y que tanto J1 como J2 lo saben, en el nodo inicial J1 se enfrenta a la decisión de jugar I, C ó D, que le producirían, respectivamente, los pagos 6, 5 ó 2. Es evidente que su decisión óptima es jugar I, con lo que concluye el algoritmo. La Figura 4.24 ilustra el proceso completo:

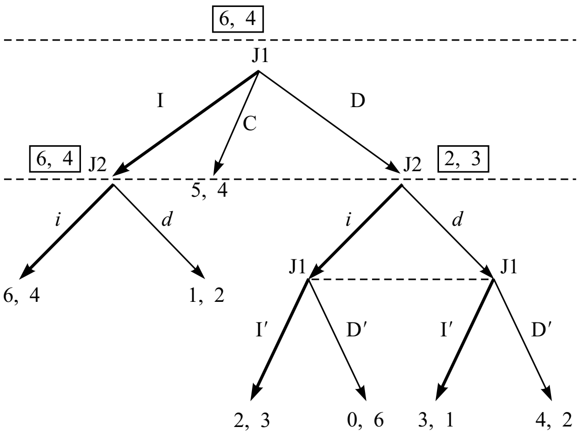


Figura 4.24 Inducción hacia atrás generalizada en el juego con información imperfecta.

Como conclusión, el ENPS del juego será el perfil estratégico (I-I′, *i-i*) donde para J1 la estrategia I-I′ significa «jugar I al inicio del juego y jugar I′ si hubiese empezado jugando D», mientras que la estrategia *i-i* de J2 significa «jugar *i* si J1 juega I y jugar *i* i J1 juega D». El desarrollo del juego que el ENPS determina es I → *i*, y el vector de pagos resultante es (6, 4).

Ejemplo 4.25

En el juego de disuasión 2, del Ejemplo 4.1, el único nodo de decisión que inicia un subjuego propio es el de INCUMBRON, que inicia un juego estático entre ambos jugadores cuya forma estratégica (donde colocamos ENTRON a la izquierda por ser el primer jugador del juego global) es:

		INCUMBRON	
		A	B
ENTRON	A	−2, −2	4, 2
	B	1, 4	−1, −1

Los EN en estrategias puras de este subjuego son $s^* = (\text{B, A})$ y $s'^* = (\text{A, B})$. Si reemplazamos el nodo de INCUMBRON donde comienza el subjuego por el nodo terminal correspondiente al EN (B, A) o al EN (A, B), tenemos los dos juegos reducidos, uno para cada elección de EN, en la Figura 4.25.

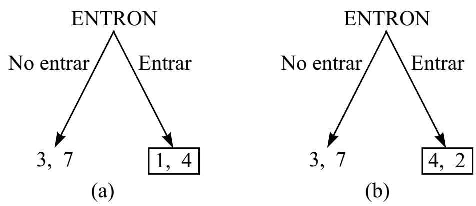


Figura 4.25 Juegos reducidos correspondientes al EN (B, A) y al EN (A, B).

Si (B, A) es el EN que suponemos se va a jugar en el subjuego, la elección óptima de J1 al comienzo del juego sería *No Entrar*. Por tanto en este caso el ENPS es el perfil (*No Entrar*-B, A). Por el contrario, si (A, B) es el EN que suponemos se va a jugar, J1 elegiría *Entrar* en el mercado, dando lugar a que el perfil (*Entrar*-A, B) sea perfecto en subjuegos. La Figura 4.26 ilustra el proceso completo.

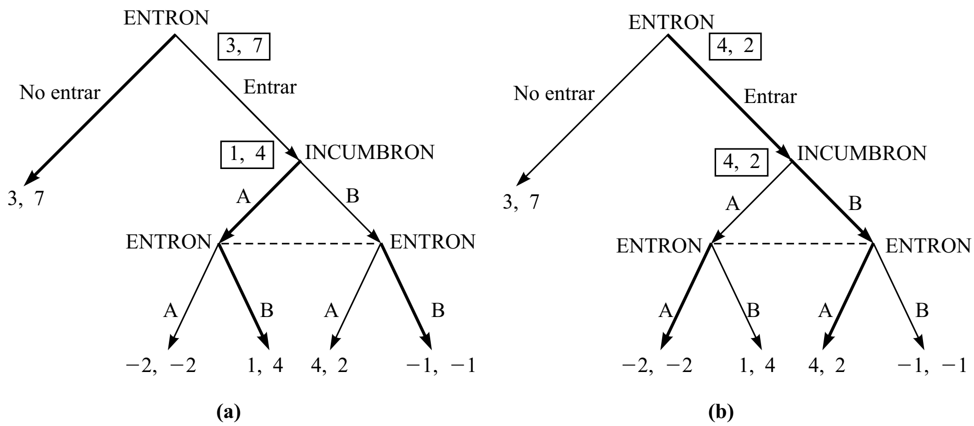


Figura 4.26 Inducción hacia atrás generalizada en el juego de disuasión 2.

Ejemplo 4.26

En el dilema del prisionero repetido 2 veces, hay cuatro subjuegos propios, todos iniciados por J1. Cada uno de esos subjuegos es un juego estático equivalente al dilema del prisionero estándar, y por tanto tiene un único EN, que es el perfil (*Confesar*, *Confesar*). Al podar todos esos subjuegos queda un juego reducido que sigue siendo equivalente al dilema del prisionero estándar, y por tanto tiene un único EN, que es el perfil (*Confesar*, *Confesar*). La Figura 4.27 ilustra el proceso completo.

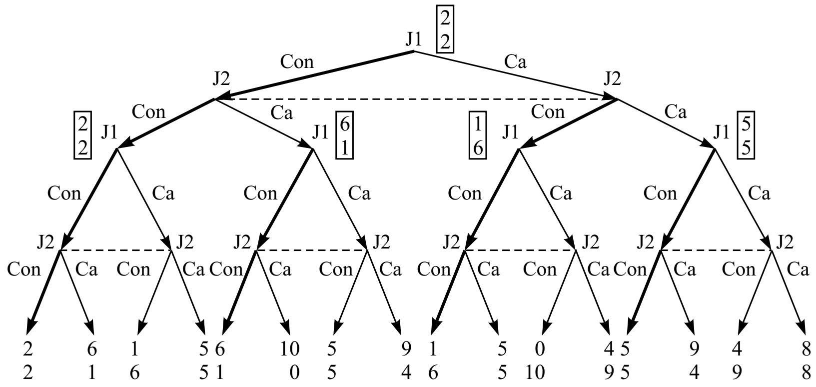


Figura 4.27 Inducción hacia atrás generalizada en el dilema del Prisionero, repetido 2 veces.

Como conclusión, el ENPS del juego será el perfil estratégico *(Confesar Siempre, Confesar Siempre)* donde para ambos jugadores la estrategia *Confesar Siempre* significa «jugar *Confesar* en cada una de las posibles etapas». El desarrollo del juego que el ENPS determina es *Confesar* → *Confesar* → *Confesar* → *Confesar*, y el vector de pagos resultante es (2, 2).

Ejemplo 4.27

Sea el juego siguente en dos etapas con tres jugadores:

En la primera etapa los jugadores J1 y J2 juegan la batalla de los sexos. En la segunda etapa, y tras observar cómo se ha jugado la primera, los jugadores J2 y J3 juegan el dilema del prisionero. Los pagos finales son la suma de los pagos obtenidos en cada etapa.

Representando su forma extensiva tenemos la Figura 4.28.

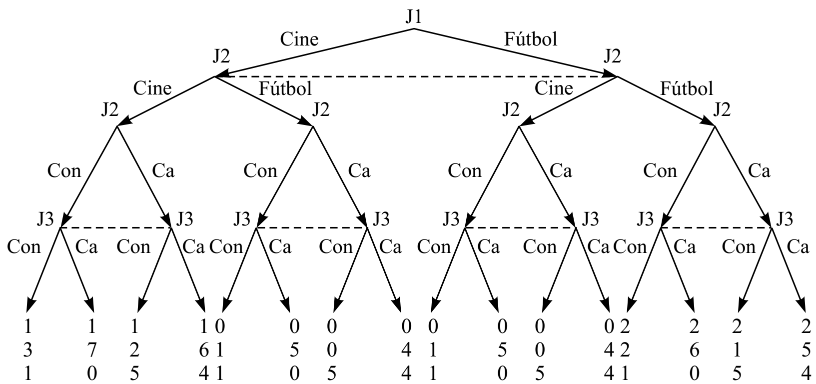


Figura 4.28. Inducción hacia atrás generalizada.

El razonamiento utilizando inducción hacia atrás generalizada procede así:

En la segunda etapa, y cualquiera que haya sido el resultado en la primera, suponemos que J2 y J3 jugarán *(Confesar*, *Confesar)* pues este perfil es el único EN del juego de esta etapa. En la primera etapa, y sabiendo que J2 y J3 van a jugar *(Confesar*, *Confesar)*, nos queda el juego reducido siguiente (obsérvese que se ha añadido una unidad a cada pago de J2):

		J2	
		Fútbol	Cine
J1	Fútbol	2, 2	0, 1
	Cine	0, 1	1, 3

Este juego reducido tiene dos EN en estrategias puras, que son (*Fútbol*, *Fútbol*) y (*Cine*, *Cine*). En conclusión, los únicos resultados perfectos en subjuegos del juego global son:

Fútbol → *Fútbol* → *Confesar* → *Confesar* y *Cine* → *Cine* → *Confesar* → *Confesar*

y los únicos EN perfectos en subjuegos en estrategias puras del juego global son:

(Fútbol, *Fútbol-Confesar en cualquier caso*, *Confesar en cualquier caso)*
(Cine, *Cine-Confesar en cualquier caso*, *Confesar en cualquier caso)*

Como puede observarse, el análisis del juego no cambia si para resolver la segunda etapa sólo tenemos en cuenta las ganancias de los jugadores en dicha etapa y no consideramos lo que pueda suceder en la primera etapa. Es decir, el análisis de inducción no varía si sólo consideramos en cada etapa los pagos que reciben los jugadores en el juego a partir de dicha etapa.

En nuestro ejemplo el razonamiento puede ser como sigue: en la segunda etapa los jugadores J2 y J3 se enfrentan al dilema del prisionero independientemente de lo que haya sucedido en la primera etapa, y puesto que no pueden alterar los acontecimientos de la primera etapa sólo deben interesarse por las ganancias que puedan obtener en la segunda etapa (o para ser más exactos sólo deberían interesarse por las ganancias que puedan obtener en lo que resta de juego, es decir, segunda etapa y siguientes si fuese el caso). En consecuencia, cuando los jugadores J2 y J3 se enfrentan al dilema del prisionero en la segunda etapa, se están enfrentando al siguiente juego:

		J3	
		Callar	Confesar
J2	Callar	4, 4	0, 5
	Confesar	5, 0	1, 1

Y por tanto, independientemente de lo que se haya decidido en la primera etapa, ambos jugadores jugarán (*Confesar*, *Confesar*), pues es el único EN del juego de etapa.

Sin embargo, en la primera etapa, los jugadores J1 y J2 deberán tener en cuenta no sólo los pagos de esa etapa sino también los de las etapas posteriores, por si pudiera suceder que su comportamiento en la primera etapa afectase de alguna manera al comportamiento de los jugadores en las etapas sucesivas (en este caso en la segunda etapa). Por tanto, en la primera etapa los jugadores J1 y J2, anticipando lo que sucederá en la segunda etapa, se enfrentan al juego de la batalla de los sexos con una alteración en los pagos que recibe el jugador J2 (como consecuencia de la anticipación de lo que sucederá en la segunda etapa):

		J2	
		Fútbol	Cine
J1	Fútbol	2, 2	0, 1
	Cine	0, 1	1, 3

donde encontramos dos EN, (*Fútbol*, *Fútbol*) y (*Cine*, *Cine*). Por lo que se refiere a la obtención de los ENPS y RPS, el análisis coincide con el realizado.

En este ejemplo el análisis de la primera etapa es idéntico al que tendríamos de no considerar la segunda etapa, y por tanto, con independencia de ésta. Esto se debe a que en la segunda etapa existe un único EN. Sin embargo, si el juego de la segunda etapa hubiese tenido varios EN, seguramente los resultados de la primera etapa estarían condicionados por los de la segunda.

Ejemplo 4.28

Considérese el siguiente juego en dos etapas, con tres jugadores. En la primera etapa el jugador 1 elige un número real x_1. En la segunda etapa, los jugadores 2 y 3, tras observar x_1, eligen simultaneamente los números reales x_2 y x_3. Supongamos que los pagos son:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_2 + x_3)^2}{2} + x_1(x_2 + x_3)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = (12 - x_1 - x_2 - x_3)x_2$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = (12 - x_1 - x_2 - x_3)x_3$$

Para calcular los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos, usaremos la inducción hacia atrás generalizada.

Analicemos en primer lugar el juego estático de la segunda etapa, en el que intervienen J2 y J3 y toman x_1 como dado. Para calcular el EN de este juego planteamos los problemas de maximización de cada jugador.

Dados x_1 y x_3 fijos, J2 resuelve el problema:

$$\max_{x_2} u_2(x_1, x_2, x_3) = (12 - x_1 - x_2 - x_3)x_2$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\partial u_2(x_1,\ x_2,\ x_3)}{\partial x_2} = 12 - x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$$

Calculando y resolviendo, obtenemos la respuesta óptima de J2,

$$x_2 = \frac{12 - x_1 - x_3}{2}$$

Análogamente, dados x_1 y x_2 fijos, J3 resuelve el problema:

$$\max_{x_3} u_3(x_1, x_2, x_3) = (12 - x_1 - x_2 - x_3)x_3$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\partial u_3(x_1,\ x_2,\ x_3)}{\partial x_3} = 12 - x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

Y tras calcular y resolver, obtenemos la respuesta óptima de J3,

$$x_3 = \frac{12 - x_1 - x_2}{2}$$

Las condiciones de segundo orden son, respectivamente,

$$\frac{\partial^2 u_2(x_1,\ x_2,\ x_3)}{\partial x_2^2} = -2 < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u_3(x_1,\ x_2,\ x_3)}{\partial x_3^2} = -2 < 0$$

(ambas son condiciones suficientes de máximo).

El EN de este juego, que se obtiene resolviendo las ecuaciones a que han dado lugar las anteriores condiciones de primer orden, y que depende únicamente del número x_1 elegido por J1, es

$$\left(R_2(x_1) = \frac{12 - x_1}{3},\ R_3(x_1) = \frac{12 - x_1}{3}\right)$$

Analicemos ahora la decisión de J1 en la primera etapa. Resolverá el problema de maximización

$$\max_{x_1} u_1(x_1, R_2(x_1), R_3(x_1)) = \frac{1}{2}\,\frac{(24 - 2x_1)^2}{9} + x_1\,\frac{24 - 2x_1}{3}$$

La condición de primer orden es

$$\frac{\partial u_1(x_1,\ R_2(x_1),\ R_3(x_1))}{\partial x_1} = \frac{24 - 2x_1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right) + \frac{24 - 2x_1}{3} - \frac{2x_1}{3} = 0$$

Calculando y resolviendo, obtenemos $x_1 = 3$.
La condición de segundo orden es

$$\frac{\partial^2 u_1(x_1,\ R_2(x_1),\ R_3(x_1))}{\partial x_1^2} = -\frac{8}{9} < 0$$

(es condición suficiente de máximo).
En conclusión, el resultado por inducción hacia atrás generalizada de este juego es

$$x_1^* = 3,\ x_2^* = R_2(x_1^*) = 3 \quad \text{y} \quad x_3^* = R_3(x_1^*) = 3$$

y el desarrollo del juego determinado por la inducción hacia atrás generalizada es

J1 elige $x_1^* = 3$ y a continuación J2 y J3 eligen simultaneamente $x_2^* = 3$ y $x_3^* = 3$

y, por último, el único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos determinado por la inducción hacia atrás generalizada es el perfil estratégico

$$\left(x_1^* = 3,\ x_2^* = R_2(x_1) = \frac{12 - x_1}{3},\ x_3^* = R_3(x_1) = \frac{12 - x_1}{3}\right)$$

4.5. APLICACIONES. EL DUOPOLIO DE STACKELBERG

El modelo de duopolio de Stackelberg es un ejemplo de juego en dos etapas en el que los conjuntos de acciones son continuos. Aquí los jugadores son dos empresas que constituyen un duopolio con un producto homogéneo compitiendo en cantidades, pero ahora supondremos que no van a tomar sus decisiones de producción simultáneamente (lo que daría lugar al modelo del duopolio de Cournot), sino que una de ellas, a la que llamaremos empresa líder, decide su producción en primer lugar, y la otra, la empresa seguidora, decide su propia cantidad a producir tras haber observado la decisión de la empresa líder. Este modelo fue propuesto por Stackelberg en 1934.

Un modelo simplificado

Supongamos que las empresas $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ fabrican un determinado producto homogéneo cuya función de demanda inversa es decreciente y lineal en el intervalo $[0, a]$, que los costes marginales de cada empresa son constantes, menores que a e iguales a c para ambas, que no hay costes fijos y que en dicho mercado se vende toda la cantidad producida.

En concreto, sea la función de demanda inversa:

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & \text{si} \quad Q < a \\ 0 & \text{si} \quad Q \geqslant a \end{cases} \quad (\text{donde } a > 0 \text{ y } Q = q_1 + q_2)$$

y sean las funciones de costes:

$$C_1(q_1) = cq_1, \qquad C_2(q_2) = cq_2 \qquad \text{donde } c < a$$

Los beneficios serán, por tanto:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1(a - q_1 - q_2) - cq_1 = q_1(a - q_1 - q_2 - c)$$
$$u_2(q_1, q_2) = q_2(a - q_1 - q_2) - cq_2 = q_2(a - q_1 - q_2 - c)$$

Supongamos por último que el desarrollo temporal del juego es:

1. La empresa $\mathbf{E_1}$ escoge una cantidad $q_1 \geqslant 0$.
2. La empresa $\mathbf{E_2}$ observa q_1 y escoge a continuación una cantidad $q_2 \geqslant 0$.

Solución (por inducción hacia atrás)

Analicemos las decisiones de $\mathbf{E_2}$ en la segunda etapa. Dado un q_1 fijo, $\mathbf{E_2}$ querrá responder a la decisión q_1 de $\mathbf{E_1}$ resolviendo el problema

$$\max u_2(q_1, q_2) = q_2[a - c - q_1 - q_2] \qquad \text{en la variable } q_2$$

Suponiendo que la solución sea interior, la condición de primer orden es:

$$\partial u_2(q_1, q_2)/\partial q_2 = 0$$

Calculando y resolviendo, obtenemos $a - c - q_1 - 2q_2 = 0$, de donde se deduce

$$q_2 = \frac{a - q_1 - c}{2}$$

La condición de segundo orden es $\partial^2 u_2(q_1, q_2)/\partial q_2^2 = -2 < 0$ (condición suficiente de máximo).

Por tanto, la respuesta de $\mathbf{E_2}$ a $\mathbf{E_1}$ viene dada por la función de respuesta

$$R_2(q_1) = \frac{a - q_1 - c}{2}, \qquad \text{para } 0 \leqslant q_1 \leqslant a - c$$

Analicemos ahora las decisiones de $\mathbf{E_1}$ en la primera etapa. Teniendo en cuenta que $\mathbf{E_2}$ va a responder a cualquier decisión q_1 de $\mathbf{E_1}$ con la cantidad

$$R_2(q_1) = \frac{a - q_1 - c}{2}$$

$\mathbf{E_1}$ querrá actuar, como anticipación a dicha respuesta, resolviendo el problema

$$\max u_1(q_1, R_2(q_1)) = q_1[a - c - q_1 - R_2(q_1)] = \frac{q_1(a - q_1 - c)}{2} \text{ en la variable } q_1$$

La condición de primer orden sería:

$$du_1(q_1, R_2(q_1))/dq_1 = 0$$

Calculando y resolviendo, obtenemos $\dfrac{a-2q_1-c}{2}=0$, de donde se deduce $q_1=\dfrac{a-c}{2}$.

La condición de segundo orden es $d^2u_1(q_1, R_2(q_1))/dq_1^2 = -1 < 0$ (condición suficiente de máximo).

Por tanto, la anticipación de $\mathbf{E_1}$ viene dada por la decisión $q_1 = \dfrac{a-c}{2}$.

En conclusión, el resultado por inducción hacia atrás de este juego es

$$q_1^* = \frac{a - c}{2} \quad \text{y} \quad R_2(q_1^*) = \frac{a - q_1^* - c}{2} = \frac{a - c}{4},$$

el desarrollo del juego determinado por la inducción hacia atrás es

$\mathbf{E_1}$ produce la cantidad $\dfrac{a-c}{2}$, y a continuación $\mathbf{E_2}$ produce la cantidad $\dfrac{a-c}{4}$

y, por último, el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos determinado por la inducción hacia atrás es el perfil estratégico

$$\mathbf{s^*} = \left(s_1^* = q_1^* = \frac{a - c}{2},\ s_2^* = R_2(.)\right)$$

donde la estrategia s_1^* de $\mathbf{E_1}$ es la cantidad concreta $q_1^* = \dfrac{a-c}{2}$, mientras que la estrategia s_2^* de $\mathbf{E_2}$ es la función de respuesta $R_2(.)$ consistente en producir cantidades condicionadas $R_2(q_1) = \dfrac{a - q_1 - c}{2}$ como respuesta a cualquier cantidad q_1 de $\mathbf{E_1}$.

A las cantidades de equilibrio que resultan de este juego las identificaremos con un subíndice S para diferenciarlas de las correspondientes a otros juegos como el duopolio de Cournot. Así pues:

$$q_{1,S}^* = \frac{a - c}{2} \quad \text{y} \quad q_{2,S}^* = \frac{a - c}{4}$$

Comparación con el duopolio de Cournot

En la Tabla 4.1 se muestra la comparación del resultado por inducción hacia atrás en el duopolio de Stackelberg, con el resultado de equilibrio (EN) en el duopolio de Cournot:

Tabla 4.1

	Duopolio de Cournot	Duopolio de Stackelberg	Comparación Cournot-Stackelberg
Producción individual	$q^*_{1,C} = \frac{a-c}{3}$, $q^*_{2,C} = \frac{a-c}{3}$	$q^*_{1,S} = \frac{a-c}{2}$, $q^*_{2,S} = \frac{a-c}{4}$	$q^*_{1,C} < q^*_{1,S}$ $q^*_{2,C} > q^*_{2,S}$
Producción total	$Q^*_C = 2\,\frac{a-c}{3}$	$Q^*_S = 3\,\frac{a-c}{4}$	$Q^*_C < Q^*_S$
Precio	$P^*_C = \frac{a+2c}{3}$	$P^*_S = \frac{a+3c}{4}$	$P^*_C > P^*_S$
Beneficio individual	$u^*_{1,C} = \frac{(a-c)^2}{9}$, $u^*_{2,C} = \frac{(a-c)^2}{9}$	$u^*_{1,S} = \frac{(a-c)^2}{8}$, $u^*_{2,S} = \frac{(a-c)^2}{16}$	$u^*_{1,C} < u^*_{1,S}$ $u^*_{2,C} > u^*_{2,S}$
Beneficio total	$U^*_C = 2\,\frac{(a-c)^2}{9}$	$U^*_S = 3\,\frac{(a-c)^2}{16}$	$U^*_C > U^*_S$

Como nos muestra la tabla, a la empresa $\mathbf{E_2}$ le ha perjudicado que la empresa $\mathbf{E_1}$ se haga líder, a pesar de que ha dispuesto, antes de tomar su decisión, de más información de la que disponía en el modelo de Cournot, ya que ha observado que la empresa líder producía la cantidad q_1. La razón de esta aparente paradoja (que no ocurre en los problemas de decisión unipersonales) es que la empresa $\mathbf{E_1}$ sabe que la empresa $\mathbf{E_2}$ conoce q_1 como hecho consumado, al cual tiene que adaptarse (si la empresa $\mathbf{E_2}$ quiere maximizar beneficios deberá tener en cuenta la decisión de $\mathbf{E_1}$), y la empresa $\mathbf{E_1}$ actúa en consecuencia, anticipando ese comportamiento de adaptación de la otra empresa. La Figura 4.29 también ilustra la situación al mostrar, en el plano (q_1, q_2) de las cantidades producidas, las curvas de reacción, los puntos de equilibrio $\mathbf{D^*_S}$ y $\mathbf{D^*_C}$ de los duopolios de Stackelberg y de Cournot, y las correspondientes curvas de isobeneficio. Se observa que las curvas de isobeneficio correspondientes al equilibrio de Stackelberg, señaladas en trazo más grueso, corresponden a un beneficio mayor para $\mathbf{E_1}$ y menor para $\mathbf{E_2}$, en comparación con las del equilibrio de Cournot, señaladas en trazo fino. Además, se observa que, para el equilibrio de Stackelberg, la curva de isobeneficio de $\mathbf{E_2}$ es tangente a la recta vertical $q_1 = \dfrac{a-c}{2}$, pero la curva de isobeneficio de $\mathbf{E_1}$ es tangente a la curva de reacción de $\mathbf{E_2}$. Sin embargo, para el equilibrio de Cournot, las curvas de isobeneficio de $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ son tangentes, respectivamente, a las rectas

$$q_2 = \frac{a-c}{3} \quad \text{y} \quad q_1 = \frac{a-c}{3}$$

Se aprecia asimismo que tampoco el equilibrio de Stackelberg es eficiente en el sentido de Pareto.

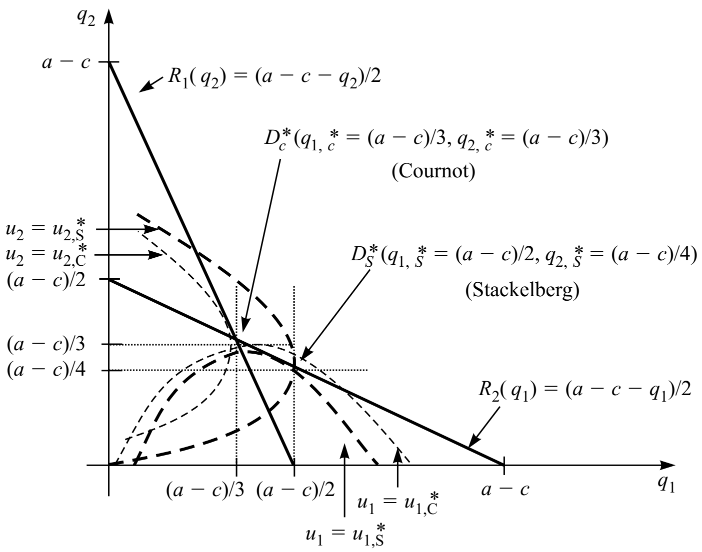


Figura 4.29

Merece la pena señalar también que en este juego existen infinitos equilibrios de Nash, aparte del obtenido por inducción hacia atrás, pero sólo éste es perfecto en subjuegos. Muchos de esos EN obedecen al siguiente esquema: $\mathbf{E_1}$ produce una cantidad pequeña y $\mathbf{E_2}$ pone en práctica la siguiente estrategia amenazante (que $\mathbf{E_1}$ toma en serio): *Si E_1 produce una cantidad grande yo produciré una cantidad tan grande que hundiré los precios*. Por ejemplo, sea el perfil ($s_1^* = q^*$, $s_2^* = R_2(.)$) donde

$$q_1^* = \frac{a-c}{3} \quad \text{y} \quad R_2(q_1) = \begin{cases} \dfrac{a-c}{3} & \text{si} \quad q_1 \leqslant \dfrac{a-c}{3} \\ a-c & \text{si} \quad q_1 > \dfrac{a-c}{3} \end{cases}$$

Es fácil demostrar que este perfil es un EN. En efecto, la respuesta óptima de $\mathbf{E_1}$ a $s_2^* = R_2(.)$ es producir $(a - c)/3$ (pues sabemos que $\left[\dfrac{a-c}{3}, \dfrac{a-c}{3}\right]$ es el equilibrio de Cournot), y la respuesta óptima de $\mathbf{E_2}$ a $s_1^* = \dfrac{a-c}{3}$ es $R_2(.)$, pues $R_2(.)$ le ordena producir $\dfrac{a-c}{3}$ en ese caso. Pero también es fácil demostrar que no es un ENPS, ya que si $\mathbf{E_1}$ produjera una cantidad mayor que $\dfrac{a-c}{3}$, por ejemplo $\dfrac{a-c}{2}$, E_2 no cumpliría su estrategia-amenaza $R_2(.)$, pues ésta no sería una respuesta óptima a dicha cantidad producida por $\mathbf{E_1}$ (la respuesta óptima sería $\dfrac{a-c}{2}$). Análogo razonamiento permite demostrar que los perfiles

$$s^* = (s_1^* = q_1^*, s_2^* = R_2(.)), \text{ donde } q_1^* = \frac{a-c}{3} \text{ y } R_2(q_1) = \frac{a-c}{3} \text{ para cualquier } q_1,$$

y

$$s'^* = (s_1^* = q_1^*, s_2^* = R_2(.)), \text{ donde } q_1^* = \frac{a-c}{2} \text{ y } R_2(q_1) = \frac{a-c}{4} \text{ para cualquier } q_1$$

son EN que no son perfectos en subjuegos. Curiosamente, el primero de ellos induce el mismo resultado que el equilibrio de Cournot, mientras que el segundo induce el mismo resultado que el equilibrio de Stackelberg.

Un modelo general

Adoptemos ahora hipótesis más generales sobre las funciones de demanda y de costes, que supondremos de clase $\mathbf{C}^2$ (continuas y diferenciables hasta el orden 2, inclusive) en los dominios relevantes. Concretando, si las funciones de ganancias son

$$u_i(q_1, q_2) = q_i \cdot P(Q) - C_i(q_i), \forall i \in \{1, 2\}$$

supongamos ahora que existe un valor $Q_0 > 0$ de la cantidad total tal que:

1. La demanda inversa es continua en $\mathbf{R}^+$, decreciente en el intervalo de cantidades inferiores a Q_0, y nula en adelante, y con derivada segunda continua en dicho intervalo. Es decir,

$$P'(Q) < 0, \forall Q \in [0, Q_0), \quad \text{y} \quad P(Q) = 0, \forall Q \geqslant Q_0 \tag{4.2}$$

$$P(Q) \text{ es continua en } \mathbf{R}^+ \quad \text{y} \quad P''(Q) \text{ es continua en } [0, Q_0) \tag{4.3}$$

2. Las funciones de costes de cada empresa tienen derivada segunda continua. Es decir,

$$C_i''(q_i) \text{ es continua en } \mathbf{R}^+, \forall i \in \{1, 2\} \tag{4.4}$$

3. El ingreso marginal $\partial I_i(q_1, q_2)/\partial q_i$ de una empresa $\mathbf{E}_i$ es estrictamente decreciente en la cantidad de la otra. Es decir,

$$\partial(\partial I_i(q_1, q_2)/\partial q_i)/\partial q_j < 0 \text{ en } [0, Q_0), \text{ siendo } I_i(q_1, q_2) = q_i \cdot P(Q) \tag{4.5}$$

4. Y por último,

$$C_i''(q_i) - P'(Q) > 0 \text{ en } [0, Q_0), \forall i \in \{1, 2\} \tag{4.6}$$

A partir de las hipótesis anteriores, vamos a demostrar que cada una de las empresas tiene una función de pagos $u_i(q_1, q_2) = q_i \cdot P(Q) - C_i(q_i)$ estrictamente cóncava en su correspondiente variable cantidad y una curva de reacción bien definida y estrictamente decreciente, lo que nos permitirá a su vez demostrar que en el equilibrio de Stackelberg la empresa líder $\mathbf{E_1}$ mejora con respecto al equilibrio de Cournot, mientras que la empresa seguidora $\mathbf{E_2}$ empeora.

Estudiemos en primer lugar las funciones de pagos. Dada la función de pagos $u_i(q_1, q_2) = q_i \cdot P(Q) - C_i(q_i)$, su derivada primera con respecto a q_i es

$$\partial u_i(q_1, q_2)/\partial q_i = q_i P'(Q) + P(Q) - C_i'(q_i)$$

y su derivada segunda con respecto a q_i es

$$\partial^2 u_i(q_1, q_2)/\partial q_i^2 = q_i P''(Q) + P'(Q) + P'(Q) - C_i''(q_i)$$

Por otra parte, el ingreso marginal de una empresa $\mathbf{E}_i$ es

$$\partial I_i(q_1, q_2)/\partial q_i = q_i P'(Q) + P(Q)$$

y su derivada con respecto a q_j es $\partial(\partial I_i(q_1, q_2)/\partial q_i)/\partial q_j = q_i P''(Q) + P'(Q)$.

Ahora bien, en virtud de las hipótesis [4.5] y [4.6], ocurre $\forall Q \in [0, Q_0)$ que $q_i P''(Q) + P'(Q) < 0$ y $C_i''(q_i) - P'(Q) > 0$. Por tanto,

$$\partial^2 u_i(q_1, q_2)/\partial q_i^2 = q_i P''(Q) + P'(Q) - (C_i''(q_i) - P'(Q)) < 0, \forall i \in \{1, 2\}$$

Es decir, las funciones de pagos u_i son estrictamente cóncavas en q_i.

Deduzcamos ahora las curvas de reacción. La curva de reacción $R_2(q_1)$ de $\mathbf{E_2}$, ante cualquier decisión q_1 de $\mathbf{E_1}$, se obtiene resolviendo el problema

$$\max u_2(q_1, q_2) = q_2(P(Q)) - C_2(q_2) \text{ en la variable de decisión } q_2$$

Si la solución maximizadora $q_2^* = R_2(q_1)$ es positiva, se trata de la única solución de la condición de primer orden

$$\partial u_2(q_1, q_2)/\partial q_2 = q_2 P'(Q) + P(Q) - C_2'(q_2) = 0 \qquad [4.7]$$

lo que nos permite definir $q_2^* = R_2(q_1)$ como la función definida implícitamente por [4.7] (en caso contrario la solución es $q_2^* = R_2(q_1) = 0$). Aplicando el teorema de la función implícita, su derivada con respecto a q_1 es:

$$\begin{aligned} \partial R_2(q_1)/\partial q_1 &= -(\partial(\partial u_2(q_1, q_2)/\partial q_2)/\partial q_1)/(\partial(\partial u_2(q_1, q_2)/\partial q_2)/\partial q_2) = \\ &= (\partial^2 u_2(q_1, q_2)/\partial q_1 \partial q_2)/(\partial^2 u_2(q_1, q_2)/\partial q_2^2) = \\ &= -(q_2 P''(Q) + P'(Q))/(\partial^2 u_2(q_1, q_2)/\partial q_2^2) < 0 \end{aligned}$$

(por ser positivo el numerador y negativo el denominador).

Así pues, la curva de reacción $R_2(q_1)$ es estrictamente decreciente en q_1, y por idénticas razones, la curva de reacción $R_1(q_2)$ es estrictamente decreciente en q_2. En la Figura 4.29 se mostraban, para el caso más simple, dichas curvas de reacción, los puntos de equilibrio $\mathbf{D}_S^*$ y $\mathbf{D}_C^*$ de los duopolios de Stackelberg y de Cournot, y las correspondientes curvas de isobeneficio. Se observaba allí que las curvas de isobeneficio correspondientes al equilibrio de Stackelberg, señaladas en trazo más grueso, corresponden a un beneficio mayor para $\mathbf{E_1}$ y menor para $\mathbf{E_2}$, en comparación con las del equilibrio de Cournot, señaladas en trazo fino.

4.6. APLICACIONES. EL MODELO DE LEONTIEF

Esta aplicación es una adaptación del modelo estudiado en Gibbons (1992). Estudia la relación entre una empresa que tiene el poder exclusivo del nivel de empleo con un único sindicato que tiene el poder exclusivo sobre el nivel de los salarios. Las reglas del juego son las siguientes:

1. El sindicato decide en primer lugar un nivel s de los salarios.
2. La empresa observa s y elige un nivel de empleo T.
3. Los pagos o ganancias son $U(T, s)$ para el sindicato y $\Pi(T, s)$, los beneficios obtenidos, para la empresa.

Modelo simplificado con funciones de pagos especificadas

Supongamos que los ingresos de la empresa sean los indicados por la siguiente función $I(T)$ que sólo depende del nivel de empleo:

$$I(T) = \begin{cases} 8T - T^2/2 & \text{si} \quad T \leqslant 8 \\ 32 & \text{si} \quad T \geqslant 8 \end{cases}$$

Así pues, la función de ganancias de la empresa es $\Pi(T, s) = I(T) - sT$. Por otra parte, sean las ganancias del sindicato las indicadas por la siguiente función de utilidad $U(T, s)$:

$$U(T, s) = Ts$$

En esta situación específica, la solución por inducción hacia atrás se obtiene así:

En la etapa 2, la empresa resuelve, dada la acción s decidida por el sindicato, el problema:

$$\max_T \Pi(T, s) = I(T) - sT = \begin{cases} (8 - s)T - T^2/2 & \text{si} \quad T \leqslant 8 \\ 32 - sT & \text{si} \quad T \geqslant 8 \end{cases}$$

Si la solución es interior, la condición de primer orden es:

$$\partial\Pi(T, s)/\partial T = \begin{cases} \partial[(8 - s)T - T^2/2]/\partial T = 8 - s - T & \text{si} \quad T \leqslant 8 \\ \partial[32 - sT]/\partial T = -s & \text{si} \quad T \geqslant 8 \end{cases}$$

Calculando y resolviendo, obtenemos:

Si $T \leqslant 8$, $8 - s - T = 0$, de donde se deduce $T^*(s) = 8 - s$.
Y si $T \geqslant 8$, la derivada parcial no se anula, salvo si $s = 0$.

La condición de segundo orden es:

$\partial^2\Pi(T, s)/\partial^2 T = -1$ (condición suficiente de máximo).
En la etapa 1, el sindicato resuelve el problema:

$$\max_s U(T^*(s), s) = (8 - s)s = 8s - s^2$$

La condición de primer orden es:

$$dU/ds = 8 - 2s = 0; \qquad s^* = 4$$

Así pues, el resultado del proceso de la Inducción hacia atrás es:

Acciones de equilibrio:	$s^* = 4$, $T^* = 4$
Pagos o ganancias:	$U^* = 16$, $\Pi^* = 8$

Observación 4.6:

El resultado anterior no es óptimo de Pareto, ya que las acciones $s = 3$ y $T = 6$ hubieran dado unas ganancias de $U = 18$ y $\Pi = 12$, mejores que las anteriores, tanto para la empresa como para el sindicato.

Resolución cualitativa en el caso general

En el caso general, la solución por inducción hacia atrás se obtendría así:

En la etapa 2, la empresa resuelve, dada la acción s decidida por el sindicato, el problema:

$$\max_{T} \ \Pi(T, s)$$

Sea $T^*(s)$ el valor de T que maximiza $\Pi(T, s)$, supuesto fijo s, es decir, la mejor respuesta a s.

Por su parte, en la etapa 1, el sindicato resuelve el problema:

$$\max_{s} \ U(T^*(s), s) \text{ (se supone } s \geqslant 0)$$

En la Figura 4.30 se encuentra esbozado el proceso de inducción hacia atrás que acabamos de describir. En las partes (a) y (b) están representadas, sobre el plano de ejes T y s, las curvas de indiferencia (isobeneficio) de la empresa, y las curvas de indiferencia (isoutilidad) del sindicato, en ambos casos añadiendo una flecha en trazo discontinuo que indica el sentido de las preferencias. En la parte (a) se ha representado además con trazo grueso discontinuo la curva de reacción de la empresa, es decir, la función de mejor respuesta $T^*(s)$ de la empresa a cualquier decisión s del sindicato. Obsérvese que dicha curva de reacción pasa por los puntos en que cada curva de isobeneficio alcanza un máximo (en efecto, si el sindicato decide una cantidad s, la mejor respuesta de la empresa consiste en identificar la curva isobeneficio que es tangente a la línea horizontal de altura s, y decidir en consecuencia como valor de T la primera coordenada del punto de tangencia. Dicho valor es $T^*(s)$.

Puesto que el sindicato sabe que la empresa va a responder con $T^*(s)$ a cualquier decisión s suya, es decir, que el resultado final va a ser un punto de la curva de reacción $T^*(s)$, su acción óptima va a consistir en identificar, en su mapa de curvas de isoutilidad, aquella que es tangente a la función de reacción de la empresa, y decidir como acción inicial el valor de s que corresponda a la segunda coordenada del punto de tangencia. Tal como se muestra en la parte (c), a dicho valor se le llama s^*.

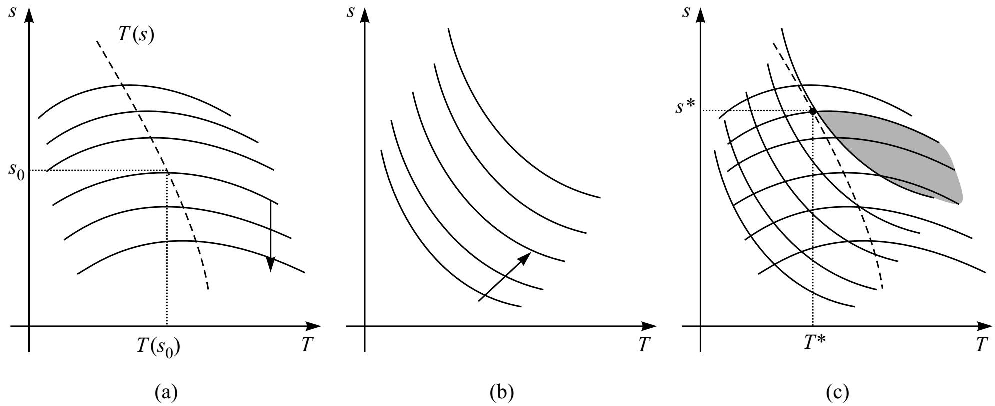


Figura 4.30

El resultado del proceso de inducción hacia atrás es, por tanto, el siguiente:

Acciones de equilibrio:	s^* y $\boldsymbol{T^* = T(s^*)}$
Desarrollo:	$\boldsymbol{s^* \to T^*}$
Pagos o ganancias:	$(U(T^*, s^*), R^*(T^*, s^*))$

El resultado anterior no es, en general, óptimo de Pareto, ya que los pares (T, s) que se encuentran en la zona sombreada hubieran dado unos pagos estrictamente mayores, tanto al sindicato como a la empresa.

EJERCICIOS PROPUESTOS

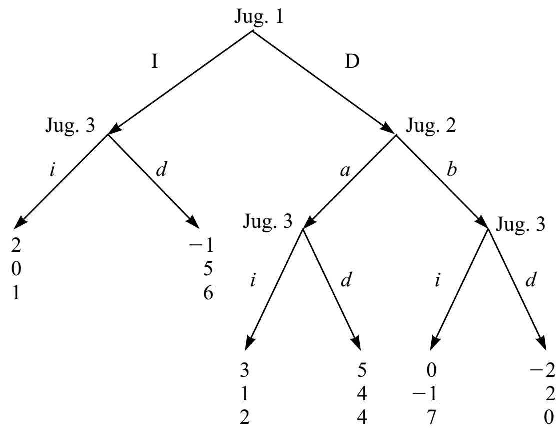
4.1 Considérese la siguiente versión del juego la batalla de los sexos:

		Jugadora 2	
		Cine	Fútbol
Jugador 1	Cine	1, 2	0, 0
	Fútbol	0, 0	2, 1

Suponga que se transforma el juego de tal modo que el jugador 1 decide en primer lugar. Represente el juego dinámico en su forma estratégica y extensiva, y determine los equilibrios de Nash en estrategias puras del juego.

Determine los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos.

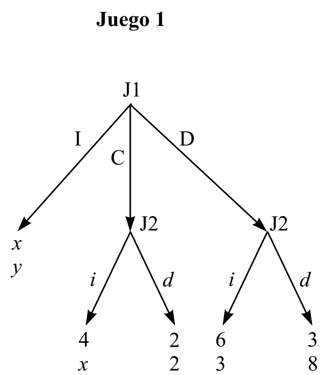
4.2 Considere el siguiente juego con tres jugadores representado en forma extensiva:

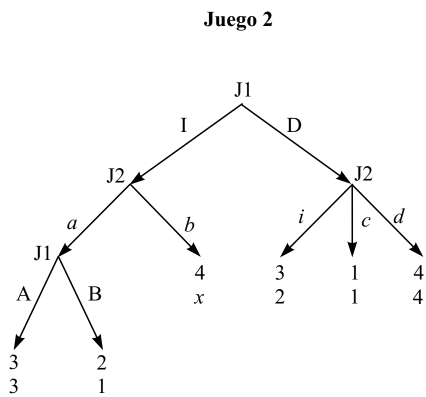


Se pide:

1. Resolverlo por inducción hacia atrás.
2. Representarlo en forma estratégica y calcular todos los equilibrios de Nash en estrategias puras.

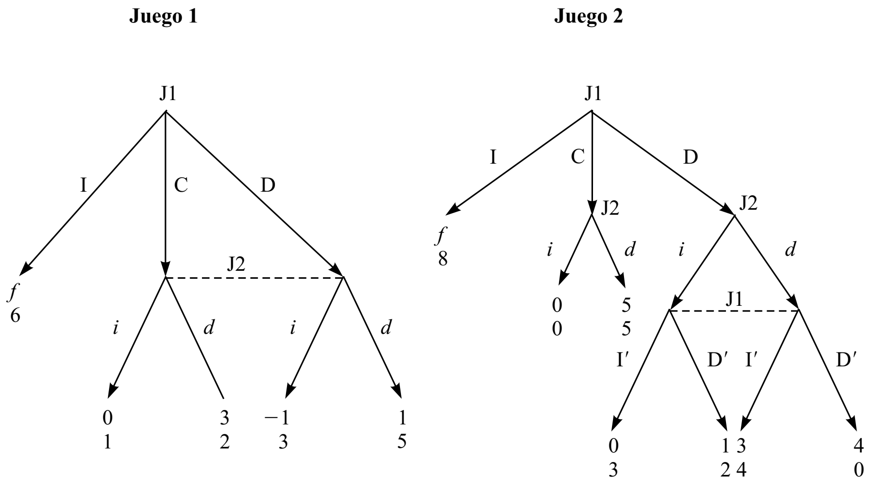
4.3 Sean los juegos:





1. Determine el conjunto de estrategias de cada jugador, la forma estratégica del juego y los equilibrios de Nash, éstos en función de los parámetros desconocidos.
2. Determine el/los equilibrios perfectos en subjuegos en función de los parámetros desconocidos.

4.4 Considérense los siguientes juegos con información completa pero imperfecta en forma extensiva:



Determine en el juego 1:

- Bajo qué condiciones la estrategia C del jugador 1 forma parte de un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. ¿Y la estrategia D? Razone la respuesta.
- Bajo qué condiciones existe un único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. ¿Existe algún valor de f para el cual el perfil (I, i) es el único equilibrio perfecto en subjuegos? Razone la respuesta.

Determine en el juego 2:

- El conjunto de estrategias de cada jugador.
- Para qué valores de f la estrategia $i - i$ del jugador 2 forma parte de un equilibrio de Nash o de un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.
- Bajo qué condiciones el perfil $(C - I', d - d)$ es el único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Calcule todos los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos en función del parámetro f.

4.5 Un vendedor posee un objeto de gran tamaño, de valor v, por el que están interesados dos únicos compradores (C1 y C2). Las necesidades de espacio le está haciendo perder oportunidades de negocio, de modo que decide llevar a cabo el siguiente acuerdo con los compradores a realizarse en un plazo máximo de cuatro días:

- El primer día le ofrecerá el objeto al comprador C1 al precio de mercado p, quien deberá decidir comprarlo o no comprarlo a dicho precio.
- En caso de que C1 no se decida a comprar, el segundo día el objeto es ofrecido a C2 pero a un precio $p/2$, quien será ahora el que decida comprar o no comprar al nuevo precio.

- Si C2 no lo compra, el tercer día será de nuevo ofrecido a C1 ahora al precio $p/3$.
- Si C1 tampoco decide comprarlo, el cuarto y último día lo ofrece por última vez a C2 al precio $p/4$.
- Si en esos cuatro días ninguno de los dos compradores se ha decidido por comprar, entonces se lo regalará a uno de ellos al azar. Supondremos que los compradores son neutrales al riesgo y que su utilidad coincide con lo que ganan en la transacción.

Se pide:

1. Describir el juego en forma extensiva teniendo en cuenta que sólo los compradores C1 y C2 son los jugadores.
2. Suponiendo que el precio p es un número real positivo que no es múltiplo de 10, determine los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos en función del precio de venta p y sabiendo que el objeto tiene un valor $v = 120$.

4.6 Sea el siguiente juego de tipo Stackelberg: dos empresas, M y E, compiten en cantidades en el mercado de un bien. M decide primero qué cantidad q_M produce, y E determina su cantidad q_E tras observar q_M. Los costes fijos y marginales de ambas se suponen nulos, y la función de demanda inversa para ambas es: $P(Q) = b - q_M - 2q_E$, donde $Q = q_M + q_E$.

1. Halle razonadamente el resultado perfecto en subjuegos y los beneficios (pagos o utilidades del juego) de la empresa E en equilibrio.
2. Sea $b = 8$. Supongamos que la empresa E tiene la oportunidad, antes de que M haya decidido q_M, de hacer una campaña de publicidad, cuyo coste K es fijo, y cuya consecuencia es aumentar el valor de b de 8 a 16. Averigüe razonadamente el valor crítico de K por debajo del cual E sí haría la campaña y por encima del cual no la haría.

4.7 Considérese la siguiente versión de un duopolio de Bertrand. Dos empresas (T y N) dedicadas a la producción de refrescos se enfrentan a un mercado con las siguientes funciones de demanda $q_T(p_T, p_N) = 3 - 2p_T + p_N$ y $q_N(p_T, p_N) = 1 - 2p_N + p_T$. La empresa T tiene una tecnología tradicional y un poco obsoleta, lo que se manifiesta en un coste marginal alto $c_T = 2$. La empresa N, de muy reciente implantación, posee una tecnología nueva y eficiente, como muestra su estructura de costes, con un coste marginal $c_N = 1$. Ninguna de las empresas tiene costes fijos. Supongamos que la empresa T tiene la oportunidad de renovar su tecnología, reduciendo sus costes marginales a $c'_T = c_N = 1$, si realiza una inversión con un coste fijo de $F_T = 7/25$.

1. Si antes de competir en precios «a la Bertrand» la empresa T tuviese que tomar una decisión respecto a si invertir o no invertir, y dicha decisión fuese observada por la empresa N (convirtiéndose en conocimiento común), ¿decidirá invertir?

2. ¿Cambiaría de decisión si, con la misma estructura temporal, la empresa N soportase un coste fijo de entrada en el mercado igual $F_N = 10/25$ y decidiera entrar o no en el mercado al mismo tiempo que determina el precio? Analice qué decisiones tomará la empresa T en función del coste fijo de la empresa N, F_N.

4.8 Considérese el siguiente modelo en dos etapas: en una primera etapa un fabricante produce un bien intermedio, a un coste unitario constante c, que vende al único detallista de la zona al precio p_w, y en una segunda etapa el detallista revende el bien sin costes adicionales (salvo el precio pagado al fabricante) a los consumidores al precio p.

Suponiendo que la demanda de los consumidores viene representada por $q = 8 - 3p$ y que cada una de las empresas tiene como variable de decisión su precio de venta, p_w y p respectivamente, determine mediante inducción hacia atrás el resultado perfecto en subjuegos en función del coste unitario del fabricante, así como la cantidad de equilibrio y los beneficios de cada empresa.

(*Nota:* Obsérvese que la demanda del fabricante se determina en la segunda etapa.)

4.9 Considérense las siguientes versiones de un duopolio de Stackelberg:

Mercado no regulado. Dos empresas, A y B, compiten en cantidades en el mercado de un bien. A decide primero qué cantidad q_A produce, y B determina su cantidad q_B tras observar q_A. No hay costes fijos y los costes marginales de las empresas son 0 y c_B, respectivamente. La función de demanda inversa para ambas empresas es: $P(Q) = a - 2q_A - q_B$, donde $Q = q_A + q_B$.

Mercado regulado. Antes de que las empresas decidan sus cantidades a producir, el gobierno regula el mercado mediante el establecimiento de un sistema de subvenciones a la empresa B (empresa en desventaja), pues cree que con ello aumentará la competencia entre ambas empresas y así maximizará el bienestar social. Así, antes de que ninguna de las empresas decida su producción, el gobierno hace público que realizará una subvención a la empresa B de t u.m. por unidad producida (esto es equivalente a considerar que los costes marginales de B pasan de c_B a $c'_B = (c_B - t)$) y dada esa subvención que es conocimiento común, las empresas deciden sus cantidades a producir. También es conocimiento común que la medida de bienestar social que utiliza el gobierno para determinar el valor de t es: $W = (a - q_A - q_B)^2 - (1 + \alpha)(tq_B)$.

1. En la versión del mercado no regulado, halle razonadamente el resultado perfecto en subjuegos, y los beneficios de ambas empresas en equilibrio.
2. En la versión del mercado regulado y con $\alpha = 2$, $a = 16$ y $c_B = 4$, determine el resultado perfecto en subjuegos. ¿Cuál será la subvención que se dará a la empresa B?
3. Teniendo en cuenta los parámetros del apartado 2, ¿es correcta la creencia del gobierno respecto a la discriminatoria política de subvenciones establecida?

4.10 Considere el juego «quitar piedras». Dos personas toman turnos para quitar piedras de un monton de n piedras. Cada persona puede quitar una o dos piedras cuando es su turno. La persona que quita la última piedra es el ganador, y su rival le da 100 €.

1. Halle el/los equilibrios perfectos en subjuegos cuando $n = 1$ y $n = 2$.
2. Determine quién es el ganador de cada equilibrio perfecto en subjuegos cuando $n = 3$, teniendo en cuenta que el subjuego que comienza después de que el jugador 1 quite una piedra es el juego con $n = 2$ en el que el jugador 2 es el primero que juega, y que el subjuego que comienza después de que el jugador 1 quite dos piedras es el juego con $n = 1$ en el que el jugador 2 es el primero que juega.
3. Utilizando la misma técnica, determine el ganador de cada equilibrio perfecto en subjuegos con $n = 4$, y dé un valor arbitrario de n.

4.11 Manoli y Pepe están decidiendo a dónde ir de vacaciones. Tienen tres opciones: Alicante (A), Barcelona (B) o Castellón (C), pero no se ponen de acuerdo sobre a cuál de los sitios ir. Para llegar a una decisión, han acordado el siguiente mecanismo decisorio. En primer lugar, Manoli veta uno de los tres sitios; a continuación Pepe, tras conocer el veto de Manoli, veta otro de los lugares, y deciden ir de vacaciones a aquel sitio que no ha sido vetado. Manoli prefiere A a B y B a C; Pepe prefiere C a B y B a A.

Suponiendo que cada jugador asigna una utilidad de 3 si consigue ir a su lugar favorito, de 2 si va al que se encuentra en segunda posición y 1 si va al menos preferido, y que ambos jugadores tienen que ir juntos de vacaciones, se pide:

1. Representar el juego en sus formas extensiva y estratégica.
2. Hallar el/los equilibrios de Nash y determinar cuál/cuáles son perfectos en subjuegos.

4.12 Considérense los dos juegos resultantes de modificar el juego de votación por mayoría, definido en el Ejemplo 2.6.

a) La votación se realiza secuencialmente (primero vota C1, después C2 y por último C3), llevando a cabo cada votante su derecho a voto una vez que ha visto el voto de los votantes que le han precedido. Las preferencias de los votantes no varían:

$$\text{Votante C1}: \quad A \succ B \succ C$$
$$\text{Votante C2}: \quad B \succ C \succ A$$
$$\text{Votante C3}: \quad C \succ A \succ B$$

b) Los votantes deben decidir en primer lugar, votando de forma simultánea, entre los candidatos A y B. A continuación, los votantes deben decidir, votando de nuevo de forma simultánea, entre el candidato ganador (A o B) y el candidato C. Resulta ganador el candidato que gana esta última votación. Las preferencias de los votantes son ahora las siguientes:

Votante C1 : $A > B > C$

Votante C2 : $B > C > A$

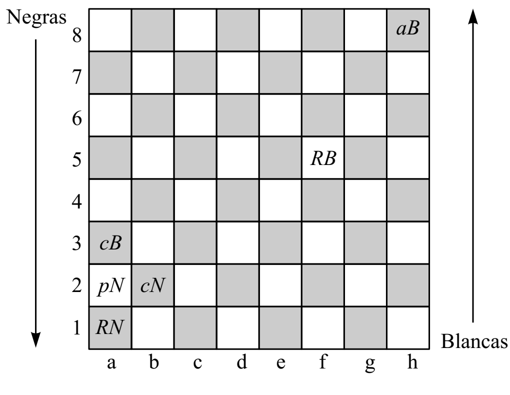
Votante C3 : $C > B > A$

1. Halle, en cada caso, los resultados perfectos en subjuegos.
2. Discuta razonadamente, en cada caso, si los resultados perfectos en subjuegos dependen del orden de actuación, y si dichos resultados conllevan algún comportamiento estratégico (en el que un votante no vota de acuerdo con sus preferencias).

4.13 En el juego de ajedrez, supóngase que la partida comienza (jugando blancas) en la posición indicada en la siguiente figura, donde cada pieza se denota mediante dos letras, la primera de las cuales alude al tipo (p = peón, a = alfil, c = caballo, t = torre, d = dama y R = Rey) y la segunda al color (B = Blanca y N = Negra).

Resuelva este juego por inducción hacia atrás, en cada uno de los casos siguientes:

1. Suponiendo que cuanto antes acabe la partida mayor es el pago para el jugador que la gana y menor para el jugador que la pierde.
2. Suponiendo que los pagos son los habituales en ajedrez (1 para quien gana, 0 para quien hace tablas y -1 para quien pierde).



CAPÍTULO 5

Juegos estáticos con información incompleta

En los capítulos anteriores se ha supuesto que la información es completa, es decir, que toda la información necesaria para describir el juego es de dominio público, y en particular son conocimiento común los pagos de todos los jugadores. Sin embargo, hay que reconocer que dicha suposición es muy exigente (por ejemplo, es difícil que en el duopolio de Cournot cada una de las empresas conozca con certeza los costes de la otra) y, en consecuencia, las situaciones estudiadas en dichos capítulos son en la práctica más bien la excepción que la regla.

En este capítulo vamos a analizar juegos estáticos con información incompleta, que son aquellos en los que los jugadores toman sus decisiones simultáneamente y, aunque las características y estructura del juego son de dominio público, existen algunas informaciones referidas a los pagos del juego (o con consecuencias en los pagos del juego) que son privadas, es decir, están al alcance de unos jugadores pero no de otros.

En las secciones siguientes se aborda, tras una primera sección introductoria en la que se da cabida a las jugadas de azar, el estudio de los juegos bayesianos y de los equilibrios bayesianos. Les siguen dos secciones de aplicaciones, la primera referida al duopolio de Cournot y la segunda referida a las subastas.

5.1. INTRODUCCIÓN

Se analizan en esta sección las distintas clases de jugadas de azar, y sus consecuencias en el análisis de los juegos, ya que los aspectos de información privada de los juegos estáticos de información incompleta se van a modelizar haciendo intervenir al azar a modo de jugador ficticio, de manera que sus jugadas sean observadas por unos jugadores, pero no por otros. Se presentan asimismo algunos ejemplos introductorios y de motivación, y una breve introducción a la decisión bayesiana.

En capítulos anteriores se consideró la posibilidad, al describir un juego en forma extensiva, de que algunos nodos correspondieran a jugadas de azar. En tal caso, era preciso que las probabilidades asociadas a los distintos resultados de dichas jugadas fuesen conocimiento común para los jugadores. En sí misma, la existencia de jugadas de azar no tendría por qué cambiar el análisis de un juego (simplemente, los jugadores habrían de razonar sobre pagos esperados en lugar de hacerlo sobre pagos ciertos, o hacer depender sus acciones de los resultados de la jugada de azar), y así ocurre en muchas ocasiones. Sin embargo, si se supone que los resultados de la jugada de azar son conocidos por unos jugadores y no por otros, sí cambia (y se complica un poco, como veremos) el análisis del juego.

Jugadas de azar en un nodo terminal

Ejemplo 5.1

Consideremos la siguiente modificación del dilema del prisionero, que sólo afecta al caso en que ambos jugadores realizan su acción *Callar*. Supongamos que a las consecuencias ya conocidas de dichas acciones, según las cuales a ambos presos se les va a aplicar la pena correspondiente a un delito menor, y que se traduce en un vector de pagos (4, 4), se añade la posibilidad, real aunque improbable, de que tampoco esté probado el delito menor, en cuyo caso serían puestos en libertad por falta de pruebas. Esta situación puede modelizarse haciendo que, en caso de que ambos jugadores decidan *Callar*, tenga lugar a continuación una jugada de azar de cuyo resultado dependerán los pagos. Concretando, supongamos que el vector de pagos sea el habitual (4, 4) con probabilidad conocida $p = 2/3$, y que sea (10, 10) con probabilidad $1 - p = 1/3$. Esta situación podría representarse como un juego en forma extensiva en la Figura 5.1.

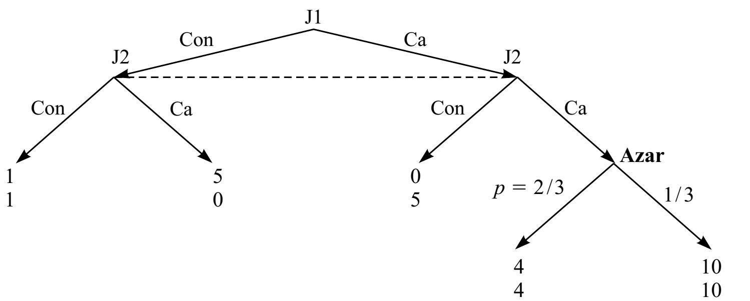


Figura 5.1 Inserción de una jugada de azar en un nodo terminal del dilema del prisionero.

Ahora bien, si ambos jugadores se conforman al paradigma de la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern, como estamos suponiendo (salvo que se diga lo contrario) a lo largo de todo el libro, en su análisis del juego ambos jugadores atribuirían al resultado de (*Callar*, *Callar*) unos pagos esperados de $6\left(= 10\,\frac{1}{3} + 4\,\frac{2}{3}\right)$ para cada uno, y aceptarían, a efectos de dicho análisis, que tras el desarrollo *Callar* → *Callar* queda un nodo terminal y un vector de pagos (6, 6). En consecuencia, el juego podría representarse en forma extensiva tal y como aparece en la Figura 5.2:

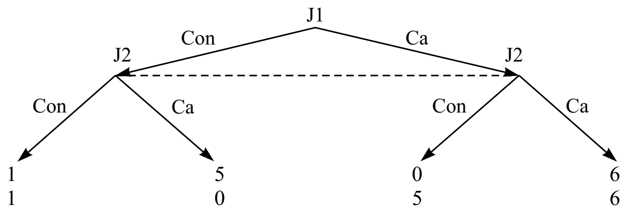


Figura 5.2 Representación equivalente con pagos esperados en el nodo terminal.

y en forma normal así:

Dilema del prisionero modificado

		Jugador 2	
		Callar	Confesar
Jugador 1	Callar	**6, 6**	0, 5
	Confesar	5, 0	1, 1

Este juego no ofrece ninguna dificultad para su análisis. Al igual que el juego estático de la batalla de los sexos, tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras, *(Confesar*, *Confesar)* y *(Callar*, *Callar)*, y uno en estrategias mixtas.

En conclusión, estas jugadas de azar no aportan nada nuevo a los tipos de juegos conocidos, pues ni alteran el análisis ni lo complican sustancialmente.

Jugadas de azar en un nodo de decisión no terminal

a) Resultado de las jugadas de azar desconocido por todos los jugadores

Ejemplo 5.2

Consideremos ahora el siguiente juego, que es una modificación del juego de la disuasión 1. Comienza ENTRON. Si juega *No entrar* se acaba el juego, y si juega *Entrar* le tocará el turno a INCUMBRON, que podrá *Competir duro* o *Competir suave*. Sin embargo, ahora supondremos que los pagos del juego también dependen de que se dé una circunstancia ajena a los jugadores (por ejemplo, que se produzca un conflicto que ambos saben que influiría fuertemente en la coyuntura económica) y que ellos no saben, en el momento de hacer el análisis del juego, si se va a dar o no. Esta situación puede modelizarse mediante una jugada de azar que preceda al desarrollo del juego, pero cuyo resultado ningún jugador conozca (también podría modelizarse con una jugada de azar tras cada desarrollo posible del juego, pero el análisis sería menos simple y daría, sin embargo, los mismos resultados). Concretando, supongamos que la jugada de azar tenga dos resultados equiprobables, F y D, interpretables como que se dan circunstancias favorables o desfavorables para la coyuntura económica, y que los pagos sean los indicados en la Figura 5.3.

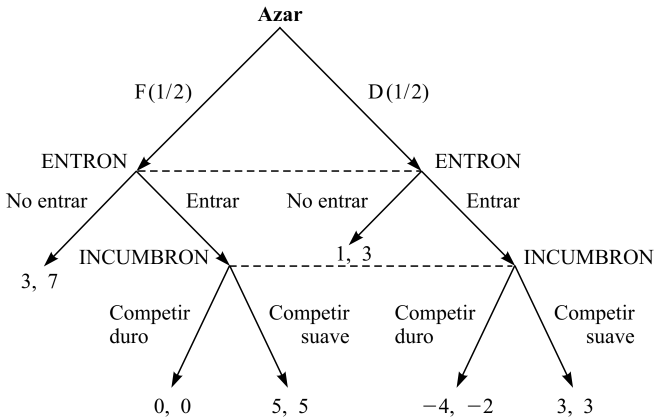


Figura 5.3 Inserción al inicio de una jugada de azar, con resultados desconocidos.

Por idénticas razones a las expresadas en el caso anterior, ambos jugadores harían su análisis en términos de pagos esperados. Por ejemplo, ambos saben que si ENTRON juega *No entrar* obtendrán un vector (2, 5) de pagos (esperados), ya que

$$2 = 3\,\frac{1}{2} + 1\,\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad 5 = 7\,\frac{1}{2} + 3\,\frac{1}{2}$$

Razonando análogamente en los otros casos, el juego podría representarse en forma extensiva así:

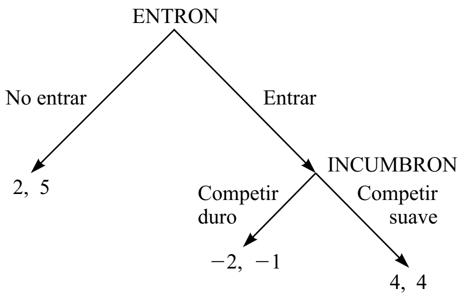


Figura 5.4 Representación equivalente con pagos esperados.

Al igual que en el ejemplo anterior, el juego resultante, en la Figura 5.4, no ofrece ninguna dificultad para su análisis. Como en el juego de disuasión 1, puede deducirse por inducción hacia atrás que el perfil (*Entrar*, *Competir suave*) es el único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

Puede concluirse que este tipo de jugadas de azar tampoco aporta nada nuevo al análisis de los tipos de juegos conocidos.

b) Resultado de las jugadas de azar conocido por todos los jugadores

Ejemplo 5.3

Consideremos ahora una pequeña variación en el juego anterior: todo es igual, salvo que ahora ambos jugadores observan, antes de decidir su jugada, el resultado de la jugada de azar. La representación en forma extensiva es:

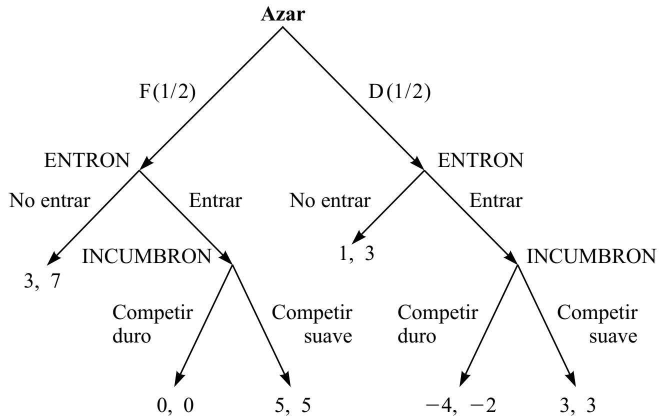


Figura 5.5 Inserción al inicio de una jugada de azar, con resultados conocidos por ambos.

Puesto que ahora cada jugador sabe exactamente, en el momento de jugar, en qué nodo se encuentra, este juego es de información completa y perfecta. Debido a ello, y al contrario que en el ejemplo anterior, en el análisis de equilibrios de este juego no son relevantes los pagos esperados, pues cada jugador tiene que actuar de manera óptima en cada nodo de decisión. Sí pueden serlo al calcular los pagos en equilibrio.

ENTRON tiene 4 estrategias puras, que son *No entrar-No entrar*, *No entrar-Entrar*, *Entrar-No entrar* y *Entrar-Entrar*, mientras que INCUMBRON tiene otras cuatro, que son *Competir duro-Competir duro*, *Competir duro-Competir suave*, *Competir suave-Competir duro* y *Competir suave-Competir suave*. El juego puede resolverse sin dificultad por inducción hacia atrás, que proporciona los siguientes resultados:

Único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos:

(*Entrar-Entrar*, *Competir suave-Competir suave*)

Único resultado perfecto en subjuegos si el resultado de la jugada de azar es F:

Entrar → *Competir suave*, con vector de pagos finales (5, 5)

Único resultado perfecto en subjuegos si el resultado de la jugada de azar es D:

Entrar → *Competir suave*, con vector de pagos finales (3, 3)

Único resultado perfecto en subjuegos a priori:

Entrar → *Competir suave*, con vector de pagos finales esperados (4, 4)

Merece la pena observar que en este ejemplo las estrategias de cada jugador han debido describirse como acciones que dependen de los resultados de la jugada de azar, es decir, como funciones (o mejor dicho, aplicaciones) que asignan a cada resultado de la jugada de azar una acción disponible de dicho jugador. Además, debido a que todos los jugadores conocen el resultado de la jugada de azar antes de tener que tomar decisiones, las estrategias y los equilibrios no dependen de la distribución de probabilidad de los resultados de la jugada de azar.

Puede concluirse también ahora que este tipo de jugadas de azar no aporta nada esencialmente nuevo al análisis de los tipos de juegos conocidos.

c) Resultado de las jugadas de azar conocido por algunos jugadores, pero no todos

Vamos a explorar, en dos ejemplos sencillos, uno estático y el otro dinámico, las consecuencias de esta especial asimetría en la información. En ellos, el resultado de la jugada de azar lo conoce un jugador, pero no el otro.

Ejemplo 5.4

Supongamos que la jugada de azar del Ejemplo 5.1, y que sólo afecta a los pagos del juego si ambos presos juegan *Callar*, tiene lugar al inicio del juego y sólo el jugador 1 observa su resultado, mientras que el jugador 2 sólo conoce las probabilidades que gobiernan dicha jugada (tras *Callar-Callar*, pagos de 4 con probabilidad 2/3 y pagos de 10 con probabilidad 1/3, en este caso). Ambos comparten el conocimiento de que el jugador 1 observará dicho resultado. La representación en forma extensiva de esta situación sería:

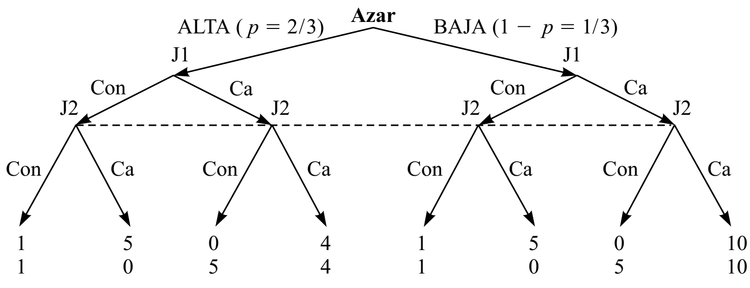


Figura 5.6 Inserción de azar, con resultado que sólo J1 conoce, en un caso estático.

donde se ha supuesto que la jugada de azar se materializa mediante el lanzamiento de un dado equilibrado, observando si ha salido una puntuación alta (que significa mayor que 2, lo que ocurre con probabilidad 2/3) o una puntuación baja (1 ó 2, lo que ocurre con probabilidad 1/3). Otro modo de describir la situación sería decir que se va a jugar un juego estático de dos jugadores, donde ambos tienen las acciones factibles *Confesar* y *Callar*, que ese juego va a ser o bien el dilema del prisionero, cuya forma normal es

		Jugador 2	
		Confesar	Callar
Jugador 1	Confesar	1, 1	5, 0
	Callar	0, 5	**4, 4**

o bien el juego cuya forma normal es

		Jugador 2	
		Confesar	Callar
Jugador 1	Confesar	1, 1	5, 0
	Callar	0, 5	**10, 10**

y, por último, que es de dominio público que el jugador 1 sabe qué juego están jugando, mientras que el jugador 2 sólo sabe que es el primer juego con probabilidad 2/3 y el segundo con probabilidad 1/3.

Este juego con jugada de azar previa es de naturaleza distinta a todos los que hemos analizado hasta ahora. Su naturaleza es estática en cuanto a que las acciones de los jugadores pueden considerarse simultáneas, pero la jugada inicial del azar, cuyo resultado unos observan y otros no (o lo que es lo mismo, la asimetría en la información disponible por los jugadores en el momento en que éstos juegan), le da al juego un carácter especial y nuevo. Se trata del primer ejemplo que nos encontramos de lo que llamaremos **juegos estáticos con información incompleta** o, más brevemente, **juegos bayesianos estáticos**, a cuyo estudio se dedica este capítulo.

Quizá merezca la pena explorar de manera intuitiva cuál sería la solución razonable de este juego, con el fin de preparar el análisis general que abordaremos en secciones posteriores. Puesto que J1 ha observado el resultado de la jugada de azar es lógico que este jugador considere decisiones que dependan del resultado observado. Dicho de otro modo, sus estrategias han de especificar una acción para cada resultado de la jugada de azar. En consecuencia, dispone de cuatro estrategias puras, que son *Confesar*-*Confesar*, *Confesar*-*Callar*, *Callar*-*Confesar* y *Callar*-*Callar*, siendo el significado de una cualquiera de ellas, por ejemplo *Confesar*-*Callar*, el siguiente: «Jugaré *Confesar* si la puntuación resultante de la jugada de azar es ALTA, y jugaré *Callar* si es BAJA». Por su parte, para J2, que no ha observado el resultado de la jugada de azar, sus estrategias han de ser incondicionales y reducirse a sus acciones. Por tanto, sólo dispone de dos estrategias puras, *Confesar* y *Callar*, y se ve obligado a razonar en términos de pagos esperados. La forma normal del juego que acabamos de especificar es la siguiente:

		Jugador 2	
		Confesar	Callar
Jugador 1	Confesar-Confesar	**1, 1**	5, 0
	Confesar-Callar	2/3, 7/3	20/3, 10/3
	Callar-Confesar	1/3, 11/3	13/3, 8/3
	Callar-Callar	0, 5	6, 6

donde los pagos que aparecen en la tabla son pagos esperados, correspondientes a la situación previa a cualquier acción de los jugadores o del azar. Como vemos, los únicos EN en estrategias puras son los perfiles (*Confesar-Confesar*, *Confesar*) y (*Confesar-Callar*, *Callar*).

Ejemplo 5.5

Consideremos ahora una variación en el juego del Ejemplo 5.3, de modo que todo sea igual, salvo que ahora sólo el jugador 1 (ENTRON) tiene conocimiento del resultado de la jugada de azar, mientras que el otro jugador (INCUMBRON) sólo conoce las probabilidades que gobiernan dicha jugada (resultados posibles F y D con probabilidad 1/2 cada uno, en este caso). Además, ambos jugadores saben que el jugador 1 tomará su decisión conociendo el resultado de la jugada de azar. La representación en forma extensiva es:

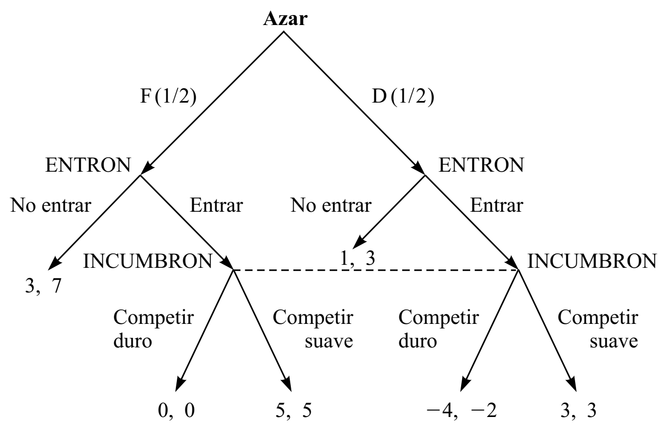


Figura 5.7 Inserción de azar, con resultado que sólo ENTRON conoce, en un caso dinámico.

Este juego también es de naturaleza especial. Estrictamente hablando, pertenece a la categoría de los juegos dinámicos con información completa e imperfecta, pero su análisis parece ser más difícil que los hechos hasta ahora. En efecto, la inducción hacia atrás no le es aplicable. Además, no tiene subjuegos propios, y por tanto todos sus EN son perfectos en subjuegos. En consecuencia, si hubiera EN no razonables, el criterio de la perfección en subjuegos no nos permitiría identificarlos. Al igual que el juego de cartas del Ejemplo 1.13 del Capítulo 1, se trata de un ejemplo de lo que llamaremos **juegos dinámicos con información incompleta** o, más brevemente, **juegos bayesianos dinámicos**, a cuyo estudio se dedicará el próximo capítulo. No intentaremos explorar de manera intuitiva cuál sería la solución razonable de este juego, pues en este caso es mucho más difícil.

Otros ejemplos introductorios

Ejemplo 5.6 Subasta simplificada

Dos licitantes acuden, para comprar un objeto (por ejemplo, una pieza de arte), a una subasta que tiene las siguientes reglas:

— Han de entregar en sobre cerrado su puja o licitación, que puede ser 0, 0,5 o 1.
— Se abren los sobres y se adjudica el objeto a aquel licitante que escribió una puja más alta. Si las pujas son iguales, se adjudica a uno de ellos al azar con probabilidad 1/2.
— El licitante a quien se adjudique el objeto ha de pagar la puja que hizo.

Supóngase que los pagos o ganancias del juego son los beneficios obtenidos, y que el primer licitante J1 tiene una valoración privada (cantidad máxima que estaría dispuesto a pagar por la pieza) de 0,5, que es de dominio público, mientras que el segundo, J2, tiene una de dos posibles valoraciones privadas, 0 o 1, que sólo él conoce, pero a las cuales los demás atribuyen probabilidades iguales.

Ejemplo 5.7 Otras subastas

Varios licitantes (los jugadores) acuden a una subasta para comprar un objeto. Han de entregar en sobre cerrado una puja, que ha de ser un número real cualquiera del intervalo [0, 1]. Cada licitante tiene una valoración del objeto que sólo él conoce, y que suponemos que también está en el intervalo [0,1], y todos los demás le asignan una distribución de probabilidad uniforme. Los pagos o ganancias del juego son los beneficios, y las reglas del juego son las siguientes:

Versión 1: Se abren los sobres, se adjudica el objeto a un licitante al azar (teniendo todos la misma probabilidad), y se le hace pagar a éste su propia puja.

Versión 2: Se abren los sobres y se adjudica el objeto a aquel licitante que escribió una puja más alta. Si hay varias (por ejemplo, h) pujas iguales que son las más altas, se adjudica el objeto a uno de estos h jugadores al azar, con probabilidad $1/h$ de que sea cualquiera de ellos. El licitante que resulte ganador paga una cantidad x entre 0 y 1, decidida al azar (de acuerdo con la distribución de probabilidad uniforme).

Ejemplo 5.8 Un juego sencillo de la verdad

Versión 1: Se lanza una moneda no sesgada dos veces. El jugador 1 observa el primer lanzamiento y el jugador 2 el segundo. A continuación ambos, simultáneamente, declaran cuál ha sido el resultado de su lanzamiento, Cara (C) o Cruz (X), aunque pueden mentir. Las ganancias, que dependen tanto de sus declaraciones como del hecho de que éstas se ajusten a la verdad, son las siguientes:

Ambos reciben un pago de 7 si los dos dicen la verdad, y un pago de 2 si los dos mienten. Si J1 miente y J2 dice la verdad, J1 recibe 0 y J2 recibe 4. Por último, si J2 miente y J1 dice la verdad, pueden darse dos casos:

Que ambos hayan obtenido CRUZ en su moneda, en cuyo caso J2 recibe 20 y J1 recibe 4.

Que alguno de ellos haya obtenido CARA, en cuyo caso J2 recibe 0 y J1 recibe 4.

Versión 2: Es como la versión 1, salvo que ahora, cuando el resultado de los dos primeros lanzamientos es CRUZ en ambos casos, se vuelve a lanzar dos veces la moneda, y estos últimos lanzamientos son los que cuentan de manera definitiva.

Teoría de la decisión bayesiana

La teoría de la decisión se ocupa de cómo un decisor debería elegir una acción concreta entre un conjunto de acciones posibles, cuando el resultado de su elección también depende del estado que alcance la naturaleza.

Los elementos que caracterizan un proceso de decisión son:

- El decisor, que es el agente que debe tomar la decisión y que trata de alcanzar unos objetivos.
- El conjunto A de acciones o alternativas disponibles para el decisor.
- El conjunto W de estados de la naturaleza (factores o variables no controladas por el decisor que definen el entorno del problema).
- Las consecuencias o resultados que se siguen de la elección de una alternativa y la presentación de un estado de la naturaleza.

Sea la función

$$u : A \times W \to \boldsymbol{R}$$
$$(a, w) \to u(a, w)$$

que asigna un número real (la consecuencia o resultado) a cada par formado por una alternativa y un estado de la naturaleza.

Según el grado de conocimiento del decisor acerca de los estados de la naturaleza cabe distinguir problemas de decisión en ambiente de certidumbre, riesgo o incertidumbre. Certidumbre corresponde al conocimiento perfecto del estado de la naturaleza que se va a presentar. En riesgo los estados de la naturaleza se consideran como las concreciones de una variable aleatoria de la que el decisor conoce su distribución de probabilidad. En incertidumbre el decisor no posee información que le permita asignar probabilidades a los estados de la naturaleza.

En este contexto, la teoría de la decisión bayesiana establece que el decisor siempre es capaz de asignar al conjunto de estados de la naturaleza W una distribución de probabilidad, que denominaremos a priori. Además, ese conocimiento previo del estado de la naturaleza puede ser mejorado con la incorporación de información adicional, que es proporcionada por una variable de naturaleza aleatoria. Cuando ese conocimiento adicional es incorporado, el decisor tendrá para el conjunto W una distribución de probabilidad rectificada, que denominaremos a posteriori.

Supongamos que la información adicional viene facilitada por una señal $t \in T$, y que se conoce la distribución de probabilidad conjunta $p(w, t)$, $\forall w \in W$ y $\forall t \in T$. La probabilidad a priori del estado de la naturaleza es igual a

$$p(w) = \sum_{t \in T} p(w, t)$$

Dada la señal $t \in T$, la probabilidad a posteriori del estado de la naturaleza $w \in W$ es igual a

$$p(w/t) = \frac{p(w,t)}{\text{prob}\,(t)} = \frac{p(w,t)}{\sum_{w \in W} p(w,\ t)}$$

Considerando como criterio de decisión la elección de la acción que maximiza la utilidad esperada, suponiendo que el decisor ha recibido la señal $t \in T$, y utiliza las probabilidades a posteriori, el decisor elegirá aquella acción $a = a(t)$, que resuelve el problema

$$\max_{a \in A} \sum_{w \in W} u(a, w)p(w/t)$$

Por tanto, para todo $t \in T$, tenemos la elección óptima $a(t)$. Podemos definir la regla de decisión

$$\begin{aligned} a : T &\to A \\ t &\to a(t) \end{aligned}$$

que asigna a cada señal $t \in T$ la acción que maximiza la utilidad esperada en los términos considerados anteriormente. Para profundizar en el estudio de la teoría de la decisión, puede consultarse el libro de García, Martínez, Redondo y del Campo (2002).

El siguiente ejemplo permitirá ilustrar esa situación.

Ejemplo 5.9 Un juego contra la banca

a) En un casino Aníbal ha decidido participar en el siguiente juego contra la banca: va a recibir, pero sin verla, una carta al azar de una baraja española (40 cartas. Cuatro palos —oros, copas, espadas y bastos— con 10 cartas cada uno, que son as, dos, tres, ..., siete, y las figuras sota, caballo y rey). La banca le facilitará una pista o señal acerca de la identidad de la carta, y le dará la opción de seguir o retirarse. Si sigue habrá de pagar 100 euros, pero recibirá 500 euros si es un rey, y sólo en ese caso. Si se retira no pagará ni recibirá nada.

1. ¿Cuál es su acción óptima si la pista consiste en decirle si la carta es o no es una figura?

2. ¿Cuál es su acción óptima si la pista consiste en decirle cuál es el palo de la carta?

b) Ahora recibe, sin verlas, dos cartas al azar (sin reemplazamiento) de una baraja española. La banca le facilitará una pista o señal acerca de la identidad de dichas cartas, y le dará la opción de seguir o retirarse. Si sigue habrá de pagar 100 euros, pero recibirá 5.000 euros si tiene dos reyes, y sólo en ese caso. Si se retira no pagará ni recibirá nada.

¿Cuál es su acción óptima si la pista consiste en decirle si alguna de las cartas es una figura, o ninguna lo es?

En el apartado (a), las acciones de A son *Seguir* y *Retirarse*, los valores posibles de la variable de estado w son las 40 cartas de la baraja, y los valores posibles de la señal t son «Figura» y «No Figura» en el caso 1, y son «Oro», «Copa», «Espada» y «Basto» en el caso 2. La función de consecuencias o resultados es:

$$u(a, w) =$$

$$= \begin{cases} -100, & \text{si } a = \textit{Seguir} \text{ y } w \text{ es cualquiera de las 36 cartas que no es un rey.} \\ 400, & \text{si } a = \textit{Seguir} \text{ y } w \text{ es cualquiera de los cuatro reyes.} \\ 0, & \text{si } a = \textit{Retirarse}. \end{cases}$$

y la distribución de probabilidad conjunta de w (estado) y t (señal), $p(w, t)$ viene dada en el caso 1 por la Tabla 5.1.

De la Tabla 5.1 se deducen las siguientes probabilidades condicionadas del caso 1 que se van a utilizar en el cálculo de los valores esperados de la función de consecuencias:

$$p(\text{Rey/«Figura»}) = 1/3; \qquad p(\text{No Rey/«Figura»}) = 2/3;$$

$$p(\text{Rey/«No Figura»}) = 0; \qquad p(\text{No Rey/«No Figura»}) = 1.$$

En el caso 2, las probabilidades condicionadas son (como se ve, iguales a las probabilidades a priori, es decir, las de la distribución marginal, ya que las variables aleatorias señal y estado son independientes, pues todos los palos de la baraja tienen un único rey):

$$p(\text{Rey/«Oro»}) = p(\text{Rey}) = 1/10; \qquad p(\text{No Rey/«Oro»}) = p(\text{No Rey}) = 9/10;$$

$$p(\text{Rey/«Copa»}) = p(\text{Rey}) = 1/10; \qquad p(\text{No Rey/«Copa»}) = p(\text{No Rey}) = 9/10;$$

$$p(\text{Rey/«Espada»}) = p(\text{Rey}) = 1/10; \qquad p(\text{No Rey/«Espada»}) = p(\text{No Rey}) = 9/10;$$

$$p(\text{Rey/«Basto»}) = p(\text{Rey}) = 1/10; \qquad p(\text{No Rey/«Basto»}) = p(\text{No Rey}) = 9/10.$$

Ya estamos en condiciones de averiguar las acciones óptimas.

En el caso 1, tenemos:

- Supuesto que la señal sea «Figura», la función objetivo es:

Si sigue,

$$U_A(\textit{Seguir}) = u(\textit{Seguir}, w \text{ es un Rey}) \cdot p(\text{Rey/«Figura»}) +$$

$$+ u(\textit{Seguir}, w \text{ no es un Rey}) \cdot p(\text{No Rey/«Figura»}) = 400 \cdot (1/3) - 100 \cdot (2/3) = 200/3$$

Tabla 5.1

			Distribución marginal de w (Probabilidad a priori)
	t = «Figura»	t = «No Figura»	$p(w) = \sum_{t \in T} p(w, t)$
w = As de Oros	0	1/40	1/40
w = Dos de Oros	0	1/40	1/40
…	…	…	…
w = Sota de Oros	1/40	0	1/40
w = Caballo de Oros	1/40	0	1/40
w = Rey de Oros	1/40	0	1/40
…	…	…	…
Copas	…	…	…
…	…	…	…
Espadas	…	…	…
…	…	…	…
w = As de Bastos	0	1/40	1/40
w = Dos de Bastos	0	1/40	1/40
…	…	…	…
w = Sota de Bastos	1/40	0	1/40
w = Caballo de Bastos	1/40	0	1/40
w = Rey de Bastos	1/40	0	1/40
Suma	12/40	28/40	1

Si se retira,

$$U_A(Retirarse) = 0$$

Por tanto, si la señal es «Figura», la acción óptima es *Seguir*.

- Supuesto que la señal sea «No Figura», la función objetivo es:
Si sigue,

$$U_A(Seguir) = u(Seguir, w \text{ es un Rey}) \cdot p(\text{Rey}/\text{«No Figura»}) +$$
$$+ u(Seguir, w \text{ no es un Rey}) \cdot p(\text{No Rey}/\text{«No Figura»}) = 400 \cdot (0) - 100 \cdot (1) = -100$$

Si se retira,

$$U_A(Retirarse) = 0$$

Por tanto, si la señal es «No Figura», la acción óptima es *Retirarse*.

Es decir, la regla de decisión óptima en el caso 1 es

$$\begin{cases} Seguir, & \text{si la señal es «Figura»} \\ Retirarse, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

En el caso 2, tenemos:

- Supuesto que la señal sea «Oro», la función objetivo es:

Si sigue,

$$U_A(Seguir) = u(Seguir, w \text{ es un Rey}) \cdot p(\text{Rey/«Oro»}) +$$

$$+ u(Seguir, w \text{ no es un Rey}) \cdot p(\text{No Rey/«Oro»}) = 400 \cdot (1/10) - 100 \cdot (9/10) = -50$$

Si se retira,

$$U_A(Retirarse) = 0$$

Por tanto, si la señal es «Oro», la acción óptima es *Retirarse*.

Obsérvese que en este caso, cuál sea la señal no hace en este caso ni más ni menos probable que se trate de un rey, ya que señal y estado son variables aleatorias independientes. En consecuencia, la acción óptima es *Retirarse*, sea cual sea la señal.

En conclusión, la regla de decisión óptima en el caso 1 es una regla dependiente de la señal (*Seguir* si la señal es «Figura», y *Retirarse* en caso contrario), mientras que en el caso 2 es una regla constante e independiente de la señal (*Retirarse* sea cual sea ésta).

En el apartado (b), las acciones de A son igualmente *Seguir* y *Retirarse* y los valores posibles de la variable de estado w son las $(40 \times 39)/2 = 780$ combinaciones $w_1 w_2$ de cartas de la baraja. (Obsérvese que de esas 780 combinaciones sólo hay $(4 \times 3)/2 = 6$ en que ambas son reyes y $780 - (28 \times 27)/2 = 402$ en que alguna es una figura.) Los valores posibles de la señal t son «Alguna» y «Ninguna». La función de consecuencias es:

$$u(a, w) =$$

$$\begin{cases} -100, & \text{si } a = Seguir \text{ y } w \text{ es cualquiera de las } 780 - 6 \text{ combinaciones } w_1 w_2 \\ & \quad \text{en que alguna no es un rey.} \\ 4.900, & \text{si } a = Seguir \text{ y } w \text{ es cualquiera de las 6 parejas de reyes.} \\ 0, & \text{si } a = Retirarse. \end{cases}$$

y las probabilidades condicionadas relevantes son:

$p(\text{Dos Reyes/«Alguna»}) = 6/402 = 1/67$; $p(\text{No hay Dos Reyes/«Alguna»}) = 66/67$;

$p(\text{Dos Reyes/«Ninguna»}) = 0$; $p(\text{No hay Dos Reyes/«Ninguna»}) = 1$

Veamos cuáles son las acciones óptimas.

- Supuesto que la señal sea «Alguna», la función objetivo es:

Si sigue,

$$U_A(Seguir) = u(Seguir,\, w \text{ tiene dos Reyes}) \cdot p(\text{Dos Reyes/«Alguna»}) +$$
$$+\ u(Seguir,\, w \text{ no tiene dos Reyes}) \cdot p(\text{No hay Dos Reyes/«Alguna»}) =$$
$$= 4.900 \cdot (1/67) - 100 \cdot (66/67) = -1.700/67$$

Si se retira,

$$U_A(Retirarse) = 0$$

Por tanto, si la señal es «Alguna», la acción óptima es *Retirarse*.

- Supuesto que la señal sea «Ninguna», la función objetivo es:

Si sigue,

$$U_A(Seguir) = u(Seguir,\, w \text{ tiene dos Reyes}) \cdot p(\text{Dos Reyes/«Ninguna»}) +$$
$$+\ u(Seguir,\, w \text{ no tiene dos Reyes}) \cdot p(\text{No hay Dos Reyes/«Ninguna»}) =$$
$$= 4.900 \cdot (0) - 100 \cdot (1) = -100$$

Si se retira,

$$U_A(Retirarse) = 0$$

Por tanto, si la señal es «Ninguna», la acción óptima también es *Retirarse*.

En conclusión, la regla de decisión óptima es una regla constante e independiente de la señal, que prescribe retirarse sea cual sea ésta.

5.2. JUEGOS BAYESIANOS ESTÁTICOS. EQUILIBRIO BAYESIANO DE NASH

En esta sección se introducirá la terminología básica y se abordará el concepto más importante, el equilibrio bayesiano.

Los juegos bayesianos estáticos se proponen modelizar aquellas situaciones de naturaleza estática en que cada jugador i tiene un conjunto de acciones disponibles A_i, pero además algunos o todos los jugadores disponen de alguna información privada, y las preferencias (o sea, los pagos finales) de cada jugador dependen, no sólo de las acciones decididas por todos los jugadores, sino también de la información privada de los jugadores. Un ejemplo típico es el de un mercado en el que las empresas sólo conocen su estructura de costes y estiman, pero sin conocerlos con certeza, los costes de sus competidoras.

Cabría pensar que, en el intento de analizar y resolver los juegos bayesianos, la existencia de dichas informaciones privadas va a obligar a tener en cuenta las suposiciones que cada jugador hace acerca de los pagos o ganancias de los demás jugadores, los cuales a su vez dependen de las suposiciones que los demás hagan acerca de la información privada y de los pagos de este jugador, y así sucesivamente. Sin embargo, todo se simplifica con el procedimiento de Harsanyi, según el cual la modelización se realiza suponiendo que el azar es un jugador ficticio que realiza antes del comienzo del juego una jugada que atribuye a cada jugador su información privada, de modo que sólo dicho jugador conoce la que se le ha asignado a él, y cada jugador tiene una creencia (expresada por medio de una suposición o conjetura probabilística) acerca de cuáles son las informaciones privadas de los otros. Habitualmente, se supone que es de dominio público que los resultados de la jugada de azar siguen una distribución de probabilidad, llamada probabilidad a priori, a la cual se conforman todas las suposiciones o conjeturas. La información privada efectiva de un jugador i se denomina el tipo de dicho jugador, se denota t_i y se supone perteneciente a un conjunto T_i que engloba todos los tipos posibles que tienen relevancia para el problema que se está modelizando.

Observación 5.1:

Podría parecer que no tienen cabida en este esquema aquellos casos en que la información privada del jugador i no se refiera a sus pagos, sino a otros elementos del juego, como quiénes son los jugadores o cuáles son las acciones factibles de i. Sin embargo, una redefinición apropiada del juego global (jugadores, acciones y pagos) puede permitir en muchas ocasiones dar cabida a dichos casos, modelizándolos como juegos bayesianos. No obstante, también puede darse el caso de que existan algunas situaciones de información genuinamente incompleta que no admitan esta modelización como juegos bayesianos. A pesar de esta salvedad, en lo que sigue identificaremos juegos estáticos de información incompleta con juegos bayesianos.

Naturalmente, si el desconocimiento de los otros jugadores con respecto a la información privada de i fuese absoluto, poco podrían avanzar los razonamientos de cada jugador referentes a las respuestas óptimas de los demás y, en consecuencia, poco podría avanzarse en el análisis de la solución del juego. Por ello, es preciso suponer que los demás jugadores saben de qué naturaleza es la información privada de i, y qué valores o concreciones, y con qué probabilidades, podría adoptar dicha información. A continuación se especifican de manera precisa, por medio de los conceptos de tipo y de conjetura, esas suposiciones.

Tipos, conjeturas y pagos. Estrategias. Ejemplos

Si en un juego estático con información completa, la representación en forma normal exigía concretar el número n de jugadores, las acciones A_i disponibles y los pagos $u_i(a_1, ..., a_i, ..., a_n)$ para cada jugador i, y además, la estructura temporal del juego suponía que los jugadores tomaban simultáneamente sus decisiones y a continuación recibían los pagos, en un juego bayesiano hay que añadir varios elementos y ampliar la descripción, tal como hace la siguiente definición.

Definición 5.1

En un juego **bayesiano** estático, cada jugador i tiene, además de acciones A_i y pagos u_i, un conjunto de **tipos** T_i y una suposición o **conjetura** p_i sobre el tipo de los otros jugadores. En general, suponemos que cada tipo t_i es una variable aleatoria, que la distribución de probabilidad conjunta de los tipos viene dada por la función $p(t_1, ..., t_i, ..., t_n)$ y que la conjetura p_i es una probabilidad condicionada, denotada $p_i(t_{-i}/t_i)$, que depende de cuál sea el tipo efectivo t_i del jugador i. Por último, la función de pagos de cada jugador depende de las acciones decididas y de los tipos efectivos de todos los jugadores, denotándose

$$u_i(a_1, ..., a_i, ..., a_n; t_1, ..., t_i, ..., t_n)$$

Resumiendo:

$$G_B = \{J; A_1, A_2, ..., A_n; T_1, T_2, ..., T_n; p_1, p_2, ..., p_n; u_1, u_2, ..., u_n\}$$

donde $J = \{1, ..., n\}$.

La estructura temporal del juego es:

a) El azar determina un vector de tipos $\boldsymbol{t} = (t_1, ..., t_i, ..., t_n)$, donde t_i pertenece a T_i, de acuerdo con una probabilidad a priori $p(\boldsymbol{t})$, que es de dominio público.

b) El jugador i, y ningún otro, observa su tipo efectivo t_i, y se forma una conjetura $p_i(\boldsymbol{t}_{-i}/t_i)$ a partir del tipo efectivo y la distribución a priori.

c) Los jugadores toman simultáneamente sus decisiones (el jugador i elige a_i).

d) Reciben los pagos. Cada jugador i recibe $u_i(a_1, ..., a_i, ..., a_n; t_1, ..., t_i, ..., t_n)$.

Observación 5.2:

1. Es cómodo abreviar el vector $(t_1, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, ...,t_n)$, constituido por los tipos de los jugadores distintos de i, mediante $\boldsymbol{t}_{-i}$, y el vector $(t_1, ..., t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, ..., t_n)$ de todos los tipos, mediante $(\boldsymbol{t}_{-i}, t_i)$ o mediante $\boldsymbol{t}$.

2. Tal como se indica en la definición, estamos suponiendo que los jugadores se forman conjeturas consistentes, es decir, condicionadas a sus propios tipos efectivos, pero sobre una misma distribución de probabilidad a priori $p(\boldsymbol{t})$.

3. Si T_i, conjunto de tipos de i, es unitario, la única distribución de probabilidad posible sobre este conjunto es la trivial que especifica que su único elemento tiene probabilidad 1. En ese caso, todos los jugadores conocen el tipo de i, que es el único elemento de T_i. Por tanto, la manera de modelizar el hecho de que un jugador i no tenga ninguna información privada consiste en asignarle un conjunto de tipos T_i unitario.

Conocido su tipo t_i, la conjetura del jugador i sobre los tipos

$$\boldsymbol{t}_{-i} = (t_1, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, ..., t_n)$$

de los demás jugadores es $p_i(\boldsymbol{t}_{-i}/t_i)$, y puede calcularse mediante la regla de Bayes, según la cual

$$p_i(\boldsymbol{t}_{-i}/t_i) = \frac{p(\boldsymbol{t}_{-i},\ t_i)}{p(t_i)} = \frac{p(\boldsymbol{t}_{-i},\ t_i)}{\sum\limits_{\boldsymbol{t}_{-i} \in \boldsymbol{T}_{-i}} p(\boldsymbol{t}_{-i},\ t_i)}$$

Son de dominio público las distintas conjeturas que podría formarse i. A menudo se supondrá que los tipos son independientes, es decir,

$$p(\boldsymbol{t}_{-i}, t_i) = p(\boldsymbol{t}_{-i}) \cdot p(t_i) = \prod_{i=1}^{n} p(t_i)$$

En ese caso, $p(\boldsymbol{t}_{-i}/t_i) = p(\boldsymbol{t}_{-i})$ para todo t_i, y la conjetura de i sobre los tipos de los demás jugadores es de dominio público.

Definición 5.2

En un juego bayesiano estático,

$$G_B = \{U;\, A_1, A_2, ..., A_n;\, T_1, T_2, ..., T_n;\, p_1, p_2, ..., p_n;\, u_1, u_2, ..., u_n\}$$

una **estrategia pura** del jugador i es una regla de decisión que especifica una acción de A_i por cada tipo de T_i, es decir, una aplicación s_i de T_i en A_i que a cada tipo t_i le asigna una acción $s_i(t_i)$.

Observación 5.3:

A veces, resulta esclarecedor considerar que los distintos tipos de un jugador son jugadores que actúan como agentes de éste. Todos tienen el mismo conjunto A_i de acciones. Sus conjeturas son en general distintas, ya que tienen la forma $p_i(\boldsymbol{t}_{-i}/t_i)$, pero proceden de la distribución a priori $p(\boldsymbol{t}_{-i}, t_i)$, y coinciden cuando los tipos son independientes. Así, el nuevo conjunto de jugadores es

$$J' = \{(i, t_i)/\text{donde } i \text{ está en } J, \text{ y } t_i \text{ está en } T_i\},$$

el conjunto de acciones de (i, t_i) es $A'(i, t_i) = A_i$, y cada perfil de acciones es un vector $(\{a'(i, t_i)\}_{(i,t_i)\in J})$ en la que la componente $a'(i, t_i)$ pertenece a A_i.

Los pagos en una realización del juego son iguales para todos estos agentes.

Este modo de representar el juego se llama **representación tipo-agente**. En ella, una estrategia pura es simplemente una acción. Así queda claro que una estrategia de un jugador de la representación normal es equivalente a un vector de acciones, con una acción por cada uno de los tipos-agentes.

En los ejemplos siguientes, identificaremos, para cada jugador, sus espacios de acciones y de tipos, y sus estrategias puras.

Ejemplo 5.10

En el juego del Ejemplo 5.4, los conjuntos que describen las acciones, tipos y estrategias, así como las conjeturas y pagos, son:

Jugadores:	$J = \{1, 2\}$. Llamemos Ji al jugador i.
Acciones:	$A_1 = A_2 = \{$*Confesar*, *Callar*$\}$
Tipos:	$T_1 = \{\text{ALTA, BAJA}\}$
	$T_2 = \{\text{ÚNICO}\}$

(hemos modelizado el hecho de que J2 no tiene ninguna información privada, haciendo que T_2 sea unitario).

Probabilidad a priori: $p(\text{ALTA}) = 2/3$, $p(\text{BAJA}) = 1/3$
Conjeturas de J1: $p_1(\text{ÚNICO/ALTA}) = p_1(\text{ÚNICO/BAJA}) = 1$
Conjeturas de J2: $p_2(\text{ALTA/ÚNICO}) = p(\text{ALTA}) = p = 2/3$
$p_2(\text{BAJA/ÚNICO}) = p(\text{BAJA}) = 1 - p = 1/3$

Pagos o ganancias:
Si $(x, y) \neq (\textit{Callar}, \textit{Callar})$

$$u_1(x, y; \text{ALTA}) = u_1(x, y; \text{BAJA}) = u_{1(\text{DP})}(x, y)$$

$$u_2(x, y; \text{ALTA}) = u_2(x, y; \text{BAJA}) = u_{2(\text{DP})}(x, y)$$

(donde $u_{i(\text{DP})}(x, y)$ significa el pago que en el dilema del prisionero recibe el jugador i tras jugarse el perfil (x, y)).
Si $(x, y) = (\textit{Callar}, \textit{Callar})$

$$u_1(x, y; \text{ALTA}) = 4; \quad u_1(x, y; \text{BAJA}) = 10$$

$$u_2(x, y; \text{ALTA}) = 4; \quad u_2(x, y; \text{BAJA}) = 10$$

Estrategias de J1 (aplicaciones de T_1 a A_1):

$$S_1 = \{\textit{Confesar-Confesar}, \textit{Confesar-Callar}, \textit{Callar-Confesar}, \textit{Callar-Callar}\}$$

Estrategias de J2 (aplicaciones de T_2 a A_2):

$$S_2 = \{\textit{Confesar}, \textit{Callar}\}$$

Ejemplo 5.11

En el juego subasta simplificada del Ejemplo 5.6, los conjuntos que describen las acciones, tipos y estrategias, así como las conjeturas y pagos, son:

Jugadores: $J = \{1, 2\}$. Llamemos Ji al jugador i
Acciones: $A_1 = A_2 = \{0, 0{,}5, 1\}$ denotadas a_i
Tipos: $T_1 = \{0{,}5\}$ $T_2 = \{0, 1\}$ denotados v_i

Probabilidad a priori: $p(v_2 = 0) = p(v_2 = 1) = 1/2$ y $p(v_1 = 0{,}5) = 1$
Conjetura de J1: $p_1(0/0{,}5) = \text{prob}\,(v_2 = 0/v_1 = 0{,}5) = p(v_2 = 0) = 1/2$
$p_1(1/0{,}5) = \text{prob}\,(v_2 = 1/v_1 = 0{,}5) = p(v_2 = 1) = 1/2$
Conjetura de J2: $p_2(0{,}5/0) = \text{prob}\,(v_1 = 0{,}5/v_2 = 0) = p(v_1 = 0{,}5) = 1$
$p_2(0{,}5/1) = \text{prob}\,(v_1 = 0{,}5/v_2 = 1) = p(v_1 = 0{,}5) = 1$

(es decir, J2 conjetura que el tipo de J1 es con seguridad, e independientemente de cuál sea el tipo de J2, igual a 0,5).

Pagos:

$$u_1(a_1, a_2; v_1, v_2) = \begin{cases} v_1 - a_1 & \text{si} \quad a_1 > a_2 \\ 0 & \text{si} \quad a_1 < a_2 \\ \dfrac{v_1 - a_1}{2} & \text{si} \quad a_1 = a_2 \end{cases}$$

$$u_2(a_1, a_2; v_1, v_2) = \begin{cases} v_2 - a_2 & \text{si} \quad a_2 > a_1 \\ 0 & \text{si} \quad a_2 < a_1 \\ \dfrac{v_2 - a_2}{2} & \text{si} \quad a_2 = a_1 \end{cases}$$

Estrategias de J1: Sus acciones, es decir, $S_1 = A_1 = \{0, 0{,}5, 1\}$.
Estrategias de J2: Vectores (x_1, x_2), que significan «Pujo x_1 si mi tipo es 0, y pujo x_2 si mi tipo es 1». Es decir, $S_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in A_2 \text{ y } x_2 \in A_2\}$.

Ejemplo 5.12

En la subasta de la versión 1 del Ejemplo 5.7 tenemos:

Jugadores: $J = \{1, 2, ..., n\}$. Llamemos Ji al jugador i
Acciones: $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = [0, 1]$ denotadas a_i
Tipos: $T_1 = T_2 = \cdots = T_n = [0, 1]$ denotados v_i

Distribución de probabilidad a priori: $p(v_j < v) = v$

(Por tener la valoración de cada jugador una distribución uniforme en [0, 1], la probabilidad de que dicha valoración sea inferior a un valor $v \in [0, 1]$ es precisamente v.)

Conjetura de Ji: $p_i(v_j < v/v_i) = \text{prob}\,(v_j < v) = v, \forall Ji \in N, \forall v_i, v_j, v \in [0, 1]$.

(Por ser independientes las valoraciones de los distintos jugadores.)

Pagos de Ji: $u_i(a_1, ..., a_i, ..., a_n; v_1, ..., v_n) = \dfrac{v_i - a_i}{n}$

(El pago que Ji obtendría si fuese adjudicatario, $v_i - a_i$, hay que multiplicarlo por $1/n$, que es la probabilidad de resultar adjudicatario.)

Estrategias de Ji: Aplicaciones de [0, 1] en [0, 1].

Equilibrio bayesiano de Nash. Definición y cálculo

El concepto de juego bayesiano estático que estamos analizando constituye una extensión del concepto de juego estático simple estudiado en el Capítulo 2, y al mismo tiempo, en virtud de su modelización mediante la introducción de una jugada de azar inicial, constituye un caso particular del concepto de juego dinámico con información imperfecta.

Por tanto, necesitamos elaborar un concepto de equilibrio apropiado para este nuevo contexto bayesiano, pero coherente con los conceptos de equilibrio ya estudiados para los contextos estático y dinámico. En particular, es preciso que el nuevo concepto de equilibrio, que se llamará Equilibrio bayesiano, sea un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (en coherencia con los aspectos dinámicos de este contexto bayesiano) y se reduzca al habitual equilibrio de Nash en el caso extremo en que la información privada se reduzca a la nada. Precisamente eso es lo que ocurre con el concepto de equilibrio que se define a continuación.

Definición 5.3

En el juego bayesiano estático

$$G_B = \{J; A_1, A_2, ..., A_n; T_1, T_2, ..., T_n; p_1, p_2, ..., p_n; u_1, u_2, ..., u_n\}$$

dado el perfil estratégico $\boldsymbol{s^*} = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*)$.

a) Decimos que la estrategia s_i^* es una respuesta óptima esperada del jugador i a la combinación $\boldsymbol{s^*_{-i}} = (s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, ..., s_n)$ de estrategias de los demás jugadores, si para cada uno de sus tipos $t_i \in T_i$, $s_i^*(t_i)$ es una solución del problema

$$\max_{a_i \in A_i} \sum_{\boldsymbol{t}_{-i} \in \boldsymbol{T}_{-i}} p_i(\boldsymbol{t}_{-i}/t_i) u_i(s_i^*(t_1), ..., s_{i-1}^*(t_{i-1}), a_i, s_{i+1}^*(t_{i+1}), ..., s_n^*(t_n); t_1, ..., t_n)$$

en la variable de decisión a_i.

b) Decimos que el perfil $\boldsymbol{s^*} = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*)$ es un **Equilibrio Bayesiano de Nash** (EB) en estrategias puras si para cada jugador i la estrategia s_i^* es una respuesta óptima esperada a la combinación $\boldsymbol{s^*_{-i}} = (s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, ..., s_n)$.

Es decir, cada tipo del jugador i maximiza su pago esperado jugando $s_i^*(t_i)$, o dicho aún de otro modo, «dado un jugador cualquiera i, y un tipo t_i cualquiera de éste, la estrategia s_i^* especificada para este jugador en el perfil $\boldsymbol{s^*}$, ha de asignar a ese tipo una acción $s_i^*(t_i)$ que sea respuesta óptima, en términos esperados, al conjunto de combinaciones de acciones asignadas a los tipos posibles de los otros jugadores por sus respectivas estrategias en $\boldsymbol{s^*}$».

En definitiva, tenemos aquí un problema de decisión bayesiana donde, para cada jugador, la señal que recibe es su propio tipo (los estados de la naturaleza son los tipos posibles de todos los jugadores, para los que hay una probabilidad a priori) y el conocimiento de su señal le permite a cada jugador calcular las probabilidades a posteriori de los tipos de los demás jugadores y maximizar, dadas las reglas de decisión de los demás, su utilidad esperada.

Cálculo del EB en los ejemplos anteriores

Vamos a calcular los EB de los ejemplos anteriores, y lo haremos de manera progresiva desde un punto de vista didáctico, de modo que en los primeros casos haremos una aproximación intuitiva, mientras que en los últimos haremos uso de manera literal y completa de la Definición 5.3.

Ejemplo 5.13

Sea el juego del Ejemplo 5.4, cuya representación en forma extensiva repetimos a continuación

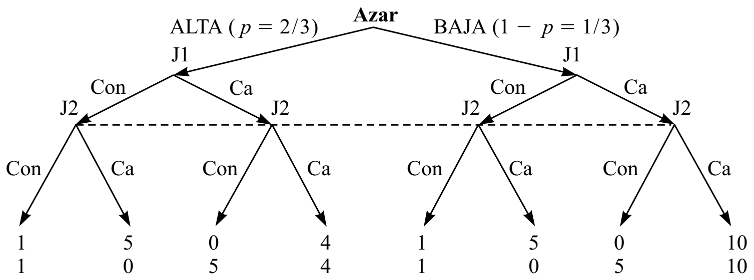


Figura 5.8 Juego bayesiano del Ejemplo 5.4.

y cuyas características (acciones, tipos, estrategias y conjeturas) se han analizado en el Ejemplo 5.10, y pueden resumirse así:

Acciones: $A_1 = A_2 = \{Confesar, Callar\}$
Tipos: $T_1 = \{\text{ALTA, BAJA}\}$ $T_2 = \{\text{ÚNICO}\}$
Probabilidad a priori: $p(\text{ALTA}) = 2/3$, $p(\text{BAJA}) = 1/3$
Estrategias de J1: $S_1 = \{$*Confesar-Confesar*, *Confesar-Callar*, *Callar-Confesar*, *Callar-Callar*$\}$
Estrategias de J2: $S_2 = \{$*Confesar*, *Callar*$\}$

Sea $\boldsymbol{s}^* = (s_1^*, s_2^*)$ un perfil de equilibrio. Analicemos las consecuencias basándonos en la Figura 5.8.

Supongamos que la estrategia s_2^* de J_2 en dicho perfil es *Confesar*. En ese caso la respuesta óptima de J1, en caso de que su tipo sea ALTA, es *Confesar* (pues el pago obtenido es 1 en lugar de 0), y en caso de que su tipo sea BAJA, es también *Confesar* (pues el pago obtenido es 1 en lugar de 0). Por tanto, la estrategia de respuesta óptima de J1 sería s_1^* = *Confesar-Confesar*. Por otra parte la respuesta óptima de J2 a la estrategia s_1^* = *Confesar-Confesar* es *Confesar* (pues le produce un pago esperado de 1, mientras que *Callar* le produciría 0). Así pues, hemos identificado un EB, el perfil (*Confesar-Confesar*, *Confesar*).

Supongamos ahora que la estrategia s_2^* de J2 en $\boldsymbol{s}^*$ es *Callar*. En ese caso la respuesta óptima de J1, en caso de que su tipo sea ALTA, es *Confesar* (pues el pago obtenido es 5 en lugar de 4), pero en caso de que su tipo sea BAJA, sería *Callar* (pues el pago obtenido es 10 en lugar de 5). Por tanto, la estrategia de respuesta óptima de J1 sería s_1^* = *Confesar-Callar*. Por otra parte la respuesta óptima de J2 a la estrategia s_1^* = *Confesar-Callar* es *Callar* (pues le produce un pago esperado de $10/3 = (2/3)(0) + (1/3)(10)$, mientras que *Confesar* le produciría $7/3 = (2/3)(1) + (1/3)(5)$). Así pues, hemos identificado un segundo EB, el perfil (*Confesar-Callar*, *Callar*).

En conclusión, el conjunto de los equilibrios bayesianos en estrategias puras es:

EB = {(*Confesar-Confesar*, *Confesar*), (*Confesar-Callar*, *Callar*)}

Ejemplo 5.14

Consideremos la subasta de la versión 1 del Ejemplo 5.7, cuyas características se han analizado en el Ejemplo 5.12, y que en resumen son:

Acciones: $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = [0, 1]$ (denotadas a_i)
Tipos: $T_1 = T_2 = \cdots = T_n = [0, 1]$ (denotados v_i)

Distribución de probabilidad a priori: $\text{prob}\,(v_j < v) = v$

Pagos de Ji: $u_i(a_1, ..., a_i , ..., a_n; v_1, ...,v_n) = \dfrac{v_i - a_i}{n}$

Sea $\boldsymbol{s}^* = (s_1^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ un perfil de equilibrio. Puesto que el objeto se adjudica al azar, dado un jugador cualquiera i, y un tipo cualquiera de éste v_i, la acción a_i que más le conviene es pujar el mínimo, es decir, $a_i = 0$, puesto que su acción o puja no afecta a la probabilidad de que le adjudiquen el objeto, y sí a su beneficio final. Por tanto, $s_i^*(v_i) = 0$.

En conclusión, el único equilibrio bayesiano es $\boldsymbol{s}^* = (s_1^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ donde la estrategia de cualquier jugador i consiste en pujar cero sea cual sea su tipo ($s_i^*(v_i) = 0$, $\forall v_i$).

Ejemplo 5.15

Consideremos la subasta simplificada del Ejemplo 5.6, cuyas características se han analizado en el Ejemplo 5.11, y que en resumen son:

Acciones: $A_1 = A_2 = \{0, 0{,}5, 1\}$ (denotadas a_i)
Tipos: $T_1 = \{0{,}5\}$ $T_2 = \{0, 1\}$ (denotados v_i)

Probabilidad a priori: $p(v_2 = 0) = p(v_2 = 1) = 1/2$ y $p(v_1 = 0{,}5) = 1$

Pagos:

$$u_1(a_1, a_2; v_1, v_2) = \begin{cases} v_1 - a_1 & \text{si} \quad a_1 > a_2 \\ 0 & \text{si} \quad a_1 < a_2 \\ \dfrac{v_1 - a_1}{2} & \text{si} \quad a_1 = a_2 \end{cases}$$

$$u_2(a_1, a_2; v_1, v_2) = \begin{cases} v_2 - a_2 & \text{si} \quad a_2 > a_1 \\ 0 & \text{si} \quad a_2 < a_1 \\ \dfrac{v_2 - a_2}{2} & \text{si} \quad a_2 = a_1 \end{cases}$$

Estrategias de J1: Sus acciones, es decir, $S_1 = A_1 = \{0, 0{,}5, 1\}$.
Estrategias de J2: Vectores (x_1, x_2), que significan «Pujo x_1 si mi tipo es 0, y pujo x_2 si mi tipo es 1». Es decir, $S_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in A_2 \text{ y } x_2 \in A_2\}$.

Este juego bayesiano puede visualizarse así:

Azar

$v_2 = 0\ (p = 1/2)$ $v_2 = 1 (1 - p = 1/2)$

		$J_2\ (v_2 = 0)$		
		$a_2 = 0$	$a_2 = 0{,}5$	$a_2 = 1$
$J_1\ (v_1 = 0{,}5)$	$a_1 = 0$	0,25, 0	0, −0,5	0, −1
	$a_1 = 0{,}5$	0, 0	0, −0,25	0, −1
	$a_1 = 1$	−0,5, 0	−0,5, 0	−0,25, −0,5

		$J_2\ (v_2 = 1)$		
		$a_2 = 0$	$a_2 = 0{,}5$	$a_2 = 1$
$J_1\ (v_1 = 0{,}5)$	$a_1 = 0$	0,25, 0,5	0, 0,5	0, 0
	$a_1 = 0{,}5$	0, 0	0, 0,25	0, 0
	$a_1 = 1$	−0,5, 0	−0,5, 0	−0,25, 0

Figura 5.9 Juego bayesiano de la subasta simplificada del Ejemplo 5.6.

Busquemos los perfiles que son EB en estrategias puras. Descartemos la estrategia «1» de J1, ya que está estrictamente dominada por la estrategia «0» (pues «1» le produce pagos esperados estrictamente negativos sea cual sea la estrategia de J2, mientras que «0» le produce siempre pagos nulos o positivos).

- ¿Cuál es la mejor estrategia de respuesta de J2 a la estrategia «0» de J1?

Tiene que comparar, para cada tipo, sus pagos esperados si responde jugando 0, 0,5 o 1.

Sea $v_2 = 0$ el tipo de J2:

Si juega 0: $u_2 = u_2(0, 0; 0{,}5, 0) = 0$
Si juega 0,5: $u_2 = u_2(0, 0{,}5; 0{,}5, 0) = -0{,}5$
Si juega 1: $u_2 = u_2(0, 1; 0{,}5, 0) = -1$

Así pues, la mejor acción de respuesta es 0.

Sea $v_2 = 1$ el tipo de J2:

Si juega 0: $u_2 = u_2(0, 0; 0{,}5, 1) = 0{,}5$
Si juega 0,5: $u_2 = u_2(0, 0{,}5; 0{,}5, 1) = 0{,}5$
Si juega 1: $u_2 = u_2(0, 1; 0{,}5, 1) = 0$

Así pues, las mejores acciones de respuesta son 0 y 0,5.
En consecuencia: **las estrategias de respuesta óptima de J2 a la estrategia «0» de J1 son: (0, 0) y (0, 0,5).**

- ¿Cuál es la mejor estrategia de respuesta de J2 a la estrategia «0,5» de J1?

Como en el caso anterior, tiene que comparar, para cada tipo, sus pagos esperados si responde jugando 0, 0,5 ó 1. Razonando análogamente se obtiene como acción de respuesta óptima, para el tipo $v_2 = 0$ de J2, la jugada 0 (que le produce un pago de 0 frente a los pagos $-0{,}25$ y -1 que le producirían, respectivamente, las jugadas 0,5 y 1), y para el tipo $v_2 = 1$ de J2, la jugada 0,5 (que le produce un pago de 0,25 frente al pago 0 que le produciría cualquiera de las otras jugadas). En consecuencia, **la estrategia de respuesta óptima de J2 a la estrategia «0,5» de J1 es (0, 0,5).**

- ¿Cuál es la mejor estrategia de respuesta de J1 a la estrategia (0, 0) de J2?

Teniendo un único tipo, ha de comparar sus pagos esperados si juega 0 ó 0,5.

Si juega 0: $U_1 = (1/2) \cdot u_1(0, 0; 0{,}5, 0) + (1/2) \cdot u_1(0, 0; 0{,}5, 1) =$
$= (1/2) \cdot (1/4 + 1/4) = 1/4$

(obsérvese que esa suma es $p_1(0/0{,}5)u_1(0, 0; 0{,}5, 0) + p_1(1/0{,}5)u_1(0, 0; 0{,}5, 1)$)

Si juega 0,5: $U_1 = (1/2) \cdot u_1(0{,}5, 0; 0{,}5, 0) + (1/2) \cdot u_1(0{,}5, 0; 0{,}5, 1) =$
$= (1/2) \cdot (0 + 0) = 0$

En consecuencia: **la estrategia de respuesta óptima de J1 a la estrategia (0, 0) de J2 es: «0».**

- ¿Cuál es la mejor estrategia de respuesta de J1 a la estrategia (0, 0,5) de J2?

Razonando como en el caso anterior, se obtiene como respuesta óptima la jugada (y estrategia) «0» (que le produce un pago de 1/8 frente al pago 0 que le produciría la jugada 0,5). En consecuencia, **la estrategia de respuesta óptima de J1 a la estrategia (0, 0,5) de J2 es: «0».**

Realizado el análisis completo de respuestas óptimas, podemos resumirlo así:

J1		J2		J1	
0	→	(0, 0)	→	0	*
0	→	(0, 0,5)	→	0	*
0,5	→	(0, 0,5)	→	0	

En conclusión, **los equilibrios bayesianos son (0, (0, 0)) y (0, (0, 0,5)).**

Ejemplo 5.16

Consideremos la subasta de la versión 2 del Ejemplo 5.7. Sus características son:

Acciones: $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = [0, 1]$ (denotadas a_i)
Tipos: $T_1 = T_2 = \cdots = T_n = [0, 1]$ (denotados v_i)

Distribución de probabilidad a priori: $\text{prob}\,(v_j < v) = v$

Ganancias o pagos de Ji: El pago esperado $U_i(a_1, ..., a_i , ..., a_n; v_1, ...,v_n)$ es

- $\left(\dfrac{1}{h+1}\right)\left(v_i - \dfrac{1}{2}\right)$ si a_i es mayor o igual que todos los demás a_j (pero empatado con h de ellos).
- 0 si a_i es menor que algún otro a_j.

Dado un jugador cualquiera i, y un tipo cualquiera de éste v_i, la acción a_i que más le conviene es pujar el máximo si su tipo v_i es mayor que 1/2, y el mínimo si su tipo v_i es menor que 1/2, puesto que su acción o puja afecta a la probabilidad de que le adjudiquen el objeto, pero no afecta (supuesto que sea el adjudicatario) a su beneficio final.

En conclusión, los únicos equilibrios bayesianos son $\boldsymbol{s}^* = (s_1^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ donde la estrategia de cualquier jugador i es

$$s_i^*(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad v_i > \dfrac{1}{2} \\[2ex] x & \text{si} \quad v_i = \dfrac{1}{2} \\[2ex] 0 & \text{si} \quad v_i < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

siendo x cualquier valor en el intervalo [0, 1].

Ejemplo 5.17

Consideremos el juego sencillo de la verdad del Ejemplo 5.8, cuya forma extensiva es:

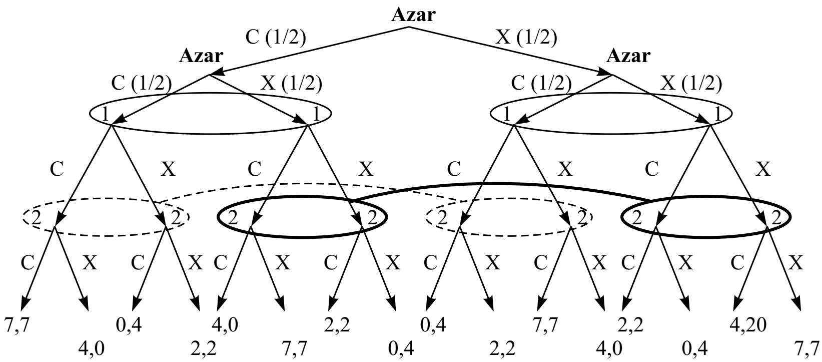


Figura 5.10 Juego sencillo de la verdad.

Sus características son:

Tipos y acciones:

$$T_1 = \{C, X\} = T_2; \qquad A_1 = \{C, X\} = A_2 \qquad T_{-1} = \{C, X\} = T_{-2}$$

Distribución a priori:

$$p(C, C) = p(C, X) = p(X, C) = p(X, X) = 1/4$$

donde $p(a, b)$ significa probabilidad de que salga a en el primer lanzamiento y b en el segundo, es decir, $p(a, b)$ significa probabilidad de que J1 tenga tipo a y J2 tenga tipo b.

Conjeturas:

$$p_1(\mathrm{C/C}) = p_1(\mathrm{X/C}) = p_1(\mathrm{C/X}) = p_1(\mathrm{X/X}) = 1/2$$

$$p_2(\mathrm{C/C}) = p_2(\mathrm{X/C}) = p_2(\mathrm{C/X}) = p_2(\mathrm{X/X}) = 1/2$$

donde $p_i(a/b)$ significa probabilidad de que al otro jugador le haya salido a, supuesto que al jugador i le haya salido b, es decir, $p_i(a/b)$ significa probabilidad de que el otro jugador tenga tipo a, supuesto que el jugador i tiene tipo b.

Estrategias:

$$S_1 = S_2 = \{\mathrm{CC, CX, XC, XX}\}$$

donde ab significa «si mi tipo es C declaro a, y si mi tipo es X declaro b».

Sea $\boldsymbol{s^*} = (s_1^*, s_2^*)$ un perfil de equilibrio. Para acortar el proceso de cálculo, merece la pena observar que, sean cuales sean los dos tipos, y sea cual sea la acción del jugador 2, al jugador 1 le interesa estrictamente decir la verdad. En efecto: dado $t_1 = \mathrm{C}$ se cumple que

$$U_1(\mathrm{C}, a_2; \mathrm{C}, t_2) > U_1(\mathrm{X}, a_2; \mathrm{C}, t_2),\ \forall a_2 \in A_2,\ \forall t_2 \in T_2$$

y del mismo modo, dado $t_1 = \mathrm{X}$ se cumple que

$$U_1(\mathrm{X}, a_2; \mathrm{X}, t_2) > U_1(\mathrm{C}, a_2; \mathrm{X}, t_2),\ \forall a_2 \in A_2,\ \forall t_2 \in T_2$$

Esto nos permite asegurar que $s_1^* = \mathrm{CX}$, que significa «si mi tipo es C declaro C, y si mi tipo es X declaro X». Averigüemos cuál es la estrategia s_2^*.

¿Cuál es la mejor estrategia de respuesta del jugador 2 a la estrategia CX del jugador 1?

Tendrá que comparar, para cada uno de sus tipos, sus pagos esperados si juega C o X.
Sea C el tipo del jugador 2.
Si juega C:

$$U_2 = p_2(\mathrm{C/C}) \cdot u_2(\mathrm{C, C; C, C}) + p_2(\mathrm{X/C}) \cdot u_2(\mathrm{X, C; X, C}) =$$
$$= (1/2) \cdot u_2(\mathrm{C, C; C, C}) + (1/2) \cdot u_2(\mathrm{X, C; X, C}) = (1/2) \cdot (7 + 7) = 7$$

Si juega X:

$$U_2 = p_2(\mathrm{C/C}) \cdot u_2(\mathrm{C, X; C, C}) + p_2(\mathrm{X/C}) \cdot u_2(\mathrm{X, X; X, C}) =$$
$$= (1/2) \cdot u_2(\mathrm{C, X; C, C}) + (1/2) \cdot u_2(\mathrm{X, X; X, C}) = (1/2) \cdot (0 + 0) = 0$$

Así pues, la mejor acción de respuesta es C.
Sea X el tipo del jugador 2.
Si juega C:

$$U_2 = p_2(\mathrm{C/X}) \cdot u_2(\mathrm{C, C; C, X}) + p_2(\mathrm{X/X}) \cdot u_2(\mathrm{X, C; X, X}) =$$
$$= (1/2) \cdot u_2(\mathrm{C, C; C, X}) + (1/2) \cdot u_2(\mathrm{X, C; X, X}) = (1/2) \cdot (0 + 20) = 10$$

Si juega X:

$$U_2 = p_2(\mathrm{C/X}) \cdot u_2(\mathrm{C, X; C, X}) + p_2(\mathrm{X/X}) \cdot u_2(\mathrm{X, X; X, X}) =$$
$$= (1/2) \cdot u_2(\mathrm{C, X; C, X}) + (1/2) \cdot u_2(\mathrm{X, X; X, X}) = (1/2) \cdot (7 + 7) = 7$$

Así pues, la mejor acción de respuesta es C.

Por tanto, la estrategia de respuesta óptima de 2 a la estrategia CX de 1 es: CC.

En conclusión, **el único EB es (CX, CC)**. En dicho equilibrio el jugador 1 dice siempre la verdad, mientras que el jugador 2 dice la verdad si obtiene CARA, pero miente si obtiene CRUZ (dice CARA incondicionalmente).

Ejemplo 5.18

Consideremos ahora la versión 2 del juego sencillo de la verdad, en la cual se establece que, cuando el resultado de los dos primeros lanzamientos es CRUZ en ambos casos, se vuelve a lanzar dos veces la moneda, y estos últimos lanzamientos son los que cuentan. Ahora todo es igual que en el Ejemplo 5.17, salvo la distribución a priori de los tipos y las conjeturas sobre los tipos. Ahora tenemos:

Distribución a priori:

$$p(\mathrm{C, C}) = 5/16;\ p(\mathrm{C, X}) = 5/16;\ p(\mathrm{X, C}) = 5/16;\ p(\mathrm{X, X}) = 1/16$$

donde $p(a, b)$ significa probabilidad de que el jugador 1 tenga tipo a y el 2 tenga tipo b.

$$p(1\mathrm{C}) = 10/16;\ p(1\mathrm{X}) = 6/16;\ p(2\mathrm{C}) = 10/16;\ p(2\mathrm{X}) = 6/16$$

donde $p(ia)$ significa probabilidad de que el jugador i tenga el tipo a.

Conjeturas (aplicando la regla de Bayes):

$$p_1(\mathrm{C/X}) = p(\mathrm{X, C})/p(1\mathrm{X}) = (5/16)/(6/16) = 5/6, \quad p_1(\mathrm{X/X}) = 1 - 5/6 = 1/6$$
$$p_1(\mathrm{C/C}) = \mathrm{p}(\mathrm{C, C})/p(1\mathrm{C}) = (5/16)/(10/16) = 1/2, \quad p_1(\mathrm{X/C}) = 1 - 1/2 = 1/2$$

y análogamente:

$$p_2(\mathrm{C/X}) = 5/6,\ p_2(\mathrm{X/X}) = 1/6,\ p_2(\mathrm{C/C}) = 1/2,\ p_2(\mathrm{X/C}) = 1/2$$

Obsérvese que las únicas conjeturas cuya probabilidad difiere de las de la versión 1 son aquellas condicionadas al tipo X (en efecto, si uno de los jugadores ha obtenido C los primeros dos lanzamientos son definitivos, y la probabilidad es la misma que en la versión 1).

Sea $\boldsymbol{s}^* = (s_1^*, s_2^*)$ un perfil de equilibrio. Como en el ejemplo anterior, sean cuales sean los dos tipos, y sea cual sea la acción del jugador 2, al jugador 1 le interesa estrictamente decir la verdad. Por tanto, CX es una estrategia estrictamente dominante del jugador 1, y en consecuencia $s_1^* = \mathrm{CX}$. Averigüemos ahora cuál es la estrategia s_2^*.

¿Cuál es la mejor estrategia de respuesta del jugador 2 a la estrategia CX del jugador 1? Como antes, tendrá que comparar, para cada uno de sus tipos, sus pagos esperados si juega C o X.

Sea C el tipo del jugador 2. Este cálculo será el mismo que antes.

Si juega C:

$$U_2 = p_2(\mathrm{C/C}) \cdot u_2(\mathrm{C, C; C, C}) + p_2(\mathrm{X/C}) \cdot u_2(\mathrm{X, C; X, C}) = 7$$

Si juega X:

$$U_2 = p_2(\mathrm{C/C}) \cdot u_2(\mathrm{C, X; C, C}) + p_2(\mathrm{X/C}) \cdot u_2(\mathrm{X, X; X, C}) = 0$$
$$= (1/2) \cdot u_2(\mathrm{C, X; C, C}) + (1/2) \cdot u_2(\mathrm{X, X; X, C}) = (1/2) \cdot (0 + 0) = 0$$

También ahora, la mejor acción de respuesta es C.

Sea X el tipo del jugador 2.

Si juega C:

$$U_2 = p_2(\mathrm{C/X}) \cdot u_2(\mathrm{C, C; C, X}) + p_2(\mathrm{X/X}) \cdot u_2(\mathrm{X, C; X, X}) =$$
$$= (5/6) \cdot u_2(\mathrm{C, C; C, X}) + (1/6) \cdot u_2(\mathrm{X, C; X, X}) = 0 + 20/6 = 20/6$$

Si juega X:

$$U_2 = p_2(\mathrm{C/X}) \cdot u_2(\mathrm{C, X; C, X}) + p_2(\mathrm{X/X}) \cdot u_2(\mathrm{X, X; X, X}) =$$
$$= (5/6) \cdot u_2(\mathrm{C, X; C, X}) + (1/6) \cdot u_2(\mathrm{X, X; X, X}) = 35/6 + 7/6 = 7$$

Así pues, al contrario que antes, la mejor acción de respuesta ahora es X.

Por tanto, la estrategia de respuesta óptima de 2 a la estrategia CX de 1 es CX.

En conclusión, **el único EB es (CX, CX)**. En dicho equilibrio ambos jugadores dicen siempre la verdad.

Ejemplo 5.19

Sea de nuevo el juego del Ejemplo 5.4, pero con una jugada de azar distinta. Hay dos urnas iguales, ambas con cuatro bolas, pero la primera tiene dos bolas blancas y dos negras, mientras que la segunda tiene tres blancas y una negra. Supongamos ahora que la jugada de azar tiene dos partes, en la primera se elige al azar una de los dos urnas, y sólo J1 lo observa, y en la segunda parte se elige al azar una bola de la urna antes elegida, y sólo J2 observa el color. Los pagos del juego dependen ahora de que la bola elegida sea blanca (B) o negra (N), de exactamente igual modo que en el Ejemplo 5.4 dependían de puntuación ALTA o BAJA (es decir, los pagos son los del dilema del prisionero, excepto que haya salido bola negra, en cuyo caso los pagos si ambos callan son 10 para cada uno). Así pues, la forma extensiva del juego es la siguiente:

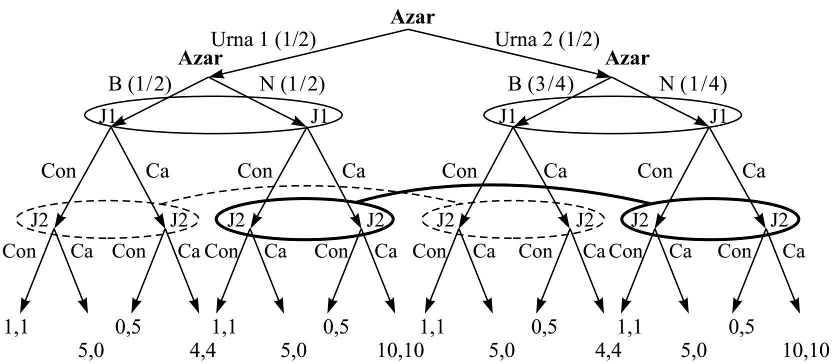


Figura 5.11 Juego bayesiano del Ejemplo 5.4, pero con otra jugada de azar.

Las acciones son las mismas, $A_1 = A_2 = \{Confesar, Callar\}$, pero los tipos, conjeturas y estrategias han cambiado, y son los siguientes:

Tipos: $T_1 = \{\text{Urna 1, Urna 2}\}$, $T_2 = \{\text{B, N}\}$

Estrategias de J1: $S_1 = \{$*Confesar-Confesar*, *Confesar-Callar*, *Callar-Confesar*, *Callar-Callar*$\}$

Estrategias de J2: $S_2 = \{$*Confesar-Confesar*, *Confesar-Callar*, *Callar-Confesar*, *Callar-Callar*$\}$

Probabilidades a priori:

$p(\text{Urna 1}) = 1/2$, $p(\text{Urna 2}) = 1/2$

$p(\text{Urna 1, B}) = 1/4$, $p(\text{Urna 1, N}) = 1/4$, $p(\text{Urna 2, B}) = 3/8$, $p(\text{Urna 2, N}) = 1/8$

donde $p(a, b)$ significa probabilidad de que el jugador 1 tenga tipo a y el 2 tenga tipo b.

$p(1 \text{ Urna 1}) = 1/2$, $p(1 \text{ Urna 2}) = 1/2$, $p(2 \text{ B}) = 5/8$, $p(2 \text{ N}) = 3/8$

donde $p(i\ a)$ significa probabilidad de que el jugador i tenga el tipo a.

Conjeturas de J1:

$$p_1(\text{B/Urna 1}) = 1/2,\ p_1(\text{N/Urna 1}) = 1/2$$

$$p_1(\text{B/Urna 2}) = 3/4,\ p_1(\text{N/Urna 2}) = 1/4$$

Conjeturas de J2 (aplicando la regla de Bayes):

$$p_2(\text{Urna 1/B}) = p(\text{Urna 1, B})/p(2\text{ B}) = (1/4)/(5/8) = 2/5,\ p_2(\text{Urna 2/B}) = 1 - 2/5 = 3/5$$

$$p_2(\text{Urna 1/N}) = \text{p}(\text{Urna 1, N})/p(2\ N) = (1/4)/(3/8) = 2/3,\ p_2(\text{Urna 2/N}) = 1 - 2/3 = 1/3$$

Sea $\boldsymbol{s^*} = (s_1^*, s_2^*)$ un perfil de equilibrio. Analicemos las consecuencias basándonos en la Figura 5.11. Si J2 es de tipo B, su acción *Confesar* es estrictamente dominante. Por tanto s_2^* puede ser sólamente *Confesar-Confesar* o *Confesar-Callar*.

Supongamos que s_2^* es *Confesar-Confesar*, y averigüemos en ese caso cuál es la estrategia s_1^*.

- ¿Cuál es la mejor estrategia de respuesta de J1 a la estrategia *Confesar-Confesar* de J2? Habrá de comparar, como siempre, para cada uno de sus tipos, sus pagos esperados si juega *Confesar* o *Callar*.

Sea Urna 1 el tipo de J1.

Si juega *Confesar*:

$$U_1 = p_1(\text{B/Urna 1}) \cdot u_1(Confesar, Confesar; \text{Urna 1,B}) +$$
$$+ p_1(\text{N/Urna 1}) \cdot u_1(Confesar, Confesar; \text{Urna 1,N}) = (1/2) \cdot 1 + (1/2) \cdot 1 = 1$$

Si juega *Callar*:

$$U_1 = p_1(\text{B/Urna 1}) \cdot u_1(Callar, Confesar; \text{Urna 1,B}) +$$
$$+ p_1(\text{N/Urna 1}) \cdot u_1(Callar, Confesar; \text{Urna 1,N}) = (1/2) \cdot 0 + (1/2) \cdot 0 = 0$$

La mejor acción de respuesta es *Confesar*.

Sea Urna 2 el tipo de J1.
Si juega *Confesar*:

$$U_1 = p_1(\text{B/Urna 2}) \cdot u_1(\textit{Confesar}, \textit{Confesar}; \text{Urna 2,B}) +$$
$$+ p_1(\text{N/Urna 2}) \cdot u_1(\textit{Confesar}, \textit{Confesar}; \text{Urna 2,N}) = (3/4) \cdot 1 + (1/4) \cdot 1 = 1$$

Si juega *Callar*:

$$U_1 = p_1(\text{B/Urna 2}) \cdot u_1(\textit{Callar}, \textit{Confesar}; \text{Urna 2,B}) +$$
$$+ p_1(\text{N/Urna 2}) \cdot u_1(\textit{Callar}, \textit{Confesar}; \text{Urna 2,N}) = (3/4) \cdot 0 + (1/4) \cdot 0 = 0$$

La mejor acción de respuesta es *Confesar*.

Por tanto, la estrategia de respuesta óptima de J1 a la estrategia *Confesar-Confesar* de J2 es *Confesar-Confesar*. Es decir, s_1^* es *Confesar-Confesar*. Completemos ahora el razonamiento para comprobar si (s_1^*, s_2^*), siendo $s_1^* = s_2^* = $ *Confesar-Confesar*, es un EB.

¿Cuál es la mejor estrategia de respuesta de J2 a la estrategia *Confesar-Confesar* de J1? Comparemos, para cada uno de sus tipos, sus pagos esperados si juega *Confesar* o *Callar*.

Sea B el tipo de J2.
Si juega *Confesar*:

$$U_2 = p_2(\text{Urna 1/B}) \cdot u_2(\textit{Confesar}, \textit{Confesar}; \text{Urna 1,B}) +$$
$$+ p_2(\text{Urna 2/B}) \cdot u_2(\textit{Confesar}, \textit{Confesar}; \text{Urna 2,B}) = (2/5) \cdot 1 + (3/5) \cdot 1 = 1$$

Si juega *Callar*:

$$U_2 = p_2(\text{Urna 1/B}) \cdot u_2(\textit{Confesar}, \textit{Callar}; \text{Urna 1,B}) +$$
$$+ p_2(\textit{Urna 2/B}) \cdot u_2(\textit{Confesar}, \textit{Callar}; \text{Urna 2,B}) = (2/5) \cdot 0 + (3/5) \cdot 0 = 0$$

La mejor acción de respuesta es *Confesar*.

Sea N el tipo de J2.
Si juega *Confesar*:

$$U_2 = p_2(\text{Urna 1/N}) \cdot u_2(\textit{Confesar}, \textit{Confesar}; \text{Urna 1,N}) +$$
$$+ p_2(\text{Urna 2/N}) \cdot u_2(\textit{Confesar}, \textit{Confesar}; \text{Urna 2,N}) = (2/3) \cdot 1 + (1/3) \cdot 1 = 1$$

Si juega *Callar*:

$$U_2 = p_2(\text{Urna 1/N}) \cdot u_2(\textit{Confesar}, \textit{Callar}; \text{Urna 1,N}) +$$
$$+ p_2(\text{Urna 2/N}) \cdot u_2(\textit{Confesar}, \textit{Callar}; \text{Urna 2,N}) = (2/3) \cdot 0 + (1/3) \cdot 0 = 0$$

La mejor acción de respuesta es *Confesar*.

Por tanto, la estrategia de respuesta óptima de J2 a la estrategia *Confesar-Confesar* de J1 es *Confesar-Confesar*. Por tanto, (*Confesar-Confesar*, *Confesar-Confesar*) es un EB.

Supongamos por último que s_2^* *es Confesar-Callar*, y averigüemos en ese caso cuál es la estrategia s_1^*.

¿Cuál es la mejor estrategia de respuesta de J1 a la estrategia *Confesar-Callar* de J2?

Sea Urna 1 el tipo de J1.
Si juega *Confesar*:

$$U_1 = p_1(\text{B/Urna } 1) \cdot u_1(\textit{Confesar}, \textit{Confesar}; \text{Urna } 1,\text{B}) +$$
$$+ p_1(\text{N/Urna } 1) \cdot u_1(\textit{Confesar}, \textit{Callar}; \text{Urna } 1,\text{N}) = (1/2) \cdot 1 + (1/2) \cdot 5 = 3$$

Si juega *Callar*:

$$U_1 = p_1(\text{B/Urna } 1) \cdot u_1(\textit{Callar}, \textit{Confesar}; \text{Urna } 1,\text{B}) +$$
$$+ p_1(\text{N/Urna } 1) \cdot u_1(\textit{Callar}, \textit{Callar}; \text{Urna } 1,\text{N}) = (1/2) \cdot 0 + (1/2) \cdot 10 = 5$$

La mejor acción de respuesta es *Callar*.

Sea Urna 2 el tipo de J1.
Si juega *Confesar*:

$$U_1 = p_1(\text{B/Urna } 2) \cdot u_1(\textit{Confesar}, \textit{Confesar}; \text{Urna } 2,\text{B}) +$$
$$+ p_1(\text{N/Urna } 2) \cdot u_1(\textit{Confesar}, \textit{Callar}; \text{Urna } 2,\text{N}) = (3/4) \cdot 1 + (1/4) \cdot 5 = 2$$

Si juega *Callar*:

$$U_1 = p_1(\text{B/Urna } 2) \cdot u_1(\textit{Callar}, \textit{Confesar}; \text{Urna } 2,\text{B}) +$$
$$+ p_1(\text{N/Urna } 2) \cdot u_1(\textit{Callar}, \textit{Callar}; \text{Urna } 2,\text{N}) = (3/4) \cdot 0 + (1/4) \cdot 10 = 10/4$$

La mejor acción de respuesta es *Callar*.

Por tanto, la estrategia de respuesta óptima de J1 a la estrategia *Confesar-Callar* de J2 es *Callar-Callar*. Es decir, s_1^* es *Callar-Callar*. Completemos ahora el razonamiento para comprobar si (*Callar-Callar*, *Confesar-Callar*) es un EB.

¿Cuál es la mejor estrategia de respuesta de J2 a la estrategia *Callar-Callar* de J1? Comparemos, para cada uno de sus tipos, sus pagos esperados si juega *Confesar* o *Callar*.

Sea B el tipo de J2.
Si juega *Confesar*:

$$U_2 = p_2(\text{Urna } 1/\text{B}) \cdot u_2(\textit{Callar}, \textit{Confesar}; \text{Urna } 1,\text{B}) +$$
$$+ p_2(\text{Urna } 2/\text{B}) \cdot u_2(\textit{Callar}, \textit{Confesar}; \text{Urna } 2,\text{B}) = (2/5) \cdot 5 + (3/5) \cdot 5 = 5$$

Si juega *Callar*:

$$U_2 = p_2(\text{Urna } 1/\text{B}) \cdot u_2(\textit{Callar}, \textit{Callar}; \text{Urna } 1,\text{B}) +$$
$$+ p_2(\textit{Urna } 2/B) \cdot u_2(\textit{Callar}, \textit{Callar}; \text{Urna } 2,\text{B}) = (2/5) \cdot 4 + (3/5) \cdot 4 = 4$$

La mejor acción de respuesta es *Confesar*.

Sea N el tipo de J2.
Si juega *Confesar*:

$$U_2 = p_2(\text{Urna } 1/\text{N}) \cdot u_2(\textit{Callar}, \textit{Confesar}; \text{ Urna } 1,\text{N}) +$$
$$+ p_2(\text{Urna } 2/\text{N}) \cdot u_2(\textit{Callar}, \textit{Confesar}; \text{ Urna } 2,\text{N}) = (2/3) \cdot 5 + (1/3) \cdot 5 = 5$$

Si juega *Callar*:

$$U_2 = p_2(\text{Urna } 1/\text{N}) \cdot u_2(\textit{Callar}, \textit{Callar}; \text{ Urna } 1,\text{N}) +$$
$$+ p_2(\text{Urna } 2/\text{N}) \cdot u_2(\textit{Callar}, \textit{Callar}; \text{ Urna } 2,\text{N}) = (2/3) \cdot 10 + (1/3) \cdot 10 = 10$$

La mejor acción de respuesta es *Callar*.

Por tanto, la estrategia de respuesta óptima de J2 a la estrategia *Callar-Callar* de J1 es *Confesar-Callar*. Por tanto, (*Callar-Callar*, *Confesar-Callar*) es un EB.

En conclusión, los EB en estrategias puras de este juego son (*Confesar-Confesar*, *Confesar-Confesar*) y (*Callar-Callar*, *Confesar-Callar*).

Teorema de existencia

Como siempre que introducimos un nuevo concepto de equilibrio, es muy importante preguntarnos para qué clases de juegos podemos estar seguros de que al menos un perfil estratégico cumple las condiciones del nuevo concepto de equilibrio. Como muestra el teorema siguiente, todos los juegos bayesianos finitos tienen algún perfil que cumple la definición de equilibrio bayesiano.

Teorema 5.1 Teorema de existencia de los equilibrios bayesianos

Si G_B es un juego bayesiano finito (J es finito; $A_1, A_2, ..., A_n$ son finitos y $T_1, T_2, ..., T_n$ son finitos), existe un perfil estratégico (quizá en estrategias mixtas) que es un EB.

Demostración:

El juego tipo-agente correspondiente puede considerarse un juego estático finito en forma estratégica del que sabemos, en virtud del Teorema 3.4 del Capítulo 3, que tiene algún EN, quizá en estrategias mixtas. Pues bien, es inmediato comprobar que dicho EN es el equilibrio bayesiano que buscamos.

El teorema anterior nada dice acerca de los juegos bayesianos estáticos infinitos. No podemos estar seguros de antemano de que dichos juegos tengan equilibrio bayesiano, pero en general los juegos infinitos de este tipo que son interesantes en economía, como por ejemplo las subastas, sí lo tienen.

Equilibrios bayesianos en estrategias mixtas

Hasta ahora, en los juegos bayesianos hemos analizado sólamente estrategias puras, que son reglas de decisión que asignan a cada tipo una acción. En particular, en un juego bayesiano finito $G_B = \{J;\ A_1, A_2, ..., A_n;\ T_1, T_2, ..., T_n;\ p_1, p_2, ..., p_n;\ u_1, u_2, ..., u_n\}$, una estrategia pura del jugador i especifica una acción de A_i por cada tipo de T_i. Parece natural definir las estrategias mixtas del siguiente modo:

Definición 5.4

En un juego bayesiano estático finito, $G_B = \{J;\ A_1, A_2, ..., A_n;\ T_1, T_2, ..., T_n;\ p_1, p_2, ..., p_n;\ u_1, u_2, ..., u_n\}$, una **estrategia mixta** del jugador i es una regla de decisión que especifica una lotería sobre A_i por cada tipo de T_i, es decir, una aplicación σ_i de T_i en $\Delta(A_i)$ que a cada tipo t_i le asigna una lotería $\sigma_i(t_i)$.

Al igual que en el caso de su homólogo para juegos estáticos con información completa, el Teorema 5.1 (que establece la existencia de equilibrios bayesianos en los juegos finitos) no asegura que estos equilibrios estén constituidos por estrategias puras. El siguiente ejemplo muestra, de manera análoga al juego de las monedas, que algunos juegos bayesianos finitos no tienen ningún equilibrio bayesiano en estrategias puras.

Ejemplo 5.20

Consideremos el siguiente juego: se lanza una moneda no sesgada. El jugador 1 observa el resultado del lanzamiento, pero el jugador 2 no. A continuación ambos, simultáneamente, declaran Cara o Cruz. Las ganancias son las del juego de las monedas si sale Cruz, y las que resultan de cambiar el signo a las del juego de las monedas, si sale Cara.

Este juego bayesiano puede visualizarse así:

Azar

Cara ($p = 1/2$) — Cruz ($1 - p = 1/2$)

		J_2	
		Cara	Cruz
J_1 (t_1 = Cara)	Cara	− 1, 1	1, − 1
	Cruz	1, −1	− 1, 1

		J_2	
		Cara	Cruz
J_1 (t_1 = Cruz)	Cara	1, − 1	− 1, 1
	Cruz	− 1, 1	1, − 1

Figura 5.12 Juego bayesiano sin EB en estrategias puras.

Busquemos los perfiles que son EB. La respuesta óptima por parte de J1 a la estrategia *Cara* de J2 es *Cruz-Cara*, ya que si su tipo es «Cara» su acción de respuesta óptima es *Cruz*, y si su tipo es «Cruz» su acción de respuesta óptima es *Cara*. Sin embargo, la respuesta óptima por parte de J2 a la estrategia *Cruz-Cara* de J1 no es *Cara* sino *Cruz*. Por tanto, la estrategia *Cara* de J2 no forma parte de un EB.

Análogamente, la respuesta óptima por parte de J1 a la estrategia *Cruz* de J2 es *Cara-Cruz*, ya que si su tipo es «Cara» su acción de respuesta óptima es *Cara*, y si su tipo es «Cruz» su acción de respuesta óptima es *Cruz*. Sin embargo, la respuesta óptima por parte de J2 a la estrategia *Cara-Cruz* de J1 no es *Cruz* sino *Cara*. Por tanto, la estrategia *Cruz* de J2 no forma parte de un EB.

En consecuencia, no existe ningún EB en el cual J2 juegue una estrategia pura.

Vamos a comprobar, sin embargo, que el perfil $\boldsymbol{s^*} = (s_1^*, s_2^*)$, donde s_1^* es la estrategia pura *Cara-Cara* de J1 y s_2^* es la estrategia mixta $(\alpha, 1 - \alpha)$ de J2, siendo $\alpha = 1/2$, es un EB.

- ¿Cuál es la mejor estrategia de respuesta de J1 a la estrategia (1/2, 1/2) de J2?

Sea «Cara» el tipo de J1.

Si juega *Cara*:

$$U_1 = \alpha \cdot u_1(Cara, Cara; Cara) + (1-\alpha) \cdot u_1(Cara, Cruz; Cara) = (1/2) \cdot (-1) + (1/2) \cdot 1 = 0$$

Si juega *Cruz*:

$$U_1 = \alpha \cdot u_1(Cruz, Cara; Cara) + (1-\alpha) \cdot u_1(Cruz, Cruz; Cara) = (1/2) \cdot 1 + (1/2) \cdot (-1) = 0$$

Por tanto, una acción de respuesta óptima de J1 cuando su tipo es «Cara» es *Cara*.

Sea «Cruz» el tipo de J1.

Si juega *Cara*:

$$U_1 = \alpha \cdot u_1(Cara, Cara; Cruz) + (1-\alpha) \cdot u_1(Cara, Cruz; Cruz) = (1/2) \cdot 1 + (1/2) \cdot (-1) = 0$$

Si juega *Cruz*:

$$U_1 = \alpha \cdot u_1(Cruz, Cara; Cruz) + (1-\alpha) \cdot u_1(Cruz, Cruz; Cruz) = (1/2) \cdot (-1) + (1/2) \cdot 1 = 0$$

Por tanto, una acción de respuesta óptima de J1 cuando su tipo es «Cruz» es *Cara*.

Así pues, una estrategia de respuesta óptima de J1 a (1/2, 1/2) de J2 es *Cara-Cara*.

- ¿Cuál es la mejor estrategia de respuesta de J2 a la estrategia *Cara-Cara* de J1?

Si juega *Cara*:

$$U_2 = (1/2) \cdot u_2(Cara, Cara; Cara) + (1/2) \cdot u_2(Cara, Cara; Cruz) = (1/2) \cdot (1) + (1/2) \cdot (-1) = 0$$

Si juega *Cruz*:

$$U_2 = (1/2) \cdot u_2(Cara, Cruz; Cara) + (1/2) \cdot u_2(Cara, Cruz; Cruz) = (1/2) \cdot (-1) + (1/2) \cdot 1 = 0$$

Así pues, una estrategia de respuesta óptima de J2 a *Cara-Cara* de J1 es cualquier lotería sobre $\{Cara, Cruz\}$, y en particular la lotería (1/2, 1/2).

En conclusión, el perfil (*Cara-Cara*, (1/2, 1/2)) es un EB.

Observación 5.4:

Concluiremos esta sección intentando situar, en la jerarquía de las distintas categorías de juegos, la posición de los juegos estáticos con información incompleta, una vez convertidos éstos en juegos bayesianos mediante la introducción de las jugadas de azar destinadas a revelar los tipos.

Sabemos que los juegos estáticos simples, estudiados en el Capítulo 2, son un caso particular de los juegos dinámicos, caracterizado por el hecho de que cada jugador juega una sola vez y ningún jugador, en el momento de jugar, tiene información acerca de qué jugada han realizado quienes le han precedido ni acerca de qué jugada van a realizar quienes le sigan. Además, los juegos estáticos simples son asimismo un caso particular de los juegos bayesianos estáticos estudiados en este capítulo, caracterizado por el hecho de que cada jugador tiene un conjunto de tipos unitario, lo que implica que es de dominio público el hecho de que cada jugador conoce el tipo de todos los demás.

Por otra parte, los juegos bayesianos estáticos son juegos consistentes en una jugada de azar seguida de jugadas simultáneas de todos los jugadores, lo que los convierte en una clase especial de juegos dinámicos con información completa, pero imperfecta. La estructura especial de los juegos bayesianos estáticos hace que éstos no tengan subjuegos propios, y que, en consecuencia, todos sus equilibrios de Nash (es decir, los equilibrios bayesianos, tal como los hemos definido en este capítulo) sean perfectos en subjuegos.

Podemos concluir, por tanto, que los juegos bayesianos son un caso particular de juegos dinámicos con información completa pero imperfecta, y que el equilibrio bayesiano es el equilibrio de Nash que corresponde a esta clase particular de juegos. La Figura 5.13 visualiza las relaciones de pertenencia que acabamos de describir.

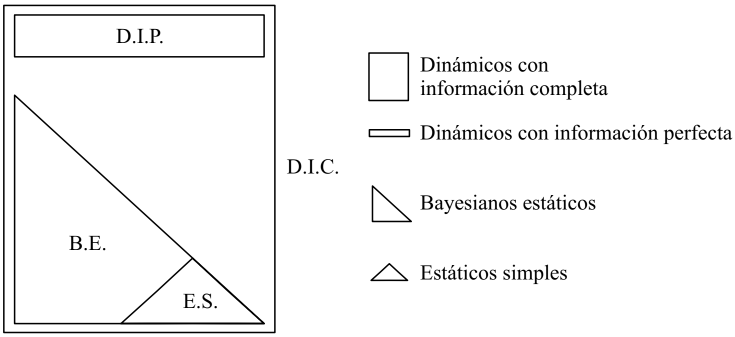


Figura 5.13 Jerarquía de las distintas categorías de juegos.

5.3 APLICACIONES: DUOPOLIO DE COURNOT CON INFORMACIÓN INCOMPLETA

En esta sección vamos a analizar el duopolio de Cournot, pero dando cabida a hipótesis más realistas en cuanto al conocimiento que cada empresa tiene de los costes de la otra. Si en el modelo estudiado en el Capítulo 2 se suponía que los costes de cada empresa son de dominio público, ahora propondremos un modelo muy simple, pero en el cual se supone que una de las empresas tiene información privada al respecto.

Con el fin de poder hacer comparaciones de los resultados de equilibrio, recordaremos en primer lugar los resultados obtenidos cuando la información sobre costes era completa.

Duopolio de Cournot con información completa

Sea el problema de un duopolio con información completa, en el que dos empresas, $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$, compiten en cantidades de un producto homogéneo, con las siguientes características:

Función de demanda inversa: $$P(Q) = \begin{cases} a - Q & \text{si} \quad Q < a \\ 0 & \text{si} \quad Q \geqslant a \end{cases} \quad (\text{donde } Q = q_1 + q_2)$$

Funciones de costes: $C_1(q_1) = cq_1$, $C_2(q_2) = c'q_2$ donde $c < a$ y $c' < a$

Las funciones de pagos son, por tanto:

$$u_1(q_1, q_2) = \pi_1(q_1, q_2) = q_1(a - q_1 - q_2) - cq_1 = q_1(a - q_1 - q_2 - c)$$

$$u_2(q_1, q_2) = \pi_2(q_1, q_2) = q_2(a - q_1 - q_2) - c'q_2 = q_2(a - q_1 - q_2 - c')$$

Todos los valores anteriores se suponen de dominio público de las empresas $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$. El equilibrio de Nash se obtiene buscando:

$$q_1^* \text{ que maximiza } q_1(a - c - q_1 - q_2^*) \text{ en } q_1$$
$$q_2^* \text{ que maximiza } q_2(a - c' - q_1^* - q_2) \text{ en } q_2$$

Las condiciones de primer orden son

$$\partial u_1(q_1, q_2)/\partial q_1 = a - 2q_1 - q_2 - c = 0; \qquad q_1 = \frac{a - c - q_2}{2}$$

$$\partial u_2(q_1, q_2)/\partial q_2 = a - q_1 - 2q_2 - c' = 0; \qquad q_2 = \frac{a - c' - q_1}{2}$$

La solución interior se obtendría resolviendo esas dos ecuaciones, lo que resulta en:

$$q_1^* = \frac{a - 2c + c'}{3}, \qquad q_2^* = \frac{a - 2c' + c}{3}$$

La cantidad total y el precio en equilibrio son

$$Q^* = \frac{2a - c - c'}{3} \quad \text{y} \quad P^* = a - Q^* = \frac{a + c + c'}{3}$$

Por otra parte, los beneficios en equilibrio son:

$$u_1^* = u_1(q_1^*, q_2^*) = q_1^*(a - q_1^* - q_2^* - c) = \left(\frac{a - 2c + c'}{3}\right)^2$$

y análogamente

$$u_2^* = \left(\frac{a - 2c' + c}{3}\right)^2$$

Veamos algunos resultados correspondientes a casos particulares en los valores de los parámetros.

Si $c = c'$, entonces $q_1^* = q_2^* = (a - c)/3$ y $u_1^* = u_2^* = (a - c)^2/9$

Si $a = 8$, $c = 0$ y $c' = 1$, entonces $q_1^* = 3$, $q_2^* = 2$, $u_1^* = 9$ y $u_2^* = 4$

Si $a = 8$, $c = 0$ y $c' = 0$, entonces $q_1^* = 8/3$, $q_2^* = 8/3$, $u_1^* = 64/9$ y $u_2^* = 64/9$

Caso de información incompleta con dos tipos de costes de una empresa

Supongamos que las características del modelo son ahora las siguientes:

Sea $P(Q) = a - q_1 - q_2$ la función de demanda inversa del bien.
Sea $C_1(q_1) = cq_1$ la función de costes de $\mathbf{E_1}$.
La función de costes de $\mathbf{E_2}$ es $C_2(q_2) = (c + \varepsilon)q_2$, de manera que, o bien $\varepsilon = \varepsilon_0$ o bien $\varepsilon = \varepsilon_1$, donde $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$, y sólo la conoce con certeza dicha empresa. Supongamos que son de dominio público la función de demanda inversa, la función de costes de $\mathbf{E_1}$ y la siguiente distribución de probabilidad del coste marginal de $\mathbf{E_2}$: $c + \varepsilon_1$ con probabilidad p y $c + \varepsilon_0$ con probabilidad $1 - p$.

Como vemos, la información es asimétrica, ya que una empresa, $\mathbf{E_2}$ en este caso, tiene una información privada sobre sus costes, el coste marginal exacto, mientras la otra sólo tiene una información probabilística. Las características de este juego son:

Acciones: $A_1 = A_2 = [0, a]$

Tipos: $T_1 = \{c\}$ $\quad T_2 = \{c + \varepsilon_1, c + \varepsilon_0\}$

Conjetura de $\mathbf{E_1}$: $\operatorname{prob}(c + \varepsilon_1) = p$, $\operatorname{prob}(c + \varepsilon_0) = 1 - p$

Ganancias o pagos: $U_1(q_1, q_2; c + \varepsilon_1) = U_1(q_1, q_2; c + \varepsilon_0) = (a - c - q_1 - q_2)q_1$

$$U_2(q_1, q_2; c + \varepsilon_1) = (a - (c + \varepsilon_1) - q_1 - q_2)q_2$$

$$U_2(q_1, q_2; c + \varepsilon_0) = (a - (c + \varepsilon_0) - q_1 - q_2)q_2$$

Estrategias del jugador 1: aplicaciones de T_1 a $A_1 = A_1$

Estrategias del jugador 2: aplicaciones de T_2 a A_2, es decir, el conjunto $\{(q_2(c + \varepsilon_1), q_2(c + \varepsilon_0))\}$, con $q_2(c + \varepsilon_1) \in A_2$ y $q_2(c + \varepsilon_0) \in A_2$.

Veamos cómo han de razonar en esta situación:

$\mathbf{E_2}$ querrá elegir una cantidad diferente según que su coste marginal sea alto o bajo. En concreto, elegirá $q_2^*(c + \varepsilon_1)$ si su coste es alto y $q_2^*(c + \varepsilon_0)$ si su coste es bajo. Por su parte, $\mathbf{E_1}$ deberá prever que $\mathbf{E_2}$ va a ajustar su cantidad a su coste. Detallemos lo anterior.
Si el coste de $\mathbf{E_2}$ es alto, $\mathbf{E_2}$ elegirá $q_2^*(c + \varepsilon_1)$ de modo que sea una solución de

$$\max\,(a - (c + \varepsilon_1) - q_1^* - q_2)q_2 \quad \text{en la variable } q_2$$

Si el coste de $\mathbf{E_2}$ es bajo, $\mathbf{E_2}$ elegirá $q_2^*(c + \varepsilon_0)$ de modo que sea una solución de

$$\max\,(a - (c + \varepsilon_0) - q_1^* - q_2)q_2 \quad \text{en la variable } q_2$$

$\mathbf{E_1}$ ha de razonar en términos de pagos esperados. Si elige q_1, su pago esperado es

$$p[(a - c - q_1 - q_2^*(c + \varepsilon_1))q_1] + (1 - p)[(a - c - q_1 - q_2^*(c + \varepsilon_0))q_1]$$

Por tanto, $\mathbf{E_1}$ elegirá q_1^* de modo que sea una solución de

$$\max p[(a - c - q_1 - q_2^*(c + \varepsilon_1))q_1] + (1 - p)[(a - c - q_1 - q_2^*(c + \varepsilon_0))q_1]$$

en la variable q_1.

Las condiciones de primer orden de estos tres problemas de optimización son:

$$q_2^*(c + \varepsilon_1) = (a - (c + \varepsilon_1) - q_1^*)/2$$

$$q_2^*(c + \varepsilon_0) = (a - (c + \varepsilon_0) - q_1^*)/2$$

$$q_1^* = (p[(a - c - q_2^*(c + \varepsilon_1)] + (1 - p)[(a - c - q_2^*(c + \varepsilon_0)])/2$$

En conclusión, en este modelo de duopolio de Cournot con información incompleta y asimétrica, el único EB en estrategias puras es el perfil $[q_1^*, (q_2^*(c + \varepsilon_1), q_2^*(c + \varepsilon_0))]$ donde las cantidades de equilibrio son las soluciones de las ecuaciones anteriores:

$$q_2^*(c + \varepsilon_1) = (a - 2(c + \varepsilon_1) + c)/3 + (1 - p)(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/6$$

$$q_2^*(c + \varepsilon_0) = (a - 2(c + \varepsilon_0) + c)/3 + p(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)/6$$

$$q_1^* = (a - 2c + p(c + \varepsilon_1) + (1 - p)(c + \varepsilon_0))/3$$

Los pagos correspondientes al equilibrio son:

$$U_2^*(c + \varepsilon_1) = (q_2^*(c + \varepsilon_1))^2; \qquad U_2^*(c + \varepsilon_0) = (q_2^*(c + \varepsilon_0))^2 \qquad U_1^* = (q_1^*)^2$$

Resumiendo, la empresa $\mathbf{E_2}$, teniendo en cuenta que $\mathbf{E_1}$ elige la cantidad q_1^* de arriba, elige $q_2^*(c + \varepsilon_1)$ si sus costes son altos (mejor respuesta en ese caso a q_1^*), y elige $q_2^*(c + \varepsilon_0)$ si sus costes son bajos (mejor respuesta en ese caso a q_1^*). Es decir, sea cual sea su tipo o carácter (sus costes) da su mejor respuesta. Por su parte, $\mathbf{E_1}$, teniendo en cuenta el comportamiento de $\mathbf{E_2}$ en cada caso (es decir, la estrategia de $\mathbf{E_2}$) elige q_1^*, que es la respuesta a dicha estrategia que le proporciona mayores ganancias o pagos esperados. Dicho perfil es un ejemplo de equilibrio bayesiano, que es la adaptación del concepto de EN a esta situación de información incompleta.

Análisis de algunos casos particulares

- Si $p = 1$, es de dominio público que los costes son altos. Se trata de un caso en que la información es completa, con costes unitarios c y $c + \varepsilon_1$ para $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ respectivamente. Las cantidades de equilibrio se reducen a

$$q_1^* = (a - 2c + c + \varepsilon_1)/3 \quad \text{y} \quad q_2^*(c + \varepsilon_1) = (a - 2(c + \varepsilon_1) + c)/3$$

  Obsérvese que coinciden con las obtenidas anteriormente, en el modelo de información completa, suponiendo $c' = c + \varepsilon_1$.
- Si $p = 0$, es de dominio público que los costes son bajos. Se trata de un caso en que la información es completa, con costes unitarios c y $c + \varepsilon_0$ para $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ respectivamente. Las cantidades de equilibrio se reducen a

$$q_1^* = (a - 2c + c + \varepsilon_0)/3 \quad \text{y} \quad q_2^*(c + \varepsilon_0) = (a - 2(c + \varepsilon_0) + c)/3$$

Obsérvese asimismo que coinciden con las obtenidas anteriormente, en el modelo de información completa, suponiendo $c' = c + \varepsilon_0$.

- Otros casos particulares:

Si $a = 8$, $c = 0$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_0 = 0$ y $p = 2/3$, entonces

$$q_2^*(c + \varepsilon_1) = 2 + 1/18 = 37/18,\ q_2^*(c + \varepsilon_0) = 8/3 - 2/18 = 46/18$$

y $q_1^* = 8/3 + 4/18 = 52/18$

$$U_2^*(c + \varepsilon_1) = (37/18)^2 \approx 4{,}225,\ U_2^*(c + \varepsilon_0) = (46/18)^2 \approx 6{,}531$$

y $U_1^* = (52/18)^2 \approx 8{,}346$

Comparación de los resultados de información incompleta con los de información completa

Merece la pena comparar en detalle los resultados aquí obtenidos con los que se obtuvieron para el caso de información completa.

Comparación en el caso general

Sea $c + \varepsilon_1$ el coste marginal de $\mathbf{E_2}$. Si la información es completa, el EN es

$$q_1^* = (a + c + \varepsilon_1 - 2c)/3 = (a + \varepsilon_1 - c)/3 \quad \text{y} \quad q_2^* = (a + c - 2(c + \varepsilon_1))/3 = (a - c - 2\varepsilon_1)/3$$

$q_1^* + q_2^* = (2a - 2c - \varepsilon_1)/3$, y los pagos son

$$u_1^* = (a + \varepsilon_1 - c)^2/9 \quad \text{y} \quad u_2^* = (a - c - 2\varepsilon_1)^2/9 \quad \text{y} \quad u_1^* + u_2^* = [(a + \varepsilon_1 - c)^2 + (a - c - 2\varepsilon_1)^2]/9$$

Si la información es incompleta, el resultado del EB es

$$q_1^* = [a - 2c + p(c + \varepsilon_1) + (1 - p)(c + \varepsilon_0)]/3$$

(obsérvese que $[a - 2c + p(c + \varepsilon_1) + (1 - p)(c + \varepsilon_0)]/3 < (a + (c + \varepsilon_1) - 2c)/3$)

$$q_2^*(c + \varepsilon_1) = (a - 2(c + \varepsilon_1) + c)/3 + (1 - p)(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/6$$

(obsérvese que $(a - 2(c + \varepsilon_1) + c)/3 + (1 - p)(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/6 > (a + c - 2(c + \varepsilon_1))/3$)

$$U_1^* = (q_1^*)^2,\ U_2^*(c + \varepsilon_1) = q_2^*(c + \varepsilon_1)^2$$

(obsérvese que $(q_1^*)^2 < (a + \varepsilon_1 - c)^2/9$ y $q_2^*(c + \varepsilon_1)^2 > (a - c - 2\varepsilon_1))^2/9$)

La suma de cantidades de equilibrio del EB es:

$$q_1^* + q_2^*(c + \varepsilon_1) = (a - 2c + p(c + \varepsilon_1) + (1 - p)(c + \varepsilon_0))/3 + (a - 2(c + \varepsilon_1) + c)/3 + \\ + (1 - p)(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/6 = [4a - 2c + (c + \varepsilon_1)(p - 3) + (c + \varepsilon_0)(1 - p)]/6$$

(obsérvese que $[4a - 2c + (c + \varepsilon_1)(p - 3) + (c + \varepsilon_0)(1 - p)]/6 < (2a - 2c - \varepsilon_1)/3$ si y sólo si $p < 1$).

Es decir, con información incompleta ocurre que la empresa informada, $\mathbf{E_2}$, obtiene más beneficios que si la información fuese completa, y la no informada menos. O sea, la empresa informada, **si sus costes son altos**, sale ganando con el déficit de información, puesto que la otra empresa no conoce precisamente ese punto débil de la primera. Si sus costes fueran bajos, un razonamiento análogo nos mostraría que sale perdiendo con el déficit de información, es decir, le convendría más que la información fuese completa, de modo que la otra empresa conociera su punto fuerte consistente en costes bajos. De manera análoga por simetría, la empresa no informada sale perdiendo si los costes de la otra son altos y no lo sabe, y ganando si los costes de la otra son bajos y no lo sabe. Por lo que respecta a los consumidores, si los costes de $\mathbf{E_2}$ son altos, salen perdiendo, y ganando si son bajos.

Comparación en un caso particular sencillo

$$(a = 8,\ c = 0,\ \varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_0 = 0 \text{ y } p = 2/3)$$

Si la información es completa y los costes de $\mathbf{E_2}$ son altos, es decir, $c' = 1$:

$$q_1^* = 3 \quad \text{y} \quad q_2^* = 2 \qquad u_1^* = 9 \quad \text{y} \quad u_2^* = 4 \qquad q_1^* + q_2^* = 5$$

Si la información es completa y los costes de $\mathbf{E_2}$ son bajos, es decir, $c' = 0$:

$$q_1^* = 8/3 \approx 2{,}667 \text{ y } q_2^* = 8/3 \approx 2{,}667 \qquad u_1^* = 64/9 \approx 7{,}111 \text{ y } u_2^* = 64/9 \approx 7{,}111$$
$$q_1^* + q_2^* = 16/3 \approx 5{,}333$$

Si la información es incompleta:

$$q_1^* = 52/18 \approx 2{,}889, \qquad q_2^*(c + \varepsilon_1) = 37/18 \approx 2{,}056 \quad \text{y} \quad q_2^*(c + \varepsilon_0) = 46/18 \approx 2{,}556$$
$$q_1^* + q_2^*(c + \varepsilon_1) = 89/18 \approx 4{,}945$$
$$q_1^* + q_2^*(c + \varepsilon_0) = 98/18 \approx 5{,}445$$
$$U_1^* = (52/18)^2 \approx 8{,}346, \quad U_2^*(c + \varepsilon_1) = (37/18)^2 \approx 4{,}225$$
$$y \quad U_2^*(c + \varepsilon_0) = (46/18)^2 \approx 6{,}531$$

Resumamos estos últimos resultados en la Tabla 5.2:

Tabla 5.2

Parámetros: $a = 8$, $c = 0$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_0 = 0$ y $p = 2/3$			
	u_1^*	u_2^*	$q_1^* + q_2^*$
Información completa y costes de $\mathbf{E_2}$ altos	9	4	5
Información incompleta y costes de $\mathbf{E_2}$ altos	8,3	4,2	4,9
Información completa y costes de $\mathbf{E_2}$ bajos	7,1	7,1	5,3
Información incompleta y costes de $\mathbf{E_2}$ bajos	8,3	6,5	5,4

Se observa en la tabla que, si los costes de $\mathbf{E_2}$ son altos, la información incompleta beneficia a $\mathbf{E_2}$ y perjudica a $\mathbf{E_1}$ y a los consumidores. Ocurre al revés si dichos costes son bajos.

5.4. APLICACIONES: SUBASTAS

Las subastas constituyen quizá la principal aplicación de los juegos estáticos de información incompleta. Su importancia no ha dejado de crecer en las últimas décadas, y ahora se usan en cualquier contexto, sea público o privado, en cualquier escala, sea de decenas o de millones de euros, y para comprar o vender los más diversos artículos.

Aunque hay muchas actividades de compraventa que reciben el nombre de subastas, podríamos definir intuitivamente en términos generales una subasta como un juego en el cual los compradores potenciales de un bien expresan su disposición a pagar por él mediante declaraciones llamadas pujas, y el resultado del juego (quién o quiénes han de recibir el bien y quién o quiénes, y cuánto, han de pagar) queda completamente determinado por la información suministrada en forma de pujas. Cada resultado del juego determinará la ganancia final para cada participante, que dependerá de si recibe o no el bien, y en caso de recibirlo, de su beneficio neto, es decir, de la diferencia entre el valor que dicho participante atribuye al bien (cantidad máxima que estaría dispuesto a pagar por él) y el gasto que le ocasiona.

El valor que cada jugador o participante atribuye al bien subastado, también denominado valoración, es una cantidad que, en la mayor parte de las situaciones que estudiaremos, él y sólo él conoce, y que los demás jugadores sólo pueden conjeturar de manera probabilística. Se trata del tipo de cada jugador.

Una clase particular de subastas, las subastas en sobre cerrado, constituye uno de los ejemplos más conocidos, y el más fácil de analizar teóricamente. En ellas las pujas son cantidades escritas que se entregan en un sobre cerrado, cuyo contenido sólo conoce el licitante que las escribió, y se hacen públicas todas a la vez en un acto de apertura de sobres.

En esta sección se estudiarán, bajo diferentes hipótesis simplificadoras, algunas de las clases más importantes y sencillas de subastas, en particular las subastas de un único objeto en sobre cerrado al primer y al segundo precio. Para un estudio más completo y detallado sobre subastas de uno y de varios objetos, puede consultarse la reciente monografía de Krishna (2002).

Subastas en sobre cerrado al primer precio

El interés teórico de las subastas en sobre cerrado radica en el hecho de que, aparte de ser las más fáciles de estudiar (por su carácter estático), su análisis sirve como referencia cuando se aborda el estudio de otras subastas más difíciles. De entre las subastas en sobre cerrado, las subastas al primer precio, que analizaremos a continuación, son el tipo más común. Su descripción es la siguiente:

Varios licitantes (los jugadores) acuden a una subasta para comprar un objeto. Han de entregar en sobre cerrado su puja, la cantidad que están dispuestos a pagar por dicho objeto. Se abren los sobres y se adjudica el objeto a aquel licitante que escribió una puja más alta, y se le hace pagar dicha puja. Si hay varias (por ejemplo, h) pujas *iguales que son las más altas, se adjudica el objeto a uno de estos h jugadores al azar, con probabilidad 1/h de que sea cualquiera de ellos. Los pagos o ganancias del juego son las utilidades que cada jugador atribuye a los beneficios.*

Antes de abordar el análisis de los equilibrios, y para entrar en materia, vamos a analizar y aclarar algunas estrategias posibles:

a) Toda estrategia s_i es una regla de decisión que especifica una acción, la puja del jugador i, por cada valoración (tipo) v_i de dicho jugador.
b) Toda estrategia s_i en que, para algún tipo v_i, ocurre que $s_i(v_i) > v_i$, está dominada, al menos débilmente, por alguna otra, pues al tipo v_i sólo podría ocasionarle pérdidas hacer una puja superior al valor que atribuye al objeto.
c) La estrategia $s_i(v_i) = v_i$ hace todo lo posible por ganar, pero no produce nunca ganancias positivas.
d) La estrategia $s_i(v_i) = 0$ hace todo lo posible por conseguir ganancias altas, pero tiene muy pocas posibilidades de ganar.

Así pues, en el análisis del juego, se determinará para cada jugador i una estrategia que siempre (para cada tipo o valor v_i) establezca una puja menor o igual que el valor v_i, y que encuentre un balance apropiado entre la búsqueda de pagos altos en caso de ser ganadora, y la búsqueda de una probabilidad alta de ganar. En concreto, para cada jugador y cada tipo de dicho jugador, su puja óptima tendrá que maximizar el pago esperado de dicho jugador, teniendo en cuenta las estrategias de los demás.

A continuación especificaremos las hipótesis relativas a la distribución de probabilidad, cuyo conocimiento será de dominio público, con la que cada jugador elabora sus conjeturas acerca de los tipos de los demás jugadores. Ello nos permitirá abordar el cálculo de los equilibrios de Nash. Puesto que es muy difícil encontrar todos los perfiles de equilibrio, intentaremos solamente encontrar algunos de los más simples (que son también los más importantes), en particular los equilibrios simétricos, en los cuales todos los jugadores juegan la misma estrategia.

Añadamos dos importantes hipótesis básicas que mantendremos mientras no se advierta lo contrario. La primera, que llamaremos **hipótesis de valor privado**, especifica que el valor v_i que el jugador i atribuye al objeto subastado es perfectamente conocido por él en el momento de pujar, y sólo por él. La segunda, que llamaremos **hipótesis de simetría de los licitantes**, especifica que la valoración v_i es una variable aleatoria para cada jugador i, pero la misma para todos los jugadores, es decir, la valoración de los jugadores es independiente pero se distribuye según la misma función de distribución. Otra hipótesis que mantendremos por ahora es la de neutralidad al riesgo de todos los jugadores, según la cual las ganancias vienen dadas por los beneficios monetarios.

Modelo básico de valor privado: subastas en sobre cerrado al primer precio, con valoraciones distribuidas de forma independiente e idéntica

Para ordenar didácticamente el análisis de los distintos casos relevantes, estudiaremos en primer lugar el ejemplo más simple, con sólo dos licitantes, la distribución de probabilidad más sencilla, y neutralidad al riesgo. A continuación estudiamos el caso general (n licitantes y distribución genérica) con jugadores neutrales al riesgo y un corolario, y por último estudiamos una extensión sencilla al caso de jugadores aversos al riesgo.

Con el fin de facilitar el análisis, y sin pérdida de generalidad, supondremos que el objeto subastado tiene para cada licitante una valoración mínima nula y máxima igual a la unidad.

Dos licitantes y distribución uniforme

Los elementos del juego son los siguientes:

Conjuntos de acciones:

$A_1 = A_2 = [0, 1]$, donde por a_i denotaremos la puja que hace el licitador i

Conjuntos de tipos de los participantes:

$T_1 = T_2 = [0, 1]$, donde por v_i denotaremos el valor que el objeto a subastar tiene para el licitador i, es decir, el tipo del jugador i.

Conjeturas de los jugadores:

A priori conocemos que la valoración de cada jugador procede de una distribución de probabilidad uniforme en el intervalo [0, 1], y que las valoraciones individuales son independientes unas de otras. Por tanto, la conjetura de cada jugador, dado su tipo, se corresponde exactamente con las probabilidades a priori. Es decir, sabemos que

$$\text{prob}\,(v_i < x) = x, \qquad \forall i = 1, 2,$$

y que

$$\text{prob}_i\,(v_j < x/v_i = y) = x \qquad \forall i, j = 1, 2, i \neq j \qquad \forall x, y \in [0, 1]$$

Espacios de estrategias de los jugadores:

Para cada jugador el espacio de estrategias va a ser el conjunto de aplicaciones que van del espacio de tipos al espacio de acciones:

$$S_i = \{s_i(v_i)\colon s_i\colon [0, 1] \to [0, 1]\}, \ \forall i = 1, 2$$

Ganancias o pagos de los jugadores (que son neutrales al riesgo):

$$u_i(a_i, a_j; v_i, v_j) = \begin{cases} (v_i - a_i) & \text{si} \quad a_i > a_j \\ 0 & \text{si} \quad a_i < a_j \\ (v_i - a_i)/2 & \text{si} \quad a_i = a_j \end{cases} \qquad \forall i, j = 1, 2$$

Teorema 5.2

Sea una subasta de un bien, en sobre cerrado al primer precio y con dos jugadores, en la cual las valoraciones de ambos jugadores son independientes y tienen una distribución de probabilidad uniforme en el intervalo [0, 1]. Sea [0, 1] asimismo el intervalo de pujas aceptables.

Entonces, el perfil simétrico $(s_1(v_1) = v_1/2, s_2(v_2) = v_2/2)$ es un equilibrio bayesiano del juego.

Demostración:

Supongamos que el jugador 2 sigue la estrategia $s_2(v_2) = v_2/2$ y veamos si la estrategia $s_1(v_1) = v_1/2$ es una respuesta óptima esperada de J1 a dicha estrategia de J2. Lo será si la acción $a_1 = v_1/2$ es solución, para cualquier valoración v_1, al siguiente problema de maximización de la ganancia esperada de J1:

$$\max_{a_1 \in [0,1]} E_{v_2}\left[u_1\left(a_1, \frac{v_2}{2}; v_1, v_2\right)\right]$$

donde $E_{v_2}\left[u_1\left(a_1, \frac{v_2}{2}; v_1, v_2\right)\right]$ es el valor esperado, según la variable aleatoria v_2, de la función de ganancias $u_1\left(a_1, \frac{v_2}{2}; v_1, v_2\right)$ de J1. Expresemos la ganancia esperada de J1 en términos de probabilidades de ganar la subasta y de ganancias efectivas en caso de ganar la subasta.

$$\begin{aligned} E_{v_2}\left[u_1\left(a_1, \frac{v_2}{2}; v_1, v_2\right)\right] &= \text{prob (J1 gana la subasta)}(v_1 - a_1) + \\ &+ \text{prob (J1 y J2 empatan)}(v_1 - a_1)/2 + \\ &+ \text{prob (J1 pierde la subasta)}(0) \\ &= \text{prob}\,(a_1 > a_2)(v_1 - a_1) + 0 + 0 = \\ &= \text{prob}\,(a_1 > v_2/2)(v_1 - a_1) \\ &= \text{prob}\,(v_2 < 2a_1)(v_1 - a_1) = 2a_1(v_1 - a_1) \end{aligned}$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\partial E_{v_2}\left[u_1\left(a_1, \frac{v_2}{2}; v_1, v_2\right)\right]}{\partial a_1} = 2(v_1\text{-}2a_1) = 0; \qquad a_1 = v_1/2$$

Y la condición de segundo orden es

$$\frac{\partial^2 E_{v_2}\left[u_1\left(a_1, \frac{v_2}{2}; v_1, v_2\right)\right]}{\partial a_1^2 =} -4 < 0 \text{ (que corresponde a un máximo)}$$

Así pues, $s_1(v_1) = v_1/2$ es respuesta óptima de J1 a la estrategia $s_2(v_2) = v_2/2$ de J2. Análogamente, $s_2(v_2) = v_2/2$ es respuesta óptima de J2 a la estrategia $s_1(v_1) = v_1/2$ de J1, y por tanto, $(s_1(v_1) = v_1/2, s_2(v_2) = v_2/2)$ es un EB.

Un número *n* de licitantes y distribución general de valoraciones

Vamos a abordar ahora un modelo general de subasta en sobre cerrado al primer precio, en el cual hay un número cualquiera de jugadores cuyas valoraciones v_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con una distribución de probabilidad F sobre [0, 1] que supondremos tiene una función de densidad $f(=F')$ continua en [0, 1]. En este caso, los elementos del juego son:

Acciones: $A_1 = \cdots = A_n = [0, 1]$, donde a_i es la puja del jugador i.
Tipos: $T_1 = \cdots = T_n = [0, 1]$, donde v_i es el valor que el jugador i atribuye al bien.

Cada jugador conoce su propia valoración pero no las de los demás.
Conjeturas:
Probabilidades a priori:

$$\text{prob}\,(v_i < x) = F(x),\ \forall i = 1, ..., n,\ \forall x \in [0, 1]$$

Probabilidades a posteriori, tras conocer cada jugador su valoración:

$$\text{prob}_i\,(v_j < x/v_i = y) = F(x),\ \forall i, j = 1, ..., n,\ i \neq j,\ \forall x, y \in [0, 1]$$

por ser las valoraciones individuales independientes unas de otras.

Estrategias: $S_i = \{s_i(v_i)\colon s_i\colon[0, 1] \to [0, 1]\}\ \forall i = 1, ..., n$
Ganancias:

$$u_i(a_i, \boldsymbol{a}_{-i}; v_i, \boldsymbol{v}_{-i}) = \begin{cases} (v_i - a_i) & \text{si} \quad a_i > \alpha_i \\ 0 & \text{si} \quad a_i < \alpha_i \\ (v_i - a_i)/n_{\alpha_i} & \text{si} \quad a_i = \alpha_i \end{cases}$$

donde $\alpha_i = \max\{\boldsymbol{a}_{-i}\} = \max\{a_j\colon j \neq i\}$, $\forall i = 1, ..., n$, y además n_{α_i} es el número de licitantes (incluido i) que pujan una cantidad α_i.

Teorema 5.3

Sea una subasta de un bien, en sobre cerrado al primer precio y con un número cualquiera n de jugadores, en la cual las valoraciones v_i de los jugadores son variables aleatorias independientes entre sí y tienen una distribución de probabilidad F, la misma para todos, con densidad continua f en [0, 1]. Sea [0, 1] asimismo el intervalo de pujas aceptables.

Entonces, existe un único EB simétrico en estrategias crecientes y diferenciables, y está constituido por las siguientes estrategias:

$$s_i(v_i) = E[Z_i \mid Z_i < v_i],\ \forall i = 1, 2, ..., n \tag{5.1}$$

donde Z_i es la variable aleatoria $\max\{v_j\colon j \neq i\}$.

Demostración:

a) Vamos a ver en primer lugar que (5.1) es condición necesaria, es decir, que si $(s_i^*(v_i))_{i=1,2,...,n}$ es un EB simétrico en estrategias crecientes y diferenciables, entonces $s_i^*(v_i) = E[Z_i \mid Z_i < v_i]$.

Supongamos que el perfil $(s_i^*(v_i))_{i=1,\ 2,\ldots,n}$ es un EB simétrico en estrategias crecientes y diferenciables. Así pues, la función s_i^* es idéntica a s_j^*, $i, j \in \{1, \ldots n\}$, y en particular $s_i^*(1) = s_j^*(1)$ y $s_i^*(0) = s_j^*(0)$, $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $s^* = s_j^*$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$. Además, cada s_i^* es respuesta óptima esperada del jugador i a las estrategias $(s_j^*(v_j))_{j \neq i}$ de los demás. Obsérvense también tres hechos:

- Para ningún jugador i puede ser óptimo responder a las estrategias $(s_j^*(v_j))_{j \neq i}$ de los demás con una puja a_i estrictamente mayor que $s^*(1)$. En efecto, si $a_i > s^*(1)$, conseguiría un pago mayor pujando $a_i' = \dfrac{a_i + s^*(1)}{2} < a_i$, pues ganaría igualmente la subasta con esta puja menor.
- Para ningún jugador i puede ser óptimo responder a las estrategias $(s_j^*(v_j))_{j \neq i}$ de los demás, supuesto que su valoración sea $v_i = 0$, con una puja a_i estrictamente positiva. En efecto, si $a_i > 0$ siendo $v_i = 0$, conseguirá unas ganancias negativas si gana la subasta. Así pues, $s^*(0) = 0$.
- La probabilidad de que coincidan las valoraciones v_i y v_j de dos licitantes distintos es nula, por ser éstas variables aleatorias independientes con función de densidad continua.

El jugador i, en respuesta a las estrategias $(s_j^*(v_j))_{j \neq i}$ de los demás, gana la subasta si y sólo si su puja a_i es mayor que α_i, siendo α_i el máximo de las pujas $a_j = s_j^*(v_j)$ de los demás. Es decir, i gana si y sólo si $a_i > \alpha_i = \max\{a_j = s^*(v_j)\colon j \neq i\}$. Por otra parte, por ser s^* estrictamente creciente, $\alpha_i = \max\{s^*(v_j)\colon\ j \neq i\} = s^*(Z_i)$, ya que $Z_i = \max\{v_j\colon j \neq i\}$. En consecuencia, i gana si y sólo si $a_i > s^*(Z_i)$, o dicho de manera equivalente, por ser s^* estrictamente creciente:

$$i \text{ gana si y sólo si } s^{*-1}(a_i) > Z_i$$

donde $s^{*-1}(a_i)$ denota la función inversa de $s^*(a_i)$, es decir, es la valoración v_i que lleva a pujar a_i cuando se juega la estrategia $s^*(a_i)$.

Así pues, la ganancia esperada del jugador i si puja a_i en respuesta a las estrategias $(s_j^*(v_j))_{j \neq i}$ de los demás es

$$\begin{aligned} E_{(v_j)_{j\neq i}}[u_i(a_i, \boldsymbol{a}_{-i}; v_i, \boldsymbol{v}_{-i})] &= \text{prob}\,(i \text{ gana la subasta})(v_i - a_i) + \\ &+ \text{prob}\,(i \text{ pierde la subasta})(0) = \\ &= \text{prob}\,(s^{*-1}(a_i) > Z_i)(v_i - a_i) = G(s^{*-1}(a_i))(v_i - a_i) \end{aligned}$$

siendo G la función de distribución de la variable aleatoria Z_i. El problema de maximización de i es el siguiente:

$$\max_{a_i \in [0,1]} G(s^{*-1}(a_i))(v_i - a_i)$$

La condición de primer orden correspondiente es

$$\frac{\partial(G(s^{*-1}(a_i))(v_i - a_i))}{\partial a_i} = 0$$

Tras hacer los cálculos (aplicando en particular el teorema de la función inversa), se obtiene

$$g(s^{*-1}(a_i))\,\frac{\partial(s^{*-1}(a_i))}{\partial a_i}\,(v_i - a_i) - G(s^{*-1})(a_i)) = 0$$

$$\frac{g(s^{*-1}(a_i))}{s^{*\prime}(s^{*-1}(a_i))}\,(v_i - a_i) - G(s^{*-1}(a_i)) = 0$$

donde $g = G'$ es la función de densidad de Z_i. Si $s_i^*(v_i)$ es la solución del problema de maximización planteado, $a_i = s_i^*(v_i)$ cumplirá la condición de primer orden anterior, de lo que se obtiene

$$\frac{g(v_i)}{s^{*\prime}(v_i)}\,(v_i - s^*(v_i)) - G(v_i) = 0$$

$$g(v_i)s^*(v_i) + G(v_i)s^{*\prime}(v_i) = g(v_i)v_i$$

que es equivalente a

$$\frac{d[G(v_i)s^*(v_i)]}{dv_i} = g(v_i)v_i$$

Integrando en ambos miembros, y teniendo en cuenta que $s^*(0) = 0$, se obtiene

$$s^*(v_i) = \frac{1}{G(v_i)}\int_0^{v_i} wg(w)\,dw = E[Z_i\,|\,Z_i < v_i]$$

Además, resolviendo por partes la integral y teniendo en cuenta que $G(v_i) = F(v_i)^{n-1}$, dado que las valoraciones son independientes, tenemos

$$s^*(v_i) = \frac{1}{G(v_i)}\left[v_iG(v_i) - \int_0^{v_i} G(w)\,dw\right] = v_i - \int_0^{v_i}\frac{G(w)}{G(v_i)}\,dw$$

$$s^*(v_i) = v_i - \int_0^{v_i}\left(\frac{F(w)}{F(v_i)}\right)^{n-1} dw < v_i$$

lo que nos permite confirmar de un modo efectivo que la puja óptima es inferior a la valoración.

b) Veamos ahora que (5.1) es condición suficiente, es decir, que si $s_i^*(v_i) = E[Z_i\,|\,Z_i < v_i]$, $\forall i = 1, \ldots, n$, entonces $(s_i^*(v_i))_{i = 1,\, 2, \ldots, n}$ es un EB simétrico.

Supongamos que, salvo el jugador i, todos los demás juegan las estrategias $s_j^*(v_j) = E[Z_j\,|\,Z_j < v_j]$. Veremos que la estrategia $s_i^*(v_i) = E[Z_i\,|\,Z_i < v_i]$ del jugador i es respuesta óptima esperada a las anteriores. Si v_i es la valoración del jugador i, y éste hace una puja a_i, su pago esperado es

$$\begin{aligned}\bigcup(a_i, v_i) &= \text{prob}\,(i \text{ gana la subasta})(v_i - a_i) + \text{prob}\,(i \text{ pierde la subasta})(0) =\\ &= \text{prob}\,(s^{*-1}(a_i) > Z_i)(v_i - a_i) = G(s^{*-1}(a_i))(v_i - a_i) = G(x_i)(v_i - s^*(x_i)) =\\ &= G(x_i)v_i - G(x_i)s^*(x_i) = G(x_i)v_i - G(x_i)E[Z_i\,|\,Z_i < x_i] =\end{aligned}$$

$$= G(x_i)v_i - \int_0^{x_i} wg(w)\,dw = \text{(integrando por partes, con } w = u \text{ y } g(w)\,dw = dv)$$

$$= G(x_i)v_i - G(x_i)x_i + \int_0^{x_i} G(w)\,dw = G(x_i)(v_i - x_i) + \int_0^{x_i} G(w)\,dw$$

donde hemos llamado x_i a $s^{*-1}(a_i)$, es decir a la valoración que determinaría, de acuerdo con las estrategias del supuesto equilibrio, la puja a_i. Análogamente, si v_i es la valoración del jugador i, y éste hace una puja $s_i^*(v_i) = E[Z_i \mid Z_i < v_i]$, su pago esperado es

$$\bigcup(s_i^*(v_i), v_i) = G(v_i)(v_i - v_i) + \int_0^{v_i} G(w)\,dw = \int_0^{v_i} G(w)\,dw$$

La diferencia es

$$\bigcup(s_i^*(v_i), v_i) - \bigcup(a_i, v_i) = -G(x_i)(v_i - x_i) + \int_{x_i}^{v_i} G(w)\,dw$$

y dicha diferencia es siempre positiva, tanto si $x_i \leqslant v_i$ como si $x_i \geqslant v_i$, por ser G creciente. En efecto, si $x_i \leqslant v_i$ tenemos

$$-G(x_i)(v_i - x_i) + \int_{x_i}^{v_i} G(w)\,dw = [G(\theta) - G(x_i)](v_i - x_i), \text{ donde } \theta \in [x_i, v_i]$$

y si $x_i \geqslant v_i$ tenemos

$$-G(x_i)(v_i - x_i) + \int_{x_i}^{v_i} G(w)\,dw = G(x_i)(x_i - v_i) - \int_{v_i}^{x_i} G(w)\,dw = (G(x_i) - G(\theta))(x_i - v_i)$$

donde $\theta \in [v_i, x_i]$.

En conclusión, cuando todos los demás juegan las estrategias $s_j^*(v_j) = E[Z_j \mid Z_j < v_j]$ del supuesto equilibrio simétrico, el jugador i, con valoración v_i, obtiene una ganancia esperada máxima jugando también su puja $s_i^*(v_i) = E[Z_i \mid Z_i < v_i]$. Por tanto, $(s_i^*(v_i))_{i=1,\,2,\ldots,n}$ es efectivamente un equilibrio simétrico.

El teorema anterior establece que la condición necesaria y suficiente para que en dicha subasta un perfil estratégico sea un equilibrio bayesiano simétrico en estrategias crecientes y diferenciables es que la estrategia en dicho perfil de cualquier licitante i sea

$$s_i^*(v_i) = E[Z_i \mid Z_i < v_i]$$

de modo que cada licitante i realice una puja $s_i^*(v_i)$ igual al valor esperado de Z_i (la máxima de las valoraciones de todos los demás), supuesto que dicha valoración máxima Z_i es menor que su propia valoración v_i. La demostración está basada en la ofrecida en Krishna (2002).

Corolario del Teorema 5.3

Si la distribución de probabilidad F es la uniforme, el único EB simétrico está constituido por las siguientes estrategias:

$$s_i(v_i) = (n-1)v_i/n, \qquad \forall i = 1, 2, ..., n \tag{5.2}$$

Demostración:

Sabemos que el único EB simétrico es $(s_i^*(v_i))_{i=1,2,...,n}$, donde $s_i^*(v_i) = E[Z_i | Z_i < v_i]$. Si la distribución de probabilidad F es la uniforme, eso significa que $F(z) = z$ y $f(z) = 1$, $\forall z \in [0, 1]$. Por otra parte, por ser independientes las valoraciones, podemos deducir

$$G(x) = \text{prob}\,(Z_i < x) = \text{prob}\,(\max\{v_j : j \neq i\} < x) = \text{prob}\,(v_j < x, \forall j \neq i) = (F(x))^{n-1}$$

En consecuencia, tenemos:

$$s^*(v_i) = E[Z_i | Z_i < v_i] = \frac{1}{G(v_i)}\int_0^{v_i} wg(w)\,dw = \frac{1}{v_i^{n-1}}\int_0^{v_i} w(n-1)w^{n-2}\,dw =$$

$$= \frac{n-1}{v_i^{n-1}}\left[\frac{w^n}{n}\right]_0^{v_i} = \frac{(n-1)v_i}{n}$$

Obsérvese que, como era de prever, si particularizamos el resultado de este corolario para $n = 2$, obtenemos precisamente el equilibrio simétrico para dos jugadores ($s_1^*(v_1) = v_1/2$, $s_2^*(v_2) = v_2/2$), calculado anteriormente.

Obsérvese también que conforme crece el número de licitantes, la puja de equilibrio se acerca cada vez más a la valoración $\lim_{n \to \infty} \frac{(n-1)v_i}{n} = v_i$.

Dos licitantes aversos al riesgo y distribución uniforme

Los elementos del juego son ahora los mismos que en el caso visto anteriormente salvo en las ganancias. Ahora las utilidades que a cada jugador reporta cada resultado del juego no coinciden con los beneficios sino que son una función estrictamente cóncava de los beneficios. Para concretar, supongamos que se trata de la raíz cuadrada positiva de los beneficios.

Para no complicar los cálculos supondremos que estos individuos tienen un comportamiento independiente de su nivel de riqueza, ya que en caso contrario nos veríamos obligados a tenerla en cuenta en cada función de ganancias. La ganancias de los jugadores son ahora:

$$u_i(a_i, a_j; v_i, v_j) = \begin{cases} q(v_i - a_i) = (v_i - a_i)^{1/2} & \text{si} \quad a_i > a_j \\ 0 & \text{si} \quad a_i < a_j \\ q\left(\dfrac{v_i - a_i}{2}\right) = \left(\dfrac{v_i - a_i}{2}\right)^{1/2} & \text{si} \quad a_i = a_j \end{cases} \qquad \forall i, j = 1, 2$$

Teorema 5.4

Sea una subasta de un bien, en sobre cerrado al primer precio y con dos jugadores, en la cual las valoraciones de ambos jugadores son independientes y tienen una distribución de probabilidad uniforme en el intervalo [0, 1]. Sea [0, 1] asimismo el intervalo de pujas aceptables, y supongamos que la utilidad de cada jugador i viene dada por la función estrictamente cóncava de los beneficios $q(v_i - a_i) = (v_i - a_i)^{1/2}$.

Entonces, el perfil simétrico $(s_1(v_1) = 2v_1/3, s_2(v_2) = 2v_2/3)$ es un equilibrio bayesiano del juego.

Demostración:

Supongamos que el jugador 2 sigue la estrategia $s_2(v_2) = 2v_2/3$ y veamos si la estrategia $s_1(v_1) = 2v_1/3$ es una respuesta óptima esperada de J1 a dicha estrategia de J2. Lo será si la acción $a_1 = 2v_1/3$ es solución, para cualquier valoración v_1, al siguiente problema de maximización de la ganancia esperada de J1:

$$\max_{a_1 \in [0,1]} E_{v_2}\left[u_1\left(a_1, \frac{2v_2}{3}; v_1, v_2\right)\right]$$

donde

$$E_{v_2}\left[u_1\left(a_1, \frac{2v_2}{3}; v_1, v_2\right)\right]$$

es el valor esperado, según la variable aleatoria v_2, de la función de ganancias

$$u_1\left(a_1, \frac{2v_2}{3}; v_1, v_2\right)$$

de J1. Expresemos la ganancia esperada de J1 en términos de probabilidades de ganar la subasta y de ganancias efectivas en caso de ganar la subasta.

$$\begin{aligned} E_{v_2}\left[u_1\left(a_1, \frac{2v_2}{3}; v_1, v_2\right)\right] &= \text{prob (J1 gana la subasta)} q(v_1 - a_1) = \\ &= \text{prob}\,(a_1 > 2v_2/3) q(v_1 - a_1) = \\ &= \text{prob}\,(v_2 < 3a_1/2) q(v_1 - a_1) = 3a_1 q(v_1 - a_1)/2 \end{aligned}$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\partial E_{v_2}\left[u_1\left(a_1, \frac{2v_2}{3}; v_1, v_2\right)\right]}{\partial a_1} = 3q(v_1 - a_1)/2 - 3a_1 q'(v_1 - a_1)/2 = 0;$$

$$a_1 = \frac{q(v_1 - a_1)}{q'(v_1 - a_1)}$$

Y la condición de segundo orden es

$$\frac{\partial^2 E_{v_2}\left[u_1\left(a_1,\ \frac{2v_2}{3};\ v_1,\ v_2\right)\right]}{\partial a_1^2} = -3q'(v_1 - a_1)/2 - 3q'(v_1 - a_1)/2 + 3a_1 q''(v_1 - a_1)/2 < 0$$

(que corresponde a un máximo, ya que $q' > 0$ y $q'' < 0$).

En el caso particular que nos ocupa, en el cual $q(v_i - a_i) = (v_i - a_i)^{1/2}$, la condición de primer orden es

$$a_1 = \frac{q(v_1 - a_1)}{q'(v_1 - a_1)} = \frac{2(v_1 - a_1)^{1/2}}{(v_1 - a_1)^{-1/2}} = 2(v_1 - a_1)$$

de donde se deduce: $a_1 = 2v_1/3$. Así pues, $s_1(v_1) = 2v_1/3$ es respuesta óptima de J1 a la estrategia $s_2(v_2) = 2v_2/3$ de J2. Análogamente, $s_2(v_2) = 2v_2/3$ es respuesta óptima de J2 a la estrategia $s_1(v_1) = 2v_1/3$ de J1, y por tanto, $(s_1(v_1) = 2v_1/3,\ s_2(v_2) = 2v_2/3)$ es un EB.

Observación 5.5:

a) No es que en el equilibrio bayesiano los jugadores pujen lo mismo, sino que proceden del mismo modo. Sólo en el caso excepcional en que sus valoraciones resulten idénticas, lo serán sus pujas.

b) Se ve claramente que, en el caso de valoraciones uniformemente distribuidas, la puja de equilibrio de los jugadores aversos al riesgo ($a_i^* = (2/3)v_i$) es mayor que la de los neutrales al riesgo ($a_i^* = (1/2)v_i$). En general, en las subastas de primer precio con valoraciones independientes, un licitador averso al riesgo presentará una puja mayor que en el caso de ser neutral al riesgo. Ello se debe a que una puja más alta aumenta la probabilidad de ganar, lo que, en el caso de jugadores aversos al riesgo, compensa de una menor ganancia esperada.

Subastas en sobre cerrado al segundo precio (subasta de Vickrey)

Varios licitantes (los jugadores) acuden a una subasta para comprar un objeto. Han de entregar en sobre cerrado su puja. Se abren los sobres y se adjudica el objeto a aquel licitante que escribió una puja más alta, y se le hace pagar la puja más alta de entre las restantes pujas. Si hay varias (por ejemplo, h) pujas iguales que son las más altas, se adjudica el objeto a uno de estos h jugadores al azar, con probabilidad 1/h de que sea cualquiera de ellos. Cada licitante tiene una valoración del objeto que sólo él conoce. Las ganancias o pagos del juego son las utilidades que a cada jugador reportan los beneficios.

Curiosamente, este juego es mucho más fácil de resolver; incluso para el caso en que hay n jugadores, las valoraciones siguen una distribución no necesariamente uniforme y se permite que los jugadores sean aversos o propensos al riesgo. Además, la solución puede ser válida en circunstancias más generales. En efecto, vamos a demostrar que para cada jugador, su estrategia dominante es pujar precisamente su valoración. La justificación intuitiva es que, dado que sólo la probabilidad de ganar depende de la puja, mientras que la ganancia depende del resto de jugadores cuando gana, si puja más, y gana por ello, puede tener ganancias negativas, mientras que si puja menos, no altera sus ganancias en caso de ganar, pero se arriesga a perder. Lo anterior implica que el perfil en que «todos dicen la verdad», $(b_1(v_1) = v_1, b_2(v_2) = v_2, ..., b_n(v_n) = v_n)$, es el único EB. Precisemos esa afirmación en el Teorema 5.5.

Teorema 5.5

Sea una subasta de un bien, en sobre cerrado al segundo precio y con un número cualquiera n de jugadores, en la cual las valoraciones v_i de los jugadores están en el intervalo [0, 1]. Sea [0, 1] asimismo el intervalo de pujas aceptables.

Entonces, existe un único EB simétrico y está constituido por las siguientes estrategias:

$$s_i(v_i) = v_i \tag{5.3}$$

Además, la estrategia de cada jugador en dicho EB es débilmente dominante.

Es decir, la condición necesaria y suficiente para que en dicha subasta un perfil estratégico sea un equilibrio bayesiano simétrico es que la estrategia en dicho perfil de cualquier licitante i sea $s_i^*(v_i) = v_i$, de modo que cada licitante i realice una puja $s_i^*(v_i)$ igual a su valoración.

Demostración:

Las ganancias de los jugadores son

$$u_i(a_i, \boldsymbol{a}_{-i}; v_i, \boldsymbol{v}_{-i}) = \begin{cases} (v_i - \alpha_i) & \text{si} \quad a_i > \alpha_i \\ 0 & \text{si} \quad a_i < \alpha_i \\ (v_i - \alpha_i)/n_{\alpha_i} & \text{si} \quad a_i = \alpha_i \end{cases}$$

donde $\alpha_i = \max\{\boldsymbol{a}_{-i}\} = \max\{a_j : j \neq i\}$ es la puja máxima del resto de jugadores que compiten con el jugador i, y además $n\alpha_i$ es el número de licitantes que pujan dicha cantidad α_i (incluido el jugador i). Hemos supuesto por simplicidad neutralidad al riesgo en todos los jugadores, pero ello no afecta al razonamiento.

Vamos a probar la afirmación de que para cada jugador, la estrategia de pujar su verdadera valoración es una estrategia débilmente dominante. Para ello, consideraremos los casos $\alpha_i > v_i$ y $\alpha_i < v_i$ (supondremos por simplicidad que el caso $\alpha_i = v_i$ se produce con probabilidad cero), y compararemos las ganancias resultantes de hacer $a_i = v_i$ (pujar el valor que para el individuo tiene el bien) con las ganancias resultantes de hacer $a_i > v_i$ (pujar por encima de la verdadera valoración) y de hacer $a_i < v_i$ (pujar por debajo de la verdadera valoración).

1. Supongamos que $\alpha_i > v_i$ (la máxima oferta del resto de jugadores es superior al valor del objeto para el jugador i). Bajo esta hipótesis podemos distinguir distintos casos en función de la puja que realice el jugador i:

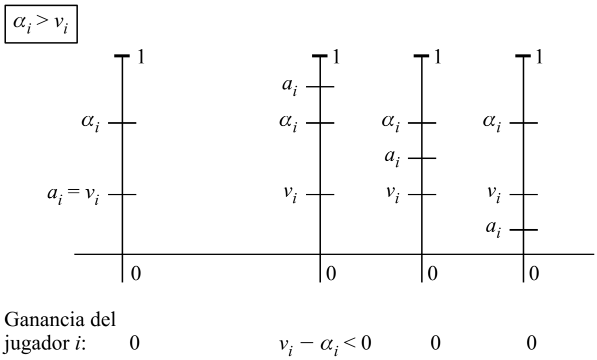


Figura 5.14 Posibilidades correspondientes al caso $\alpha_i > v_i$.

- Si $a_i = v_i$ (la puja del jugador i es igual a su valoración), el licitador i obtiene una ganancia 0, puesto que, al ser $a_i < \alpha_i$, el licitador i no gana la subasta y por tanto no obtiene ni paga nada.
- Si $a_i > \alpha_i > v_i$ (la puja del jugador i es mayor que la máxima puja del resto de jugadores y ésta es mayor que su valoración), el licitador i obtiene una ganancia $v_i - \alpha_i < 0$, puesto que, al ser $a_i > \alpha_i$, el licitador i gana la subasta, pero paga por el objeto una cantidad superior a lo que lo valora.
- Si $v_i < a_i < \alpha_i$ (la puja del jugador i es mayor que su valoración, pero menor que la máxima puja del resto de jugadores), el licitador i obtiene una ganancia 0, puesto que, al ser $a_i < \alpha_i$, el licitador i no gana la subasta y por tanto no obtiene ni paga nada.
- Si $a_i < v_i < \alpha_i$ (la puja del jugador i es menor que su valoración y ésta es menor que la máxima puja del resto de jugadores), el licitador i obtiene una ganancia 0, puesto que, al ser $a_i < \alpha_i$, el licitador i no gana la subasta y por tanto no obtiene ni paga nada.

Por tanto, cuando la puja máxima del resto de jugadores se encuentra por encima de la valoración del jugador i, pujar dicho valor domina débilmente a pujar algo diferente. Cuando se puja la verdadera valoración, es decir, cuando se revela la valoración mediante la puja el jugador i se asegura no sufrir una ganancia negativa.

2. Supongamos ahora que $\alpha_i < v_i$ (la máxima oferta del resto de jugadores es inferior al valor del objeto para el jugador i). De nuevo, bajo esta hipótesis podemos distinguir distintos casos en función de la puja que realice el jugador i (*véase* Figura 5.15):

- Si $a_i = v_i$ (la puja del jugador i es igual a su valoración), el licitador i obtiene una ganancia positiva $v_i - \alpha_i$, puesto que, al ser $a_i > \alpha_i$, el licitador i gana la subasta.
- Si $a_i > v_i > \alpha_i$ (la puja del jugador i es mayor que su valoración y ésta es mayor que la máxima puja del resto de jugadores), el licitador i obtiene una ganancia $v_i - \alpha_i > 0$, (la misma que cuando $a_i = v_i$) puesto que, al ser $a_i > \alpha_i$, el licitador i gana la subasta.
- Si $v_i > a_i > \alpha_i$ (la puja del jugador i es mayor que la máxima puja del resto de jugadores, pero menor que su valoración), el licitador i obtiene una ganancia $v_i - \alpha_i > 0$, (la misma que cuando $a_i = v_i$) puesto que, al ser $a_i > \alpha_i$, el licitador i gana la subasta.

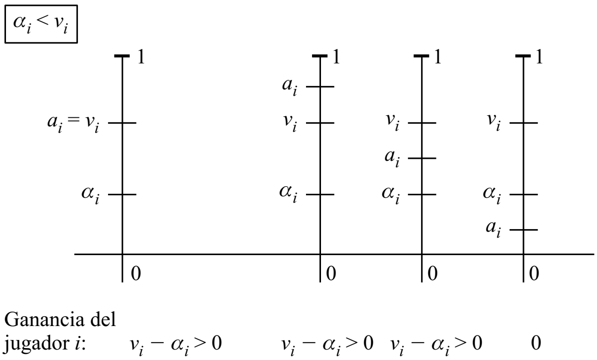


Figura 5.15 Posibilidades correspondientes al caso $\alpha_i < v_i$.

- Si $a_i < \alpha_i < v_i$ (la puja del jugador i es menor que la máxima puja del resto de jugadores, y ésta es menor que su valoración), el licitador i obtiene una ganancia 0, puesto que, al ser $a_i < \alpha_i$, el licitador i no gana la subasta y por tanto no obtiene ni paga nada.

Por tanto, cuando la puja máxima del resto de jugadores se encuentra por debajo de la valoración del jugador i, pujar dicho valor domina débilmente a pujar algo diferente. Cuando puja su verdadera valoración el jugador i se asegura ganar la subasta y obtener una ganancia positiva.

En conclusión, revelar la verdadera valoración a través de la puja domina débilmente a no revelarla. Teniendo en cuenta este resultado, podemos afirmar que en equilibrio:

i) el ganador de la subasta es el individuo que posea una valoración más alta v_n, indicando con ello que, al igual que la subasta al primer precio, se trata de una subasta eficiente.
ii) pagará la segunda valoración más alta v_{n-1}, y
iii) obtendrá una ganancia igual a $v_n - v_{n-1}$.

Además, puesto que la ganancia es independiente de la puja, este comportamiento es válido para cualquier tipo de actitud ante el riesgo y no se ve influido por el número de licitantes.

El principio de equivalencia de ingresos

En el estudio de las subastas en sobre cerrado que hemos realizado hasta ahora aparecen distintas reglas posibles de asignación del bien y distintas hipótesis relativas a la naturaleza y conocimiento de las valoraciones y a la actitud ante el riesgo de los licitantes. Para cada situación contemplada, existe un tipo especial de equilibrio simétrico y, en consecuencia, un comportamiento predecible de los licitantes que depende fuertemente de las características de cada situación.

Esta proliferación de posibilidades suscita de manera natural importantes cuestiones relativas al diseño de las subastas, como por ejemplo:

- ¿Qué tipo de subasta sería recomendable que usara un gobierno para privatizar una empresa rentable? ¿Y para vender los derechos de extracción de petróleo en una zona?
- ¿Qué tipo de subasta sería recomendable que usara una empresa especializada para vender un cuadro bien conocido de Picasso? ¿Y para vender un pequeño cuadro de autor anónimo recién descubierto?

Las preguntas anteriores sólo tienen sentido cuando se especifica algún criterio desde el que valorar las posibilidades, y aunque no es el único, un criterio importante es el ingreso esperado de la subasta. De hecho, cualquier vendedor privado que subasta un bien desearía hacerlo bajo unas reglas que le garanticen un ingreso esperado lo más alto posible. En esta sección analizaremos con cierto detalle el ingreso que un vendedor esperaría obtener al poner a subasta un bien, ante n licitantes, en función de las características de dicha subasta.

Sorprendentemente el teorema siguiente establece que, dentro de una gama amplia de tipos de subastas, las características de la subasta no afectan al ingreso esperado. Antes de enunciarlo necesitamos algo de terminología.

Todas las subastas en sobre cerrado que hemos estudiado en este capítulo, salvo la del Ejemplo 5.7 (versión 1), que asigna el bien a un licitante al azar, se denominan subastas **estándar** porque tienen la propiedad de asignar el bien al licitante que ha hecho la puja más alta (o a alguno de ellos, en el caso de que haya varios empatados). Existen subastas estándar que no hemos estudiado, y que son curiosas e interesantes, al menos desde un punto de vista teórico. Por ejemplo la subasta al tercer precio, o la subasta al último precio, o la subasta en que todos pagan su puja o la subasta en que paga el licitante, pero no su puja sino una cantidad elegida al azar (como ocurre en el Ejemplo 5.7 (versión 2)). En las dos primeras se adjudica el objeto a quien entregó una puja mayor, pero se le hace pagar la tercera puja más alta, o la puja más baja. En la tercera subasta se adjudica el objeto a quien entregó una puja mayor, pero todos los participantes han de pagar su puja.

Teorema 5.6 Principio de equivalencia de ingresos

Considérense todas las subastas estándar de un bien, en sobre cerrado y con un número n de licitantes neutrales al riesgo, cuyas valoraciones v_i son variables aleatorias sobre [0, 1] independientes e idénticas, y cuyas pujas aceptables están asimismo en [0, 1].

Entonces, en cualquier equilibrio bayesiano simétrico en estrategias estrictamente crecientes en el que cualquier jugador con valoración nula realiza un pago con valor esperado nulo, el vendedor del bien obtiene el mismo ingreso esperado (sea cual sea la subasta particular considerada).

Demostración:

Sea H una cualquiera de esas subastas. Supongamos que el perfil $(s_i^*(v_i))_{i=1,2,\ldots,n}$ es un EB simétrico en estrategias estrictamente crecientes de H. Así pues, la función s_i^*

es estrictamente creciente e idéntica a s_j^*, $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$. Sea $b^{*H}(v_i)$ el valor esperado del pago que cualquier jugador i realiza en ese equilibrio si su valoración es v_i. Sabemos que, por hipótesis, $b^{*H}(0) = 0$.

Como anteriormente, sea $Z_i = \max\{v_j : j \neq i\}$, es decir, el máximo de las valoraciones de todos los licitantes, salvo el i. Supongamos que la función de distribución de cualquier v_i es F, con densidad $f = F'$ y que la función de distribución de cualquier Z_i es G, con densidad $g = G'$. El jugador i, en respuesta a las estrategias $(s^*_j(v_j))_{j \neq i}$ de los demás, gana la subasta si y sólo si su puja a_i es mayor que α_i, siendo α_i el máximo de las pujas $a_j = s_j^*(v_j)$ de los demás. Por otra parte, por ser s^* estrictamente creciente, $\alpha_i = \max\{s^*(v_j): j \neq i\} = s^*(Z_i)$. En consecuencia, i gana si y sólo si $a_i > s^*(Z_i)$, o dicho de manera equivalente, por ser s^* estrictamente creciente:

$$i \text{ gana si y sólo si } s^{*-1}(a_i) > Z_i$$

Supongamos que, salvo el jugador i, todos los demás juegan las estrategias de equilibrio $s^*_j(v_j)$. Si v_i es la valoración del jugador i, y éste hace una puja a_i, su ganancia esperada es, tal como se ha deducido en la demostración del Teorema 5.3,

$$\bigcup(a_i, v_i) = \text{prob}\,(s^{*-1}(a_i) > Z_i)(v_i - a_i) = G(s^{*-1}(a_i))(v_i - a_i) = G(x_i)(v_i - s^*(x_i)) =$$

$$= G(x_i)v_i - G(x_i)s^*(x_i)$$

que es el valor esperado de lo que se recibe menos el valor esperado de lo que se gasta. En la anterior expresión hemos llamado x_i a $s^{*-1}(a_i)$, es decir, a la valoración que determinaría, de acuerdo con las estrategias del supuesto equilibrio, la puja a_i.

El sustraendo $G(x_i)s^*(x_i)$, que es el valor esperado de lo que el jugador i paga cuando, con valoración v_i, responde a las estrategias del equilibrio $(s_j^*(v_j))$, $\forall j \neq i$, con $a_i = s^*(x_i)$, es también el valor esperado de lo que el jugador i paga cuando, con valoración x_i, responde a las estrategias de dicho equilibrio con la puja $s^*(x_i)$, que correspondería a su estrategia de equilibrio. Por tanto, $G(x_i)s^*(x_i) = b^{*H}(x_i)$.

En consecuencia,

$$\bigcup(a_i, v_i) = G(x_i)v_i - G(x_i)s^*(x_i) = G(x_i)v_i - b^{*H}(x_i)$$

El problema de maximización de i es ahora el siguiente:

$$\max_{x_i \in [0,1]} \bigcup(a_i, v_i) = G(x_i)v_i - b^{*H}(x_i)$$

La condición necesaria de primer orden correspondiente es

$$\frac{\partial(G(x_i)v_i - b^{*H}(x_i))}{\partial x_i} = g(x_i)v_i - \frac{d}{dx_i}\, b^{*H}(x_i) = 0$$

La puja de equilibrio $s^*(v_i)$ es óptima, y por tanto se cumple la condición anterior al sustituir a_i por $s^*(v_i)$, o lo que es lo mismo, al sustituir x_i por v_i. Al hacerlo, se obtiene

$$g(v_i)v_i - \frac{d}{dv_i} b^{*H}(v_i) = 0$$

Pero esa relación es válida para cualquier $w \in [0, 1]$. Por tanto:

$$\frac{d}{dw} b^{*H}(w) = g(w)w$$

Integrando en ambos miembros, y teniendo en cuenta que $b^{*H}(0) = 0$, se obtiene

$$[b^{*H}(w)]_0^{vi} = \int_0^{v_i} wg(w)\,dw;\ b^{*H}(v_i) = \int_0^{v_i} wg(w)\,dw$$

$$b^{*H}(v_i) = G(v_i)E[Z_i \,|\, Z_i < v_i]$$

Así pues, el valor esperado $b^{*H}(v_i)$ del pago que cualquier jugador i realiza en ese equilibrio si su valoración es v_i resulta ser el producto de $G(v_i)$, que es la probabilidad de que la variable aleatoria de valoración no alcance el valor v_i, por $E[Z_i \,|\, Z_i < v_i]$, que es el valor esperado de la mayor de las valoraciones de los demás jugadores supuesto que esta mayor valoración es menor que v_i. Obsérvese que este valor esperado $b^{*H}(v_i)$ no depende de las reglas de la subasta (al primer precio, o al segundo, o todos pagan, etc.), sino sólamente de la naturaleza de la variable aleatoria de valoración.

Por otra parte, el ingreso esperado del vendedor del bien subastado no es otra cosa que la suma esperada, calculada *ex ante* (tras saberse cuál es la distribución de probabilidad de las valoraciones, pero antes de que cada licitante conozca su propia valoración) de los pagos que van a realizar los licitantes, o lo que es lo mismo, el ingreso esperado del vendedor es n veces el valor esperado, antes de conocer su valoración, del pago a realizar por cualquier jugador i.

En conclusión el ingreso esperado del vendedor es:

$$nE_{v_i}[b^{*H}(v_i)] = nE_{v_i}[G(v_i)E[Z_i \,|\, Z_i < v_i]]$$

que tampoco depende de las reglas de la subasta, sino sólamente de la naturaleza de la variable aleatoria de valoración.

Una observación importante a tener en cuenta es que este teorema se basa en las suposiciones de valoraciones privadas e independientes, simetría de las funciones de distribución de las valoraciones y neutralidad al riesgo.

La alteración de alguno de estos supuestos causaría el incumplimiento de la tesis del teorema, al hacer depender el ingreso esperado del vendedor de las reglas concretas de la subasta.

Por ejemplo, si consideramos licitantes aversos al riesgo, el ingreso esperado del vendedor sería más alto en una subasta al primer precio que en una al segundo precio.

Algunos ejemplos de aplicación del principio de equivalencia de ingresos

Ejemplo 5.21 Caso en que las valoraciones v_i están uniformemente distribuidas en [0, 1]

Según el citado principio, cualquier subasta A del tipo descrito ha de producirle al vendedor (en el equilibrio del tipo también descrito) el siguiente ingreso esperado:

$$nE_{v_i}[b^{*A}(v_i)] = nE_{v_i}[G(v_i)E[Z_i \mid Z_i < v_i]]$$

Si las valoraciones v_i están uniformemente distribuidas en [0, 1], la función de distribución de v_i es $F(x) = x$, mientras que la función de distribución de Z_i es

$$G(x) = F(x)^{n-1} = x^{n-1}$$

En ese caso, el valor esperado $b^{*A}(v_i)$ del pago que cualquier jugador i realiza en ese equilibrio si su valoración es v_i resulta ser

$$G(v_i)E[Z_i \mid Z_i < v_i] = v_i^{n-1} \frac{(n-1)v_i}{n} = \frac{(n-1)v_i^n}{n}$$

por tanto, el ingreso esperado es

$$nE_{v_i}[b^{*A}(v_i)] = \int_0^1 (n-1)w^n \, dw = \left[\frac{(n-1)w^{n+1}}{n+-1}\right]_0^1 = \frac{(n-1)}{n+1}$$

Aunque en el ejemplo anterior hemos usado el principio de equivalencia de ingresos de manera directa con el fin de averiguar, dada una distribución específica de valoraciones (en ese caso la uniforme), el ingreso esperado para cualquier subasta, dicho principio puede usarse también, dada una distribución específica de valoraciones, para calcular equilibrios Bayesianos simétricos, aprovechando que sabemos cuál va a ser el ingreso esperado. Así lo haremos en el Ejemplo 5.22.

Ejemplo 5.22 Cálculo del EB simétrico en la subasta «todos pagan», para el caso en que las valoraciones v_i están uniformemente distribuidas en [0, 1]

Varios licitantes, n en total, acuden a una subasta para comprar un objeto. Han de entregar en sobre cerrado su puja, la cantidad que están dispuestos a pagar por dicho objeto. Se abren los sobres y se adjudica el objeto a aquel licitante que escribió una puja más alta, pero se les hace pagar a **todos los licitantes la puja que han escrito**. Si hay varias (por ejemplo, h) pujas iguales que son las más altas, se adjudica el objeto a uno de estos h jugadores al azar, con probabilidad $1/h$ de que sea cualquiera de ellos. Los pagos o ganancias del juego son las utilidades que cada jugador atribuye a los beneficios.

De esta subasta, a la que denotaremos abreviadamente TP, como de todas las consideradas en el principio de equivalencia de ingresos, sabemos que el valor esperado del pago que cualquier jugador i realiza en equilibrio (del tipo indicado) si su valoración es v_i es

$$b^{*TP}(v_i) = \int_0^{v_i} wg(w)\,dw = G(v_i)E[Z_i \mid Z_i < v_i]$$

Por otra parte, puesto que en esta subasta el pago que i realiza coincide exactamente con su puja, si el perfil $(s_i^*(v_i))_{i=1,\,2,\ldots,n}$ es un equilibrio del tipo citado, la puja de equilibrio $s_i^*(v_i)$ coincide con

$$b^{*TP}(v_i) = \int_0^{v_i} wg(w)\,dw$$

Falta por demostrar que el perfil simétrico $\left(s_i^*(v_i) = \int_0^{v_i} wg(w)\,dw\right)_{i=1,\,2,\ldots,n}$ es un equilibrio bayesiano y además cumple las características citadas.

Supongamos que, salvo el jugador i, todos los demás juegan las estrategias $s^*_j(v_j) = \int_0^{v_j} wg(w)\,dw$. Veremos, razonando como en la demostración del Teorema 5.3, que la estrategia $s_i^*(v_i) = \int_0^{v_i} wg(w)\,dw$ del jugador i es respuesta óptima esperada a las anteriores. Si v_i es la valoración del jugador i, y éste hace una puja a_i, su ganancia esperada es

$$\begin{aligned}\bigcup(a_i, v_i) &= \text{prob}\,(i \text{ gana la subasta})(v_i - a_i) + \text{prob}\,(i \text{ pierde la subasta})(-a_i) = \\ &= \text{prob}\,(x_i > Z_i)(v_i - a_i) + (1 - \text{prob}\,(x_i > Z_i))(-a_i) = \\ &= G(x_i)(v_i - a_i) + (1 - G(x_i))(-a_i) = G(x_i)v_i - a_i = \\ &= G(x_i)v_i - \int_0^{x_i} wg(w)\,dw\end{aligned}$$

donde hemos llamado x_i a $s^{*-1}(a_i)$. Esta ganancia esperada es exactamente la misma que la obtenida, al hacer una puja a_i siendo v_i la valoración, en la subasta al primer precio, tal como se ha deducido en la la demostración del Teorema 5.3. Por tanto, y por las mismas razones que allí, la puja óptima de i es $s_i^*(v_i) = \int_0^{v_i} wg(w)\,dw$. En consecuencia ese perfil sí es un EB. Por otra parte, es obvio que las estrategias $s_i^*(v_i) = \int_0^{v_i} wg(w)\,dw$ son crecientes y además $s_i^*(0) = 0$. Resumiendo, **en la subasta «todos pagan» el único EB del tipo citado es** $\left(s_i^*(v_i) = \int_0^{v_i} wg(w)\,dw\right)_{i=1,\,2,\ldots,n}$. Si las valoraciones son independientes y siguen la distribución uniforme, lo cual implica que $G(w) = (F(w))^{n-1} = w^{n-1}$, tendríamos:

$$s_i^*(v_i) = \int_0^{v_i} w^n\,dw = \left[\frac{w^{n+1}}{n+1}\right]_0^{v_i} = \frac{v_i^{n+1}}{n+1}$$

y por tanto, el único EB del tipo citado es

$$\left(s_i^*(v_i) = \frac{v_i^{n+1}}{n+1}\right)_{i=1,\ 2,\ldots,n}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

5.1 Considere el siguiente juego con información incompleta. Se lanzan dos monedas bien equilibradas. Si salen dos caras se juega la situación 1 y en caso contrario se juega la situación 2.

Situación 1

		J2	
		I	D
J1	A	4, 4	0, 1
	B	2, 2	1, 3

Situación 2

		J2	
		I	D
J1	A	3, 3	0, 0
	B	0, 0	7, 7

Teniendo en cuenta que tanto la distribución de probabilidad como lo que puede observar cada jugador es conocimiento común:

- Halle razonadamente los equilibrios bayesianos de Nash cuando sólo el jugador 1 observa el resultado del lanzamiento de las monedas.
- Discuta y resuelva la situación cuando ningún jugador observa dicho resultado.

5.2 Considere los siguientes juegos de información incompleta. Se selecciona al azar (con probabilidades p y $1 - p$, respectivamente) la situación 1 o 2. El jugador 1 sabe qué juego ha sido seleccionado, mientras que el jugador 2 sólo conoce las probabilidades mencionadas.

1. Juego 1

Situación 1

		J2	
		I	D
J1	A	2, 1	7, 0
	B	8, 4	4, 3

Situación 2

		J2	
		I	D
J1	A	3, 4	5, 7
	B	2, 2	4, 1

2. Juego 2

Situación 1

		J2	
		I	D
J1	A	a, b	0, −1
	B	0, 2	2, 0

Juego izquierdo ($p = 1/4$)

Situación 2

		J2	
		I	D
J1	A	−3, 2	1, −2
	B	0, −3	2, 0

Juego derecho ($1 - p = 3/4$)

Se pide:

- En el juego 1, hallar razonadamente los equilibrios bayesianos de Nash, en función del parámetro p.
- En el juego 2, sabiendo que $p = 1/4$ y $(1 - p) = 3/4$, ¿cuál es el mínimo valor de los parámetros a y b para que (A-B, I) sea un equilibrio bayesiano de Nash?

5.3 Considere los siguientes juegos con información incompleta. Supongamos que se lanzan dos monedas bien equilibradas. Si salen dos caras se juega la situación 1, si salen dos cruces se juega la situación 2 y en caso contrario se juega la situación 3. Sólo el jugador 1 observa el resultado del lanzamiento de las monedas y es conocimiento común lo que conoce cada jugador.

1. Juego 1

Situación 1

		J2	
		I	D
J1	A	3, 5	2, 0
	B	2, 1	3, 3

Situación 2

		J2	
		I	D
J1	A	5, 1	9, 2
	B	1, 2	1, 1

Situación 3

		J2	
		I	D
J1	A	3, 4	0, 3
	B	0, 3	1, 2

2. Juego 2

Situación 1

		J2	
		I	D
J1	A	5, 4	3, 1
	B	1, 1	a, 2

Situación 2

		J2	
		I	D
J1	A	5, 1	9, 2
	B	1, 2	1, 1

Situación 3

		J2	
		I	D
J1	A	2, 2	a, 3
	B	3, 6	4, b

- En el juego 1, determine los elementos del juego en forma estratégica y los equilibrios bayesianos.
- En el juego 2, teniendo en cuenta que $a < 4$, determine en función de los parámetros a y b, el o los equilibrios bayesianos.

5.4 Dos ejércitos enfrentados están posicionados para apoderarse de una isla. El comandante de cada ejército puede decidir «Atacar» o «No Atacar». Además cada ejército es «Fuerte» o «Débil» con igual probabilidad (siendo el resultado independiente de un ejército a otro), y el tipo de cada ejército sólo es conocido por su comandante. Los pagos son los siguientes: la isla es valorada en M si es conquistada. Un ejército puede apoderarse de la isla atacando cuando el oponente no lo hace o atacando cuando el oponente también ataca, siempre que en este último caso sea un ejército fuerte y se enfrente a un rival débil. Si dos ejércitos de idéntica fuerza atacan, ninguno conquista la isla. Un ejército también tiene un coste de luchar, que es s si es fuerte y w si es débil, siendo $s < w$. No hay coste de atacar si el rival no ataca.

Identifique todas las estrategias puras de equilibrio bayesiano de este juego.

5.5 Considérese de nuevo el Ejemplo 5.8 denominado «Un juego sencillo de la verdad» y analice qué sucede si cuando el resultado de los dos primeros lanzamientos es *XX* se asigna a J1 el tipo C y a J2 el tipo *X*.

5.6 Supongamos dos empresas E_1 y E_2 que compiten en el mercado de la fabricación de DVD. Ambas empresas han de tomar una decisión de manera simultánea siendo sus acciones disponibles las siguientes: (i) Competir Duramente (CD), por ejemplo, competir en precios con el fin de capturar una mayor cuota de mercado; (ii) Competir Suavemente (CS), por ejemplo, competir mediante el uso de la publicidad, es decir, generando imagen de marca y diferenciando el producto respecto al de la competencia.

El mercado en el que operan las empresas se encuentra caracterizado por un gran dinamismo tecnológico. Es decir, la tecnología queda obsoleta con gran rapidez, 1 ó 2 años, con lo que es imprescindible innovar y ser pionero en modos de producción más eficientes. En este sentido se sabe (es conocimiento común) que la empresa E_2 no es una empresa innovadora y utiliza una tecnología estándar β, mientras que la empresa E_1 es una empresa innovadora y ha estado investigando las posibilidades de una nueva tecnología α más eficiente y su posible implantación en su empresa. Así pues, se sabe que la empresa E_1 puede estar utilizando una tecnología α (lo que significaría que ha tenido éxito en su investigación) o una tecnología β (que representaría el fracaso de la tecnología α en su implantación por parte de la empresa E_1) con probabilidades $p = 0{,}4$ y $(1 - p) = 0{,}6$, respectivamente.

Teniendo en cuenta que los pagos que se producen son:

Tegnología α

		B	
		CD	CS
A	CD	1, −3	3, 2
	CS	3, 3	4, 2

prob $(\alpha) = p = 0{,}4$

Tegnología β

		B	
		CD	CS
A	CD	−3, −3	−4, 1
	CS	1, 4	3, 3

prob $(\beta) = 1 - p = 0{,}6$

Determine el comportamiento de ambas empresas en función de la información disponible.

5.7 Sea el duopolio de Cournot con información incompleta siguiente: dos empresas petroleras, E_1 y E_2, compiten en cantidades, y tienen las siguientes funciones de demanda inversa y de costes:

$$p_1(q_1, q_2) = 5 - 3q_1 + 2q_2, \qquad C_1(q_1) = 2q_1$$

$$p_2(q_1, q_2) = 6 - q_2 + 3q_1, \qquad C_2(q_2) = 3q_2$$

recientemente, la empresa E_1 ha sido inspeccionada por la Agencia de Medio Ambiente. El resultado de la inspección sólo es conocido por la empresa E_1, mientras que la empresa E_2 únicamente sabe que la empresa E_1 ha sido inspeccionada y que será o bien multada (con probabilidad p) con 1 u.m. por unidad producida, o bien absuelta (con probabilidad $1 - p$).

Teniendo en cuenta que esta distribución de probabilidad es conocimiento común, halle razonadamente el equilibrio bayesiano de Nash.

5.8 El juego de los rumores. Supongamos un sector de la economía en el que sólo operan las empresas A y B, las cuales se enfrentan a una demanda inversa $p(q_A, q_B) = 12 - q_A/3 - q_B/3$ y tienen como único factor de producción relevante la energía, que tiene un precio en el mercado de p_E de modo que el coste medio y marginal de dichas empresas es $c = p_E$ (no poseen costes fijos). Estas empresas se encuentran en un sector especial ya que deben planificar la producción sin tener un conocimiento exacto de cuál será el precio de la energía. En la actualidad el precio de la energía por unidad producida es $p_E = 4$, pero se ha difundido un rumor según el cual dicho precio podría pasar a ser el doble $p_E = 8$. Se sabe que los rumores suelen ser falsos en el 50% de los casos.

Supongamos que es conocimiento común que la empresa A sabe cuál es el precio y la B no lo sabe. Determine razonadamente cuál debe ser el equilibrio bayesiano y los beneficios de las empresas.

5.9 Sean dos empresas fabricantes de automóviles, R y S, compitiendo en cantidades, en una determinada región. Se sabe que el gobierno está considerando intervenir en el mercado regional. Dicha intervención tendría como efecto modificar la sensibilidad de la cantidad producida por R en el precio de mercado. En concreto, las empresas se enfrentarían a las siguiente función de demanda inversa $p = 6 - (1 + t)q_R - q_S$, donde t representa el efecto de la intervención sobre el precio. La estructura de costes de las empresas es la siguiente:

$$C(q_R) = cq_R \quad \text{y} \quad C(q_S) = 2cq_S$$

(costes marginales constantes iguales a c y $2c$, respectivamente). Las dos empresas saben que se están barajando intervenciones con los siguientes efectos: $t = 0$ con prob. 1/4 (sin efectos en la función de demanda inversa) y $t = 1$ con prob. 3/4.

Suponiendo que $t = 1$ y que el gobierno hace público dicho valor de t, hallar razonadamente el perfil de cantidades (q_R^*, q_S^*) que constituye un EN de este juego.

Suponiendo que es conocimiento común que R sí sabe el valor de t, pero S no lo sabe, halle razonadamente el perfil de cantidades $[(q_R^*(t=0), q_R^*(t=1)), q_S^*]$ que constituye un EB de este juego.

5.10 Sea el duopolio de Bertrand con información incompleta siguiente. Dos empresas de material escolar, Librosa y Tomosa, compiten en precios en el mercado, y tienen las siguientes funciones de demanda y de costes:

$$q_L(p_L, p_T) = a - 3p_L + 2p_T, \qquad c_L(q_L) = q_L$$
$$q_T(p_L, p_T) = b - p_T + 3p_L, \qquad c_T(q_T) = 3q_T$$

Estas empresas se caracterizan por tener que imprimir su producción con la suficiente antelación como para poder atender la demanda al comienzo del curso académico. Esto impide que puedan tener un conocimiento exacto de las condiciones de mercado en el momento de la producción. En este sentido, el gobierno está estudiando subvencionar a las familias el consumo de material escolar, lo que afectaría a la demanda de estas empresas. El anuncio del gobierno se hará efectivo al inicio del curso académico, después de que las empresas hayan realizado su producción. Es conocimiento común que la única información que poseen las empresas en el momento de la producción es que con probabilidad θ se realizará dicha subvención (es decir, $a = 5$ y $b = 3$), y que con probabilidad $(1 - \theta)$ el gobierno no la hará efectiva (es decir, $a = 3$ y $b = 2$). Asimismo, también es conocimiento común que la empresa Librosa ha obtenido cierta información fiable que le permite conocer con total fiabilidad cuál será la decisión del ejecutivo al respecto.

Halle razonadamente el equilibrio bayesiano de Nash.

5.11 Pedro subasta un objeto entre Susana y Ramón, los cuales pujan por dicho objeto, en una subasta al primer precio en sobre cerrado, de acuerdo con las siguientes reglas:

Sólo pueden ofrecer o pujar 100 o 200 € (incluso si no les interesa). Cada jugador es neutral ante el riesgo, y además, es conocimiento común:

Versión 1: la valoración de Ramón es 200 € y la valoración de Susana es 0 € con prob. 1/2 o 300 € con prob. 1/2.

Versión 2: la valoración de Ramón es 100 € con prob. 1/2 o 200 € con prob. 1/2, y la valoración de Susana es 0 € con prob. 1/2 o 300 €con prob. 1/2.

Se pide:

Determine la forma estratégica y extensiva de cada versión.

Halle razonadamente los equilibrios bayesianos de cada versión.

Considere de nuevo la versión 2, pero teniendo en cuenta que las probabilidades no son independientes, sino que siguen la siguiente distribución conjunta:

Probabilidad conjunta $p(v_R, v_S)$		v_S	
		$v_S = 0$	$v_S = 300$
v_R	$v_R = 100$	1/2	1/4
	$v_R = 200$	0	1/4

5.12 Consideremos una subasta al primer precio en sobre cerrado en la cual las valoraciones de los dos licitantes están distribuidas de forma independiente y uniforme en el intervalo [1, 4]. Supóngase que los jugadores son neutrales al riesgo y que cada uno de ellos puja en proporción al valor del objeto subastado y nunca más de lo que vale: $s_i(v_i) = r_i \cdot v_i$, donde $r \in [0, 1]$, donde v_i es la valoración del objeto por el individuo i. Se pide analizar qué sucede:

Cuando se sabe que el licitante 1 es demasiado ingenuo y siempre puja su valoración ($r_1 = 1$).

Cuando se sabe que el licitante 1 es demasiado reservado y siempre puja 1/4 de su valoración ($r_1 = 1/4$).

Determine qué sucede cuando no se conocen las estrategias de ningún jugador.

¿Cambian las cosas si los licitantes son adversos al riesgo? Considere el caso en el que para cada participante la utilidad del dinero es igual a la raíz cuadrada de los beneficios de la subasta y sólo se interesa por las ganancias del juego (no por su riqueza).

5.13 Analice de nuevo el Ejercicio 5.12 suponiendo ahora que la subasta es al segundo precio en sobre cerrado (subasta de Vickrey).

CAPÍTULO 6

Juegos dinámicos con información incompleta

En los capítulos anteriores se han estudiado dos extensiones de los juegos estáticos con información completa, los juegos dinámicos con información completa y los juegos bayesianos (estáticos con información incompleta), y se han analizado asimismo algunos conceptos de equilibrio apropiados a dichas situaciones. Los juegos dinámicos con información incompleta, que son el objeto de este capítulo, admiten aparte de una estructura temporal, la existencia de información privada por parte de algunos o todos los jugadores. Por tanto, si se aplicara en ellos la transformación de Harsanyi dondequiera que fuera necesaria (expresando cada momento del juego con información privada mediante una jugada de azar que reparte los distintos tipos), el juego final resultante sería un juego dinámico con información completa aunque imperfecta. En consecuencia, el marco apropiado para el estudio de los nuevos juegos de este capítulo, también llamados juegos bayesianos dinámicos, no es otro que el ya conocido de los juegos dinámicos con información imperfecta.

Así pues, es necesario preguntarse si el concepto de equilibrio que ya estudiamos en el Capítulo 4 para dicho marco, el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, es del todo apropiado o requerirá algún perfeccionamiento. La respuesta es que sí necesita tal perfeccionamiento. En una sección introductoria se explora mediante ejemplos el nuevo marco y se argumenta la necesidad de refinar el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. A continuación se introducen varias versiones de un nuevo concepto de equilibrio más apropiado (entre ellas el equilibrio bayesiano perfecto y el equilibrio secuencial), y por último se estudian algunas aplicaciones económicas.

6.1. INTRODUCCIÓN

Se argumenta en esta sección la insuficiencia, en los juegos dinámicos con información imperfecta, del equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, y se presentan algunos ejemplos introductorios y de motivación.

Recuérdese que para que en un juego G el perfil $\mathbf{s}^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*)$ sea un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, se le exige a dicho perfil que su restricción a cada subjuego de G sea un EN de tal subjuego. Esta exigencia descarta algunos equilibrios de Nash basados en amenazas no creíbles, al requerir respuestas óptimas en cada punto del juego que sea inicio de un subjuego, aunque dicho punto se encuentre fuera de la trayectoria del equilibrio. Comentábamos en el Capítulo 4 que este concepto de equilibrio es un paso adelante en la puesta en práctica del principio de racionalidad secuencial, según el cual la estrategia en equilibrio de cualquier jugador ha de ser una respuesta óptima, en cada punto del juego (sea o no sea el inicio de un subjuego, y esté o no esté en la trayectoria de dicho equilibrio), a las estrategias del resto de jugadores.

Precisamente, el punto débil del equilibrio de Nash perfecto en subjuegos reside en requerir de cada jugador respuestas óptimas sólo en los conjuntos de información que sean inicio de subjuegos. En efecto, aunque esa exigencia es suficiente en los juegos de información perfecta, en los cuales cada nodo de decisión es inicio de un subjuego, no lo es en muchas situaciones (que se dan de modo natural en los juegos dinámicos con información imperfecta) en las que es importante que un jugador actúe de manera óptima en conjuntos de información que no inician subjuegos. Los siguientes ejemplos ilustrarán el razonamiento anterior.

Ejemplos introductorios y de motivación

Ejemplo 6.1

Vamos a considerar dos modificaciones del juego de la disuasión 1, a las que llamaremos juego de la disuasión 3a y juego de la disuasión 3b. Supongamos ahora que hay un modo adicional de entrar en el mercado por parte de la empresa ENTRON, que consiste en realizar una cierta inversión sin que lo observe INCUMBRON.

Concretando, supongamos que en su jugada inicial ENTRON tiene tres posibilidades, *No entrar* (en cuyo caso se acaba el juego), *Entrar invirtiendo* y *Entrar sin invertir*, y que en los dos últimos casos le toca el turno a INCUMBRON, que puede *Competir duro* o *Competir suave*, pero que no sabe cuál es la jugada que realizó ENTRON. Los pagos finales son los mismos que en el juego original salvo que la jugada inicial sea *Entrar invirtiendo*. En ese caso, para la modalidad 3a los pagos son $(-1, 0)$ si INCUMBRON responde con *Competir duro*, y $(4, 2)$ si responde con *Competir suave*, mientras que para la modalidad 3b los pagos son $(-1, 2)$ si INCUMBRON responde con *Competir duro*, y $(4, 2)$ si responde con *Competir suave*.

La representación en forma extensiva de ambos juegos aparece en la Figura 6.1, en la que las expresiones *No entrar*, *Entrar invirtiendo*, *Entrar sin invertir*, *Competir duro* y *Competir suave*, se han sustituido, respectivamente, por las abreviaturas *Ne*, *Ei*, *Esi*, *Cd* y *Cs*.

Tanto en un juego como en el otro, hay 3 nodos de decisión, x_1, x_2 y x_3, que se han señalado en la Figura 6.1 y dos conjuntos de información, $h_1 = \{x_1\}$ y $h_2 = \{x_2, x_3\}$, uno de cada jugador. Obsérvese que en ambos juegos la acción *Ei* está estrictamente dominada por *Esi* y la acción *Cd* está débilmente dominada por *Cs*.

Juego de disuasión 3a

		INCUMBRON	
		Cd	*Cs*
ENTRON	*Ne*	3, 7	3, 7
	Ei	−1, 0	4, 2
	Esi	0, 0	5, 5

La representación en forma normal del primero de estos juegos es:

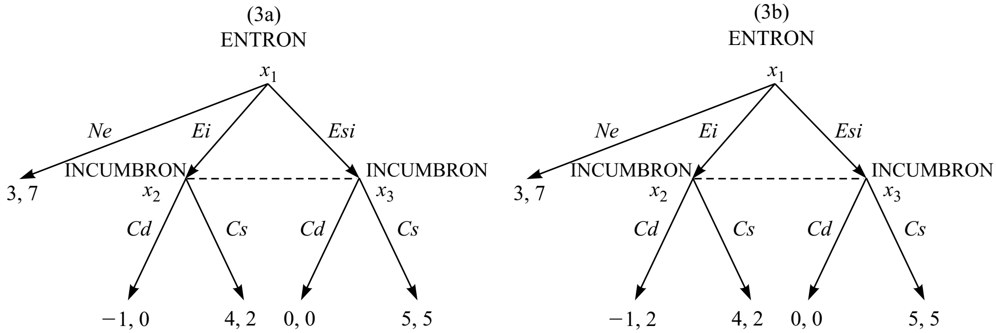


Figura 6.1 Juegos de la disuasión 3a y 3b.

y los EN en estrategias puras son (*Esi*, *Cs*) y (*Ne*, *Cd*). Por otra parte, estos dos equilibrios son perfectos en subjuegos, ya que no existe ningún subjuego propio (el único conjunto de información unitario es el constituido por el nodo inicial).

No obstante, es fácil ver que el segundo de ellos, (*Ne*, *Cd*), es un EN perfecto en subjuegos claramente insatisfactorio. En efecto, la acción o estrategia *Cd* que INCUMBRON realiza (o mejor dicho, amenaza con realizar) es estrictamente peor, sea cual sea el nodo de decisión en que INCUMBRON se encuentre, que la acción alternativa *Cs*. Parece, por tanto, que dicha acción *Cd* no es óptima y que podríamos calificarla como una amenaza no creíble, tal como hicimos en el juego de disuasión 1 propuesto en el Ejemplo 4.1, pero a diferencia de ese caso más simple, aquí estamos juzgando la optimalidad de dicha acción en un conjunto de información que, por no ser unitario, no inicia un subjuego.

Acabamos de identificar en este ejemplo un aspecto insatisfactorio del concepto de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Puesto que las características adicionales de racionalidad (aparte de optimalidad global) que este concepto exige a cada estrategia de equilibrio (optimalidad en cada subjuego) sólo se aplican a las decisiones tomadas en conjuntos de información que inician un subjuego, se permiten, en equilibrio, acciones claramente subóptimas en conjuntos de información no unitarios, como es el caso de la acción *Cd* de INCUMBRON en el perfil (*Ne*, *Cd*).

Por otra parte, la representación en forma normal del segundo juego es:

Juego de disuasión 3b

		INCUMBRON	
		Cd	*Cs*
ENTRON	*Ne*	3, 7	3, 7
	Ei	−1, 2	4, 2
	Esi	0, 0	5, 5

y los EN en estrategias puras son los mismos que en el anterior, (*Esi*, *Cs*) y (*Ne*, *Cd*), ambos perfectos en subjuegos. Sin embargo, el segundo de ellos, (*Ne*, *Cd*), no es ahora tan claramente insatisfactorio como en el caso anterior, pues la acción *Cd* proporciona a INCUMBRON la misma utilidad que *Cs* en el caso de que ENTRON juegue *Ei*.

Ejemplo 6.2

Vamos a considerar ahora una modificación aparentemente intrascendente del juego de la disuasión 3b, a la que llamaremos juego de la disuasión 3c. Supongamos ahora que en el nodo inicial ENTRON tiene dos acciones factibles, *No entrar* y *Entrar*, y que tras *Entrar* hay un nuevo nodo de decisión de ENTRON con las acciones factibles *Entrar invirtiendo* y *Entrar sin invertir*. La representación en forma extensiva, con las abreviaturas anteriores (y *E* para *Entrar*), aparece en la Figura 6.2.

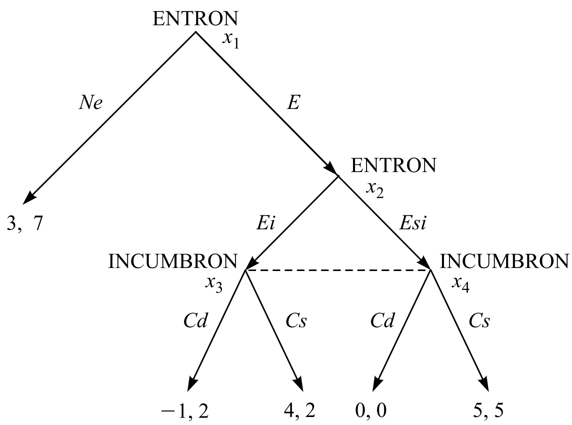


Figura 6.2 Juego de la disuasión 3c.

En este juego hay 4 nodos de decisión, x_1, x_2, x_3 y x_4, y hay tres conjuntos de información, $h_1 = \{x_1\}$ y $h_2 = \{x_2\}$ de ENTRON, y $h_3 = \{x_3, x_4\}$ de INCUMBRON. La representación en forma normal de este juego es:

Juego de disuasión 3c

		INCUMBRON	
		Cd	*Cs*
ENTRON	(*Ne*, *Ei*)	3, 7	3, 7
	(*Ne*, *Esi*)	3, 7	3, 7
	(*E*, *Ei*)	−1, 2	4, 2
	(*E*, *Esi*)	0, 0	5, 5

y los EN en estrategias puras son [(*E*, *Esi*), *Cs*], [(*Ne*, *Ei*), *Cd*] y [(*Ne*, *Esi*), *Cd*]. De estos tres equilibrios, sólo el primero es perfecto en subjuegos, pues los otros dos fallan en el único subjuego propio (que comienza en el nodo de decisión de ENTRON que sigue a *E*) del juego original.

Ejemplo 6.3

Vamos a considerar un juego con la estructura del juego del Trespiés, en el cual los pagos se han modificado. Le llamaremos juego del Trespiés 2, y se reproduce a continuación.

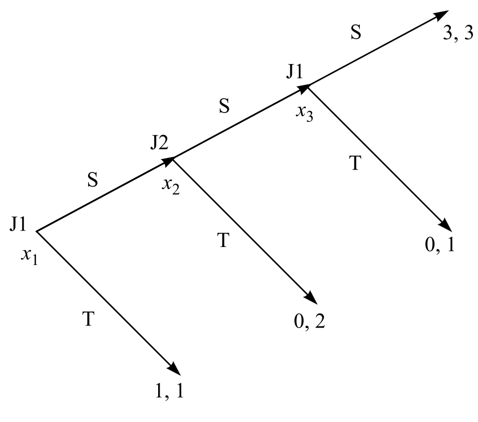


Figura 6.3 Juego del Trespiés 2.

En este juego hay 3 nodos de decisión, x_1, x_2 y x_3, y hay tres conjuntos de información, $h_1 = \{x_1\}$ y $h_3 = \{x_3\}$ de J1, y $h_2 = \{x_2\}$ de J2. El conjunto de estrategias puras de J1 es $S_1 = \{S - S, S - T, T - S, T - T\}$, donde S − T significa jugar S en el nodo inicial y T en el segundo, y el de J2 es $S_2 = \{S, T\}$. Debido a que este juego tiene información perfecta, la inducción hacia atrás es aplicable y conduce al perfil de equilibrio

$s = (\mathrm{S} - \mathrm{S}, \mathrm{S})$, que es el único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Por otra parte, la representación en forma estratégica de este juego es:

Juego del Trespiés 2 en forma estratégica

		J2	
		S	T
J1	S − S	3, 3	0, 2
	S − T	0, 1	0, 2
	T − S	1, 1	1, 1
	T − T	1, 1	1, 1

y de ella se deduce que los EN en estrategias puras son $s = (\mathrm{S} - \mathrm{S}, \mathrm{S})$, $s' = (\mathrm{T} - \mathrm{S}, \mathrm{T})$ y $s'' = (\mathrm{T} - \mathrm{T}, \mathrm{T})$.

Ejemplo 6.4

Considérese el siguiente juego bayesiano estático (ya fue analizado en el Ejemplo 5.4 del capítulo anterior) en forma extensiva:

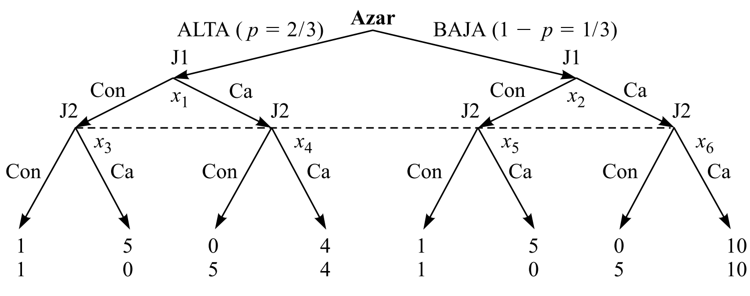


Figura 6.4 Juego bayesiano estático.

J1 tiene dos tipos, ALTA y BAJA, y J2 sólo uno. Hay 6 nodos de decisión, y hay tres conjuntos de información, $h_1 = \{x_1\}$ y $h_2 = \{x_2\}$ de J1, y $h_3 = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ de J2. El conjunto de estrategias puras de J1 es $S_1 = \{$*Confesar-Confesar*, *Confesar-Callar*, *Callar-Confesar*, *Callar-Callar*$\}$, con el significado habitual, y el de J2 es $S_2 = \{$*Confesar*, *Callar*$\}$. Su representación en forma normal o estratégica, reflejando los pagos esperados *ex ante* tanto de J1 como de J2 es

Juego bayesiano estático en forma estratégica

		J2	
		Confesar	Callar
J1	Confesar-Confesar	1, 1	5, 0
	Confesar-Callar	2/3, 7/3	20/3, 10/3
	Callar-Confesar	1/3, 11/3	13/3, 8/3
	Callar-Callar	0, 5	6, 6

Los equilibrios bayesianos en estrategias puras son (*Confesar-Confesar*, *Confesar*) y (*Confesar-Callar*, *Callar*).

Ejemplo 6.5

Considérese el siguiente juego con tres jugadores en forma extensiva, llamado el caballo de Selten:

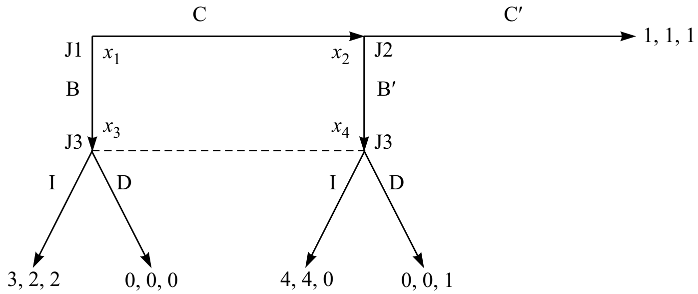


Figura 6.5 Caballo de Selten.

Hay 4 nodos de decisión, y hay tres conjuntos de información, $h_1 = \{x_1\}$ de J1, $h_2 = \{x_2\}$ de J2 y $h_3 = \{x_3, x_4\}$ de J3. Su representación en forma normal o estratégica es

Caballo de Selten en forma estratégica

J3: I		J2	
		C′	B′
J1	C	1, 1, 1	4, 4, 0
	B	3, 2, 2	3, 2, 2

J3: D		J2	
		C′	B′
J1	C	1, 1, 1	0, 0, 1
	B	0, 0, 0	0, 0, 0

Los equilibrios en estrategias puras son (B, C′, I) y (C, C′, D).

Ejemplo 6.6

El siguiente juego, que llamaremos venta de un coche usado, es un ejemplo del tipo de juegos que está en la base del modelo que Akerlof propuso en 1970, llamado Mercado de cacharros (*market for «lemons»*). En este juego, una potencial vendedora de un coche usado, Virtudes, hace una oferta de venta a un potencial comprador, Cándido. La oferta es un número v entre 0 y 1. Al recibir la oferta v de Virtudes, Cándido ha de decidir entre aceptarla (A) y rechazarla (RE). La calidad del coche, que puede ser alta (Ca) o baja (Cb), es una información privada de la vendedora, y el comprador sólo tiene una estimación de probabilidad a priori según la cual la probabilidad de que sea del tipo Ca es q. Sea $0 < q < 1$.

Supongamos que el valor de un coche de calidad alta es $u_{a,V}$ para la vendedora y $u_{a,C}$ para el comprador (siendo $0 < u_{a,V} < u_{a,C} < 1$) y que los valores correspondientes de un coche de calidad baja son $u_{b,V}$ y $u_{b,C}$ (siendo $0 < u_{b,V} < u_{b,C} < 1$). Supondremos también razonablemente que tanto V como C valoran más un coche si es de calidad alta ($u_{b,V} < u_{a,V}$ y $u_{b,C} < u_{a,C}$). Por último, llamemos $\varphi_q = qu_{a,C} + (1 - q)u_{b,C}$ al valor esperado a priori por el comprador de un coche cuya calidad no conoce. En la Figura 6.6 se representa el juego en forma extensiva. Para facilitar la visualización sólo se ha señalado con línea discontinua un conjunto de información de C.

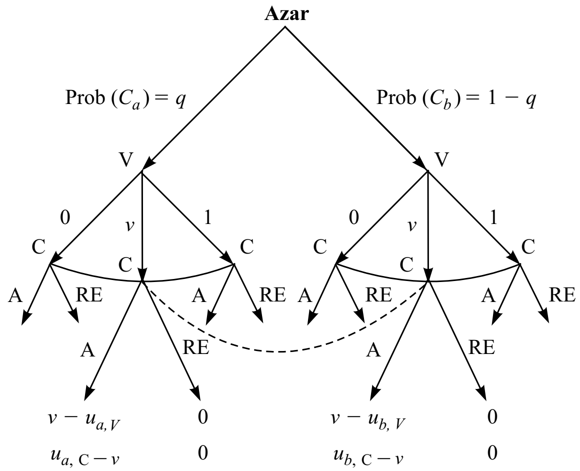


Figura 6.6 Venta de un coche usado.

La vendedora V tiene dos tipos, Ca y Cb, y el comprador C sólo uno. Los conjuntos S_V y S_C de estrategias puras son $S_V = \{(v_a, v_b)/v_a, v_b \in [0, 1]\}$ y $S_C = \{$Aplicaciones f: $[0, 1] \rightarrow \{A, RE\}\}$.

Merece la pena analizar los equilibrios en el caso más sencillo de que el comprador también conociera la calidad del coche en venta. En ese caso se trataría de un juego de información perfecta, resoluble por inducción hacia atrás (ahora las estrategias puras de C no serían aplicaciones de [0, 1] hasta {A, RE}, sino pares ordenados de dichas aplicaciones, una para cada tipo de coche. Es evidente que este juego de información perfecta tendría el siguiente equilibrio de Nash perfecto en subjuegos:

Vendedora: hace el par de ofertas $(v_a^*, v_b^*) = (u_{a,C}, u_{b,C})$
Comprador: en caso de calidad alta, elige A si y sólo si $v \leqslant u_{a,C}$.
en caso de calidad baja, elige A si y sólo si $v \leqslant u_{b,C}$.

El correspondiente resultado de equilibrio sería que el vendedor propone vender cada tipo de coche por la valoración que a este tipo atribuye el comprador, el comprador acepta y se realiza la transacción. Se trata de un equilibrio eficiente.

Volvamos ahora al planteamiento original, en el que la calidad del coche es una información privada de V. En este caso, no existen subjuegos propios, ya que los únicos conjuntos de información unitarios existentes son los nodos de decisión de V y éstos no inician subjuegos ya que intersecan varios conjuntos de información de C. En consecuencia, todo EN es perfecto en subjuegos. Consideremos tres resultados posibles del juego:

1. V vende a C el coche, sea cual sea su calidad, por el precio «máximo» que estaría dispuesto a pagar C por el coche de calidad baja, $u_{b,C}$. Es el resultado más favorable a C, dadas las reglas del juego.

2. V vende a C el coche, sea cual sea su calidad, por el precio «máximo» que estaría dispuesto a pagar C por el coche de calidad alta, $u_{a,C}$. Es el resultado más favorable a V, dadas las reglas del juego.

3. V vende a C el coche por $u_{a,C}$ si la calidad es alta y por $u_{b,C}$ si la calidad es baja. Es el resultado más equitativo, dadas las reglas del juego.

¿Son alcanzables en equilibrio dichos resultados? Veamos que el primero sí lo es, pero los dos últimos no. En efecto, el primero se alcanzaría si se pusieran en práctica las siguientes estrategias, que constituyen un EN (cualquiera de ellas es respuesta óptima a la otra), y por tanto un ENPS:

V: tanto si el tipo es C_a como si es C_b, propone $v = u_{b,C}$.
C: elige A si y sólo si $v \leqslant u_{b,C}$.

Sin embargo, para alcanzar el segundo sería preciso que la estrategia de V fuese «tanto si el tipo es C_a como si es C_b, proponer $v = u_{a,C}$» y que la estrategia de C implicase aceptar la propuesta $v = u_{a,C}$, y esto no sería una respuesta óptima de C a esa estrategia de V, pues el valor esperado del coche para C sería $\varphi_q = qu_{a,C} + (1 - q)u_{b,C}$ que es estrictamente menor que $v = u_{a,C}$.

En cuanto al tercero, para alcanzarlo sería preciso que la estrategia de V fuese «si el tipo es C_a, proponer $v = u_{a,C}$, y si es C_b, proponer $v = u_{b,C}$» y que la estrategia de C implicase aceptar cualquiera de las dos propuestas anteriores. Sin embargo, la estrategia mencionada de V prescribe para el tipo de baja calidad C_b una acción que no es óptima, dada la estrategia de C. En efecto, si (imitando al tipo de alta calidad) propusiera $v = u_{a,C}$, conseguiría una ganancia estrictamente mayor.

A la vista de estas observaciones, podría decirse que el hecho de que la calidad del coche sea una información privada, y no públicamente observable, perjudica las posibilidades de un coche de calidad alta. Podría pensarse que el vendedor de tal tipo de coche tiene fácil la solución del problema: proclamar públicamente la calidad de su coche para que esa información de que él dispone deje de ser privada y se haga dominio público. Desgraciadamente, esa proclamación no convencerá a casi nadie, porque también los vendedores de coches de baja calidad proclaman con obstinación las excelentes características de éstos.

6.2. EL EQUILIBRIO BAYESIANO PERFECTO

En esta sección se introducirá la terminología básica y se abordarán los conceptos más importantes, el equilibrio bayesiano perfecto, el equilibrio secuencial y el equilibrio perfecto de mano temblorosa para juegos en forma extensiva. Estos conceptos de equilibrio pretenden superar las limitaciones, ilustradas en ejemplos anteriores, del equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, que admite en ocasiones decisiones no óptimas en conjuntos de información que no inician subjuegos. Comencemos con algunas aclaraciones y definiciones previas, y en particular con las referidas a los distintos modos de representación estratégica de un juego y las distintas maneras de modelar las estrategias mixtas.

Representaciones de un juego. Representación multiagente

Dado un juego en forma extensiva, aparte de la conocida representación de dicho juego en forma estratégica o normal (propuesta por Von Neumann y Morgenstern), existe otra forma estática de representación (propuesta por Selten) que recibe los nombres de representación estratégica mediante agentes y de representación multiagente. Utilizaremos preferentemente esta segunda denominación.

Definición 6.1

Sea G un juego dinámico en forma extensiva. Sea J = {1, 2, ..., n} el conjunto de los n jugadores y sea $H = \{h_i\}_{i=1,2,\ldots,k}$ la familia finita de todos los conjuntos de información de G.

Llamamos ***representación estratégica mediante agentes*** de G o ***representación multiagente*** de G al juego en forma estratégica en el cual:

a) Hay k jugadores, uno distinto en cada conjunto de información, actuando de manera independiente, y cuyas acciones disponibles son las que tenía en ese conjunto de información el jugador de G al que le correspondía jugar allí.

b) A los nuevos jugadores que actúan en conjuntos de información del jugador Ji de G, se les llama agentes de Ji.

c) Todos los agentes de un mismo jugador Ji tienen los mismos pagos, y éstos coinciden con los pagos originales de Ji.

En la Observación 5.3 del capítulo anterior se describió la representación tipo-agente de un juego bayesiano estático. Es fácil comprobar que se trata de un caso particular, el correspondiente a dichos juegos, de la representación multiagente aquí definida, ya que en los juegos bayesianos estáticos cada jugador tiene un conjunto de información por cada tipo posible, de modo que puede decirse que cada tipo de Ji es un agente de Ji. Veamos algunos otros ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 6.7

a) Sea el juego de cartas de los Ejemplos 1.13 y 4.12. En él, Blanca tiene dos conjuntos de información, h_1 y h_2, ambos unitarios y con el mismo conjunto de acciones disponibles $A_1 = \{A, R\}$. Sus estrategias puras son las del conjunto $S_1 = \{A-A, A-R, R-A, R-R\}$, donde A − R significa *Apostar* si la carta es oro o copa, y *Retirarse* si es espada o basto. Por su parte, Carlos tiene un único conjunto de información, h_3, con dos nodos de decisión y con el conjunto de acciones disponibles $A_2 = \{\text{RA, P}\}$. Por tanto, Blanca tiene dos agentes, a los que llamaremos Blanca$_1$ (conjunto de información tras el resultado O − C del azar) y Blanca$_2$, y Carlos sólo tiene uno. A continuación mostramos su representación en forma multiagente:

Juego de cartas del Ejemplo 4.12 en forma multiagente

Carlos: RA		**Blanca$_2$** A	**Blanca$_2$** R
Blanca$_1$	A	0, 0, 0	5/2, 5/2, −5/2
	R	−5/2, −5/2, 5/2	0, 0, 0

Carlos: P		**Blanca$_2$** A	**Blanca$_2$** R
Blanca$_1$	A	5, 5, −5	0, 0, 0
	R	5, 5, −5	0, 0, 0

b) Sea el juego del Trespiés 2, definido en el Ejemplo 6.3 y representado allí en forma extensiva y estratégica. J1 tiene dos conjuntos de información, $h_1 = \{x_1\}$ y $h_3 = \{x_3\}$, ambos unitarios y con el mismo conjunto de acciones disponibles $A_1 = \{\text{S, T}\}$. Sus estrategias puras son las del conjunto $S_1 = \{\text{S − S, S − T, T − S, T − T}\}$, donde S − T significa jugar S en el nodo inicial y T en el segundo. J2 tiene un único conjunto de información, $h_2 = \{x_2\}$, también unitario y con el conjunto de acciones disponibles $A_2 = \{\text{S, T}\}$. Por tanto, J1 tiene dos agentes, a los que llamaremos J1$_1$ y J1$_2$, y J2 sólo tiene uno. Su representación en forma multiagente es:

Juego del Trespiés 2 en forma multiagente

J2: S		**J1$_2$** S	**J1$_2$** T
J1$_1$	S	3, 3, 3	0, 0, 1
	T	1, 1, 1	1, 1, 1

J2: T		**J1$_2$** S	**J1$_2$** T
J1$_1$	S	0, 0, 2	0, 0, 2
	T	1, 1, 1	1, 1, 1

c) Sea el juego bayesiano estático definido en el Ejemplo 6.4 y representado allí en forma extensiva y estratégica. J1 tiene dos conjuntos de información unitarios (uno por cada tipo, ALTA y BAJA), $h_1 = \{x_1\}$ y $h_2 = \{x_2\}$, y J2 tiene un conjunto de información con cuatro elementos, $h_3 = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Además, los conjuntos de acciones de ambos son $A_1 = A_2 = \{$*Confesar*, *Callar*$\}$ en cualquier conjunto de información. El conjunto de estrategias puras de J1 es $S_1 = \{$*Confesar-Confesar*, *Confesar-Callar*, *Callar-Confesar*, *Callar-Callar*$\}$, con el significado habitual, y el de J2 es $S_2 = \{$*Confesar*, *Callar*$\}$. Por tanto, J1 tiene dos agentes, a los que llamaremos J1$_1$ y J1$_2$, y J2 solo tiene uno. Su representación en forma multiagente es:

Juego bayesiano estático del Ejemplo 6.4 en forma multiagente

J2: Confesar		$J1_2$	
		Confesar	Callar
$J1_1$	Confesar	1, 1, 1	2/3, 2/3, 7/3
	Callar	1/3, 1/3, 11/3	0, 0, 5

J2: Callar		$J1_2$	
		Confesar	Callar
$J1_1$	Confesar	5, 5, 0	20/3, 20/3, 10/3
	Callar	13/3, 13/3, 8/3	6, 6, 6

Obsérvese que la representación multiagente en este juego no es otra que la representación tipo-agente que se describió en la Observación 5.3 del Capítulo 5.

Observación 6.1

Existe cierta ambigüedad en la denominación de una de las formas básicas de representación de un juego, a la que a veces se denomina forma normal y otras veces forma estratégica. Aunque esa ambigüedad no suele conducir a confusiones, debido a que el contexto suele hacer evidente a qué forma precisa nos referimos, merece la pena hacer un intento de precisión aclaratoria. En nuestra opinión, tanto la representación estratégica normal como la multiagente merecen ser llamadas formas de representación estratégica, porque ambas están constituidas por dos elementos, las estrategias puras completas de los jugadores y los pagos, que a su vez dependen de cuál de esas estrategias puras ha puesto en juego cada jugador. En contraste con ellas, la representación en forma extensiva de un juego refleja explícitamente todas las reglas del juego, y en particular los detalles de temporalidad y de información de dicho juego, pero las estrategias completas no están representadas.

Lo que diferencia a la primera de la segunda forma de representación es que la estratégica normal se basa en los jugadores originales y las estrategias completas de éstos, mientras que la multiagente se basa en un conjunto mayor de jugadores (los «agentes» de aquéllos, que los representan en cada conjunto de información) y en un conjunto menor de estrategias por cada jugador (las acciones disponibles en el correspondiente conjunto de información). Ambas formas estratégicas pueden interpretarse como una expresión compacta y simplificada del juego. De estas dos formas estratégicas de representación, tiene sentido que a la primera, que es la más natural y antigua, se la llame normal, y también que se la denomine a veces estratégica, a secas, y así se ha hecho desde los comienzos de la teoría de juegos.

En consecuencia, nos referimos a la primera llamándola o bien representación en forma **normal**, o bien **estratégica** o bien **estratégica normal**. Reservaremos para la segunda la denominación de representación en forma **multiagente**, o **normal con agentes** (*agent normal form*, en inglés) o **estratégica con agentes**.

Estrategias mixtas y estrategias de comportamiento

Al definir las estrategias mixtas en un juego dinámico con información imperfecta G, siendo H la familia de todos sus conjuntos de información, podríamos seguir dos ideas ya introducidas en este libro. La primera se inició en el Capítulo 3, en el contexto de los juegos estáticos de información completa, para los que sólo disponíamos de la representación en forma estratégica del juego. Allí, dado el conjunto $S_i = \{s_i^1, s_i^2, ..., s_i^k\}$ de estrategias puras del jugador i, se llamaba estrategia mixta de i a toda distribución de probabilidad sobre S_i, y se la denotaba σ_i.

La segunda idea procede del Capítulo 5, en el contexto de los juegos bayesianos. Allí, dados los conjuntos de acciones A_i y de tipos T_i del jugador i, se llamaba estrategia mixta a toda aplicación σ_i de T_i en $\Delta(A_i)$ que a cada tipo t_i le asigna una lotería $\sigma_i(t_i)$. Corresponde a la representación en forma tipo-agente de dichos juegos. Como nuestro contexto actual incluye los dos que acabamos de mencionar, y cualquier estrategia pura s_i del jugador i en G es una regla de decisión que a cada conjunto de información h_i de dicho jugador le asigna una de sus acciones disponibles en dicho conjunto, es posible aleatorizar sus decisiones de dos modos:

- Modo global, que consiste en aleatorizar en el conjunto de las estrategias puras del jugador i. En ese caso obtendríamos las llamadas estrategias mixtas propiamente dichas, que son las apropiadas a la representación en forma estratégica del juego.
- Modo local, que consiste en aleatorizar, para cada uno de los conjuntos de información del jugador i, y de manera independiente, en el conjunto de sus acciones disponibles en tal conjunto de información. En ese caso obtendríamos las llamadas estrategias de comportamiento, que son las apropiadas a la representación multiagente del juego.

Ilustremos lo anterior con un ejemplo.

Ejemplo 6.8

a) Sea el juego de la disuasión 3c, definido en el Ejemplo 6.2 y representado allí en forma extensiva y estratégica. ENTRON tiene dos conjuntos de información (y por tanto dos agentes), ambos unitarios, el primero con conjunto de acciones disponibles $A_1^1 = \{Ne, E\}$, y el segundo con $A_1^2 = \{Ei, Esi\}$. Sus estrategias puras son las del conjunto $S_1 = \{(Ne, Ei), (Ne, Esi), (E, Ei), (E, Esi)\}$. Sus estrategias mixtas propiamente dichas son todas las loterías $\sigma_1 = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ sobre S_1, mientras que sus estrategias de comportamiento son todos los pares ordenados $\bar{\sigma}_1 = ((r_1, r_2,), (t_1, t_2))$ cuya primera componente es una lotería sobre A_1^1 (conjunto de acciones del primer agente) y cuya segunda componente es una lotería sobre A_1^2 (conjunto de acciones del segundo agente). Es fácil ver que hay una relación natural entre las loterías tetradimensionales y los pares de loterías bidimensionales, de modo que a cada una de las primeras se le asigna una de las segundas equivalente a la anterior (equivalente en el sentido de que produce los mismos pagos a ambos jugadores al responder a cualquier estrategia de INCUMBRON). Por ejemplo, la lotería (1/3, 1/3, 1/6, 1/6) sobre S_1 es equivalente, desde el punto de vista de ENTRON, al par de loterías ((2/3, 1/3), (1/2, 1/2)) sobre A_1^1 y A_1^2. Podemos establecer un resultado más general: la lotería $\sigma_1 = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ sobre S_1 es equivalente al par de loterías $\bar{\sigma}_1 = ((q_1 + q_2, q_3 + q_4), (q_3/(q_3 + q_4), q_4/(q_3 + q_4))$ sobre A_1^1 y A_1^2 en caso de que $q_3 + q_4 \neq 0$, y al par $\bar{\sigma}_1 = ((q_1 + q_2, q_3 + q_4), (q_1/(q_1 + q_2), q_2/(q_1 + q_2)) = ((1, 0), (q_1, q_2))$ en caso de que $q_3 + q_4 = 0$, y por otra parte el par $\bar{\sigma}_1' = ((q_1', q_2'), (q_3', q_4'))$ es equivalente a la lotería $\sigma_1' = (q_1'q_3', q_1'q_4', q_2'q_3', q_2'q_4')$.

b) Sea el juego de cartas de nuevo. En el Ejemplo 6.7 se ha hecho su representación en forma multiagente. Recuérdese que el conjunto de acciones disponibles de Blanca en cualquiera de sus dos conjuntos de información unitarios es $A_1 = \{A, R\}$, que las estrategias puras de Blanca son las del conjunto $S_1 = \{A-A, A-R, R-A, R-R\}$, y que las de Carlos son las de su conjunto de acciones disponibles $A_2 = \{RA, P\}$. Además, Blanca tiene dos agentes, Blanca$_1$ y Blanca$_2$, y Carlos sólo tiene uno. Las estrategias mixtas propiamente dichas de Blanca son todas las loterías $\sigma_1 = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ sobre S_1 y sus estrategias de comportamiento son todos los pares ordenados $\bar{\sigma}_1 = ((r_1, r_2,), (t_1, t_2))$ cuyas dos componentes son loterías sobre A_1, mientras que para Carlos tanto sus estrategias mixtas propiamente dichas como sus estrategias de comportamiento son las loterías $(q'_1, q'_2,)$ sobre A_2. En el caso de Carlos sus estrategias mixtas propiamente dichas coinciden exactamente con sus estrategias de comportamiento, por tener un único conjunto de información.

Obsérvese que las estrategias de comportamiento de Blanca equivalen a combinaciones de estrategias mixtas de sus dos agentes. En general, los perfiles de estrategias de comportamiento de un juego dinámico G equivalen a perfiles de estrategias mixtas propiamente dichas de la representación multiagente de G.

Vimos en el Ejemplo 4.12 que no existe ningún EN en estrategias puras, y que el único EN, expresado como perfil de estrategias mixtas, es $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, donde $\sigma_1 = (1/3, 2/3, 0, 0)$ y $\sigma_2 = (2/3, 1/3)$. No resulta muy intuitiva la interpretación de la estrategia mixta σ_1 de Blanca, pero es equivalente a la estrategia de comportamiento $((1, 0), (1/3, 2/3))$, cuyo significado, más claro, es el siguiente:

«Si la carta es oro o copa, *Apostar* con seguridad, y si es espada o basto, *Apostar* con probabilidad 1/3 y *Retirarse* con probabilidad 2/3».

Hay algunos resultados generales que el ejemplo anterior ha ilustrado.

- En primer lugar, a partir de cada estrategia mixta propiamente dicha de un juego en forma extensiva (estrategia mixta en su representación estratégica) se genera de manera única una estrategia de comportamiento equivalente a la anterior, y a partir de cada estrategia de comportamiento de un juego en forma extensiva (estrategia mixta en su representación multiagente) se puede generar también una estrategia mixta propiamente dicha equivalente a la anterior ¿Es biunívoco el emparejamiento de cada estrategia mixta con una estrategia de comportamiento que sea equivalente? No lo es, pues es fácil ver que en el Ejemplo 6.8 (b) dos estrategias mixtas distintas de Blanca, $\sigma_1 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ y $\sigma'_1 = (1/2, 0, 0, 1/2)$, se emparejan con la misma estrategia de comportamiento $\bar{\sigma}_1 = ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$. De hecho, a menudo existen infinitas estrategias mixtas equivalentes a una misma estrategia de comportamiento.
- Puede decirse, en virtud de un teorema de Kuhn, que en los juegos de memoria perfecta cada estrategia mixta propiamente dicha de i es equivalente (tiene los mismos efectos en los pagos) a la única estrategia de comportamiento de i que genera, y cada estrategia de comportamiento de i es equivalente en el mismo sentido a cualquiera de las estrategias mixtas propiamente dichas de i que la generan (*véase* Myerson (1991), Sección 4.2, y Fudenberg y Tirole (1991), Sección 3.4.3). Los juegos de memoria perfecta se definen como aquellos en los que, cuando un jugador va a decidir en un conjunto de información, recuerda toda la información de la que ha dispuesto previamente en el jue-

go, incluyendo todas sus decisiones anteriores. Todos los juegos estudiados en este libro son de memoria perfecta.

Así pues, ambos modos de modelación de las estrategias, estrategias mixtas y estrategias de comportamiento, son igualmente válidos en principio. Sin embargo las estrategias de comportamiento son más comprensibles y fáciles de manejar. Así pues, en lo que sigue usaremos, salvo que se especifique lo contrario, estrategias de comportamiento (reglas que asignan a cada conjunto de información h_i del jugador i una lotería del conjunto de acciones de las que allí dispone), y las denominaremos σ_i.

Conjuntos de información dentro y fuera de la trayectoria de equilibrio

Si en un juego en forma extensiva con información imperfecta G (del que H es la familia de todos sus conjuntos de información) no existen jugadas de azar, cualquier perfil en estrategias puras $s = (s_1, ..., s_i, ..., s_n)$ determina completamente el desarrollo del juego. En ese caso, dado un conjunto de información h, o bien es alcanzado con seguridad en el desarrollo del juego o bien es seguro que no se alcanza. Por ejemplo, en el juego del Trespiés 2 todos los conjuntos de información son alcanzados por la trayectoria determinada por el equilibrio $s = (\mathrm{S} - \mathrm{S}, \mathrm{S})$.

Es evidente, sin embargo, que si existieran jugadas de azar en G o se tratase de un perfil $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ con alguna estrategia mixta, podrían existir conjuntos de información para los que no se pudiera afirmar con seguridad ni que serían alcanzados en el desarrollo del juego ni que no lo serían. En esos casos podría, no obstante, calcularse la probabilidad a priori de que fuesen alcanzados, y si ésta fuese no nula diríamos que tal conjunto de información está dentro de la trayectoria determinada por ese perfil. Por ejemplo, en el juego bayesiano del Ejemplo 6.4, todos los conjuntos de información, $h_1 = \{x_1\}$ y $h_2 = \{x_2\}$ de J1, y $h_3 = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ de J2, están dentro de la trayectoria determinada por cualquier perfil estratégico.

La definición siguiente concreta esta idea en relación a los perfiles de equilibrio.

Definición 6.2

Sea G un juego dinámico con información imperfecta, y $h \in H$ un conjunto de información. Sea $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ un perfil de equilibrio en G.

Decimos que el conjunto de información h está **en la trayectoria de equilibrio** si la probabilidad de que h sea alcanzado en el desarrollo del juego, suponiendo que se juega de acuerdo con σ, es estrictamente positiva (es decir, $\mathrm{prob}\,(h/\sigma) > 0$). Decimos que está **fuera de la trayectoria de equilibrio** si dicha probabilidad es nula.

Merece la pena observar:

- Que en cualquier juego estático finito, con o sin jugada de azar, y para cualquier perfil de equilibrio, todos los conjuntos de información están dentro de la trayectoria de dicho equilibrio.
- Que en cualquier juego finito, estático o dinámico, si $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ es un perfil de equilibrio (sea de estrategias mixtas propiamente dichas o estrategias de

comportamiento) en el cual todas las estrategias σ_i son mixtas completas, todos los conjuntos de información están dentro de la trayectoria de dicho equilibrio.

El equilibrio bayesiano perfecto

Los nuevos conceptos de equilibrio han de cumplir de manera plena el principio de racionalidad secuencial, según el cual la estrategia en equilibrio de cualquier jugador ha de ser una respuesta óptima, en cada punto del juego (sea o no sea el inicio de un subjuego, y esté o no esté en la trayectoria de dicho equilibrio), a las estrategias del resto de jugadores. En particular, es preciso que la acción prescrita para cada jugador en un conjunto de información con varios nodos sea óptima. Sin embargo, qué acción es óptima en tal conjunto de información no puede en general averiguarse en abstracto sino que depende de en qué nodo de decisión se encuentre el jugador, y esa es una información de la que él no dispone.

En consecuencia, para poder calificar como óptima una decisión en esas circunstancias, es preciso disponer de una estimación probabilística, por parte del jugador, de en qué nodo se encuentra. Dicha estimación podría llamarse creencia a posteriori o percepción a posteriori, como hacen algunos autores (la razón del calificativo «a posteriori» se hará evidente más adelante). Aquí la llamaremos simplemente **conjetura**, que es la expresión ya usada en el Capítulo 5 para un caso particular de la situación que aquí nos ocupa. Por otra parte, es razonable pensar que esa conjetura no es totalmente independiente de las estrategias del perfil que se está analizando. Consideremos, por ejemplo, el perfil (*Fútbol*, *Cine*) en el juego de la batalla de los sexos, cuya representación en forma extensiva aparece de nuevo en la Figura 6.7, con las estrategias de dicho perfil señaladas en línea gruesa. Preguntémonos si la acción *Cine* de la jugadora 2, realizada en un conjunto de información con dos nodos, es óptima.

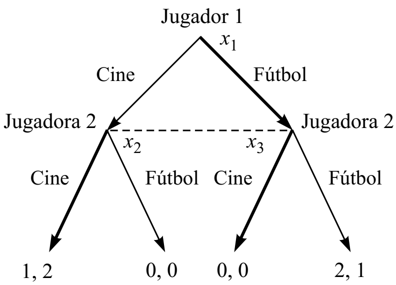


Figura 6.7 Batalla de los sexos.

Es evidente que sería óptima si su conjetura asignase una probabilidad suficientemente alta a encontrarse en el nodo de la izquierda, pero ha de observarse que el perfil estratégico en estudio, y en particular la estrategia *Fútbol* del jugador 1 en ese perfil, imponen una y sólo una conjetura compatible con dicho perfil, la conjetura que asigna probabilidad 1 a encontrarse en el nodo derecho. Podemos concluir, por tanto, que la acción *Cine* de la jugadora 2 no es óptima, lo que implica que el perfil (*Fútbol*, *Cine*) no satisface las exigencias del nuevo concepto de equilibrio.

En conclusión, para poder calificar como equilibrio (de acuerdo con el nuevo concepto de equilibrio) un perfil estratégico es preciso especificar dos elementos:

- Un conjunto de conjeturas, una por cada conjunto de información, que estimen la probabilidad de encontrarse en cada uno de los nodos de dicho conjunto. Este elemento va a permitir identificar qué estrategias son óptimas, y así precisar el significado de la racionalidad secuencial.
- Un criterio de consistencia, que especifique qué conjeturas son aceptablemente plausibles dado un perfil estratégico, de modo que excluya las conjeturas disparatadas, y sólo admita las que son compatibles con dicho perfil. La elección de uno u otro criterio de consitencia dará lugar a distintos conceptos de equilibrio.

Las próximas definiciones formalizarán estas ideas.

Definición 6.3

Sea G un juego dinámico con información imperfecta, y H la familia de todos los conjuntos de información de G.

a) Se llama sistema de conjeturas de G a todo conjunto $\mu = \{\mu_h\}_{h \in H}$ de distribuciones de probabilidad, una por cada conjunto de información h, que especifican una probabilidad $\mu_h(x)$ para cada nodo de decisión de h (de modo que $\sum_{x \in h} \mu_h(x) = 1$).

b) Dado un perfil estratégico $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ y un sistema de conjeturas $\mu = \{\mu_h\}_{h \in H}$, decimos que **el perfil σ es secuencialmente racional con respecto al sistema de conjeturas** μ si para todo jugador i y para todo conjunto de información h de dicho jugador, la acción $\sigma_i(h)$ es una solución del problema $\max \sigma'_i E[U_i/(\sigma'_i, \sigma_{-i}); h, \mu]$, donde $E[U_i/(\sigma'_i, \sigma_{-i}); h, \mu]$ es el pago esperado por el jugador i supuesto que se juega el perfil (σ'_i, σ_{-i}), que i se encuentra en el conjunto de información h y que el sistema de conjeturas es μ.

Es decir, para todo jugador i y para todo conjunto de información h de dicho jugador, la acción $\sigma_i(h)$ es una respuesta óptima por parte de i, de acuerdo con la conjetura μ_h, y supuesto que i seguirá jugando su estrategia σ_i, a la combinación σ_{-i} de estrategias de los demás jugadores. Otra forma de definirlo es la siguiente: un perfil estratégico σ es secuencialmente racional si determina un equilibrio de Nash en la forma multiagente ante un sistema de conjeturas $\{\mu_h\}_{h \in H}$.

El siguiente ejemplo permitirá ilustrar dicho concepto.

Ejemplo 6.9

a) Sean los juegos de la disuasión 3a y 3b, definidos y representados en el Ejemplo 6.1.

En cuanto al juego de la disuasión 3a, tiene 3 nodos de decisión, x_1, x_2 y x_3, y dos conjuntos de información, $h_1 = \{x_1\}$ y $h_2 = \{x_2, x_3\}$, uno de cada jugador. Las conjeturas sobre cualquier conjunto de información unitario, como $h_1 = \{x_1\}$ en este caso, son necesariamente triviales, atribuyendo una probabilidad 1 al único nodo de decisión, y por tanto no las tendremos explícitamente en cuenta al definir los sistemas de conjeturas. Las conjeturas sobre el conjunto de información $h_2 = \{x_2, x_3\}$ son todas las distribuciones de probabilidad sobre dicho conjunto, es decir, todos los pares ordenados $(p(x_2), p(x_3) = 1 - p(x_2))$ donde $0 \leqslant p(x_2) \leqslant 1$, siendo $p(x_2)$ la probabilidad de estar en x_2 y $p(x_3)$ la probabilidad de estar en x_3.

Merece la pena preguntarse si existen sistemas de conjeturas con respecto a los cuales pueda afirmarse la racionalidad secuencial de los perfiles $s = (Esi, Cs)$ y $s' = (Ne, Cd)$, que constituyen los EN en estrategias puras de este juego.

Es fácil ver que ningún sistema de conjeturas fundamenta la racionalidad secuencial del perfil s'. En efecto, dada cualquier probabilidad p de estar en el nodo x_2, la utilidad esperada de INCUMBRON si decide Cd, que es igual a 0, es estrictamente menor que la obtenida si decide Cs. Por tanto, la acción Cd no es óptima en el conjunto de información $h_2 = \{x_2, x_3\}$, sea cual sea la conjetura en dicho conjunto.

Por el contrario, sí existen sistemas de conjeturas que fundamentan la racionalidad secuencial del perfil $s = (Esi, Cs)$. Así, dada cualquier probabilidad p de estar en el nodo x_2, la utilidad esperada de INCUMBRON si decide Cs, es mayor que la obtenida si decide Cd. Al mismo tiempo, la acción Esi es respuesta óptima de ENTRON a Cs, pues le proporciona una utilidad de 5, frente a 3 que le proporcionaría Ne y frente a 4 que le proporcionaría Ei.

En cuanto al juego de la disuasión 3b, cuya estructura de conjuntos de información es la misma que para el caso 3a, nos preguntaremos también si existen sistemas de conjeturas que respalden la racionalidad secuencial de los perfiles $s = (Esi, Cs)$ y $s' = (Ne, Cd)$, que también constituyen los EN en estrategias puras de este juego.

Analicemos en primer lugar el perfil $s = (Esi, Cs)$. La conjetura $(p(x_2) = 0, p(x_3) = 1)$ de INCUMBRON sí respalda la racionalidad secuencial de este perfil, ya que, dada esa conjetura, la utilidad esperada de INCUMBRON si decide Cs es 5, mientras que la obtenida si decide Cd es 0. Al mismo tiempo, la acción Esi es respuesta óptima de ENTRON a Cs, pues le proporciona una utilidad de 5, frente a 3 que le proporcionaría Ne y frente a 4 que le proporcionaría Ei.

Analicemos, por último, el caso más interesante, el perfil $s' = (Ne, Cd)$. Ahora es la conjetura $(p(x_2) = 1, p(x_3) = 0)$ de INCUMBRON la que respalda la racionalidad secuencial de este perfil, ya que, dada esa conjetura, la utilidad esperada de INCUMBRON si decide Cd es 2, la misma que si decide Cs. Al mismo tiempo, la acción Ne es respuesta óptima de ENTRON a Cd, pues le proporciona una utilidad de 3, frente a -1 que le proporcionaría Ei y frente a 0 que le proporcionaría Esi. Obsérvese, sin embargo, una cierta rareza de esta conjetura: el perfil especifica para INCUMBRON la acción Cd, que es óptima dada la conjetura según la cual es seguro que ENTRON ha decidido Ei, pero Ei es una acción estrictamente dominada por Esi.

Resumiendo, en el juego de la disuasión 3b está respaldada la racionalidad secuencial de los dos perfiles EN, $s = (Esi, Cs)$ y $s' = (Ne, Cd)$, mientras que en el juego de la disuasión 3a sólo está respaldada la racionalidad secuencial del primero de ellos.

b) Sea ahora el juego de la disuasión 3c, definido y representado en el Ejemplo 6.2. Este juego tiene 4 nodos de decisión, x_1, x_2, x_3 y x_4, y tres conjuntos de información, $h_1 = \{x_1\}$, $h_2 = \{x_2\}$ y $h_3 = \{x_3, x_4\}$. Centrándonos en las conjeturas sobre conjuntos de información no unitarios, los sistemas de conjeturas en este juego vienen determinados por las distribuciones de probabilidad sobre el conjunto $h_3 = \{x_3, x_4\}$, y en consecuencia por la probabilidad p de que INCUMBRON esté en el nodo x_3. En cuanto a los EN en estrategias puras, que son $s = [(E, Esi), Cs]$, $s' = [(Ne, Ei), Cd]$ y $s'' = [(Ne, Esi), Cd]$, veamos si existen sistemas de conjeturas que fundamenten la racionalidad secuencial de cada uno.

El perfil $s = [(E, Esi), Cs]$ es secuencialmente racional con respecto a la conjetura que asigna probabilidad $p = 0$ a estar en el nodo x_3. En efecto, si es cierto que está con seguridad en el nodo x_4, la acción óptima de INCUMBRON es *Cs* (le proporciona una utilidad de 5, frente a una utilidad de 0 que le proporcionaría *Cd*). Además, la estrategia de respuesta óptima de ENTRON a *Cs* es (*E*, *Esi*) pues le proporciona una utilidad de 5 en lugar de 3 o 4 que conseguiría con otras estrategias. Al mismo tiempo, la acción de respuesta óptima de ENTRON (tras haber jugado *E*) a *Cs* es *Esi* pues le proporciona una utilidad de 5 en lugar de 4 que conseguiría con *Ei*.

El perfil $s' = [(Ne, Ei), Cd]$ no es secuencialmente racional con respecto a ninguna conjetura que asigne probabilidad $p(0 \leqslant p \leqslant 1)$ a estar en el nodo x_3. En efecto, en el nodo de decisión no inicial (tras *E*) la acción *Ei* de ENTRON está estrictamente dominada por su acción *Esi*.

Por último, el perfil $s'' = [(Ne, Esi), Cd]$ sí es secuencialmente racional con respecto a la conjetura que asigna probabilidad $p = 1$ a estar en el nodo x_3. En efecto, si fuera cierto que está con seguridad en el nodo x_3, la acción óptima de INCUMBRON sería *Cd* (le proporciona una utilidad de 2, igual a la utilidad de 2 que le proporcionaría *Cs*), y además (*Ne*, *Esi*) es estrategia de respuesta óptima de ENTRON a *Cd*, y por último, en el nodo de decisión no inicial (tras *E*) la acción *Esi* de ENTRON es óptima, ya que domina estrictamente a su acción *Ei*.

Naturalmente, este equilibrio s'' es visiblemente menos satisfactorio que el s, y ello se debe a que la conjetura $p = 1$ que fundamenta la racionalidad secuencial de s'' está en abierta contradicción (al suponer que INCUMBRON está en x_3) con el desarrollo del juego que el propio s'' determina (según el cual INCUMBRON estaría en x_4). Esta conjetura incumple la compatibilidad entre conjeturas y estrategias que se suponía anteriormente que es preciso especificar. Es de esperar, por tanto, que el nuevo concepto de equilibrio que estamos motivando excluya al perfil s''.

Observación 6.2

1. Sea *G* un juego estático con información completa (como el dilema del prisionero, el juego de votación por mayoría, el duopolio de Cournot, etc.). ¿Cumplen sus EN la propiedad de racionalidad secuencial con respecto a algún sistema de conjeturas? Es fácil comprobar que existe algún sistema de conjeturas con respecto al cual sí la cumplen. En particular, el sistema en el que cada jugador «adivina» las estrategias de los demás, es decir, se forma una conjetura completamente acorde con dichas estrategias. Por ejemplo, en la batalla de los sexos el EN (*Fútbol*, *Fútbol*) es secuencialmente racional con respecto a la conjetura de la jugadora 2 que asigna probabilidad 1 a encontrarse en el nodo derecho x_3 tras *Fútbol* del jugador 1.

2. Sea ahora *G* un juego bayesiano estático (como el juego del Ejemplo 6.4, una subasta en sobre cerrado, etc.). ¿Cumplen sus EB la propiedad de racionalidad secuencial con respecto a algún sistema de conjeturas? Existe asimismo algún sistema de conjeturas con respecto al cual sí la cumplen. En particular, el sistema en el que cada jugador, aparte de «adivinar» las estrategias de los demás, aplica la regla de Bayes para conjeturar los tipos de los demás a partir de su tipo efectivo y de la distribución a priori de probabilidades de los tipos de los demás. Por tanto, estas conjeturas son las percepciones o suposiciones a posteriori sobre los tipos, y son las usadas efectivamente en la definición de equilibrio bayesiano. Veámoslo en un ejemplo. En el juego bayesiano estático del Ejemplo 6.4, el EB $\sigma = ($*Confesar-Callar*, *Callar*$)$ es secuencialmente racional con respecto a la conjetura $\mu = (pq, p(1-q), (1-p)r, (1-p)(1-r))$ de J2, siendo p la probabilidad a priori de que el tipo de J1 sea ALTA, q la probabilidad de que J1 juegue *Confesar* si su tipo es ALTA, y r la probabilidad de que J1 juegue *Confesar* si su tipo es BAJA. En nuestro ejemplo, y dado el perfil de equilibrio σ, $p = 2/3$, $q = 1$ y $r = 0$. Por tanto, la conjetura que sostiene la racionalidad secuencial de σ es $\mu = (2/3, 0, 0, 1/3)$.

A continuación se define el equilibrio bayesiano perfecto (EBP), exigiendo racionalidad secuencial y compatibilidad entre estrategias y conjeturas. Los nuevos conceptos de equilibrio no se aplicarán ya a un perfil estratégico σ, sino a un par perfil estratégico-sistema de conjeturas (σ, μ) al que llamaremos **evaluación**.

Definición 6.4

Sea G un juego dinámico con información imperfecta y H la familia de todos los conjuntos de información de G. Dado un perfil estratégico $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ y un sistema de conjeturas $\mu = \{\mu_h\}_{h \in H}$, decimos que la evaluación (σ, μ) es un **equilibrio bayesiano perfecto** si cumple:

a) El perfil estratégico σ es secuencialmente racional con respecto al sistema de conjeturas μ.

b) En cualquier conjunto de información h situado en la trayectoria de equilibrio, las conjeturas de μ son consistentes con las estrategias de σ y las jugadas de azar en el sentido de que las probabilidades de cada conjetura están determinadas, mediante la regla de Bayes, por dichas estrategias y jugadas. Es decir,

$$\mu_h(x) = \frac{\text{prob}\,(x/\sigma)}{\text{prob}\,(h/\sigma)}$$

c) En cualquier conjunto de información h' situado fuera de la trayectoria de equilibrio, las conjeturas de μ son igualmente consistentes con las estrategias de σ en el sentido de que las probabilidades de cada conjetura han de determinarse mediante actualización bayesiana, siempre que sea posible.

Si en la definición anterior se elimina la exigencia (c) se obtiene la definición de un concepto de equilibrio más débil, el **equilibrio bayesiano perfecto débil** (EBPD).

Cuando queramos referirnos únicamente a un perfil estratégico, usaremos la palabra escenario. En concreto diremos que un perfil estratégico σ es un **escenario** de equilibrio bayesiano perfecto si existe algún sistema de conjeturas μ tal que el par (σ, μ) es efectivamente, de acuerdo con la Definición 6.4, un equilibrio bayesiano perfecto. Sin embargo, en ocasiones también se dirá, con cierto abuso de notación, que un perfil estratégico σ es un equilibrio bayesiano perfecto.

Observación 6.3

1. La exigencia de (b) y (c) con respecto al sistema de conjeturas justifica que a veces se las llame conjeturas o suposiciones a posteriori.

2. Es innegable que la parte (c) de la definición anterior tiene un carácter heurístico, ya que le falta la precisión característica de una definición formal. Aun así es una definición útil. En algunos ejemplos inmediatos, y posteriormente en el contexto particular de los juegos de señalización, se precisará el significado de dicho apartado.

3. Si G es un juego estático, todos los conjuntos de información están en la trayectoria de cualquier equilibrio y, en consecuencia, la condición (c) se cumple de manera trivial.

Ejemplo 6.10

Hemos visto en el Ejemplo 6.9 (a) que, de los EN del juego de la disuasión 3a, los perfiles $s = (Esi, Cs)$ y $s' = (Ne, Cd)$, solo el primero, s, tiene un sistema de conjeturas que fundamente su racionalidad secuencial. Por tanto, sólo ese perfil puede ser escenario de un EBP.

Así pues, el perfil $s' = (Ne, Cd)$ es un ejemplo de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos que no es escenario de un EBPD.

Veamos si el perfil $s = (Esi, Cs)$ es escenario de un EBP. Lo será si alguno de los sistemas de conjeturas que fundamentan su racionalidad secuencial cumple las exigencias (b) y (c) de la definición. La conjetura $p(x_2) = 0$, que es una de las muchas que fundamenta la racionalidad secuencial, cumple la condición (b) debido a que, estando el conjunto de información $h_2 = \{x_2, x_3\}$ en la trayectoria de equilibrio por ser $\text{prob}\,(h_2/s) = 1 > 0$, las probabilidades $p(x_2)$ y $p(x_3)$ se calculan a partir de las estrategias de s mediante la regla de Bayes. En efecto,

$$p(x_2) = \mu_{h_2}(x_2) = \frac{\text{prob}\,(x_2/s)}{\text{prob}\,(h_2/s)} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{y} \quad p(x_3) = \mu_{h_2}(x_3) = \frac{\text{prob}\,(x_3/s)}{\text{prob}\,(h_2/s)} = \frac{1}{1} = 1$$

Además, cumple la condición (c) de modo trivial debido a que no existen conjuntos de información que estén fuera de la trayectoria de equilibrio. En consecuencia, **la evaluación (s, [$p(x_2) = 0$, $p(x_3) = 1$]) es un EBP**. En la Figura 6.8 se muestra dicho EBP. No sería difícil demostrar que se trata del único EBP del juego.

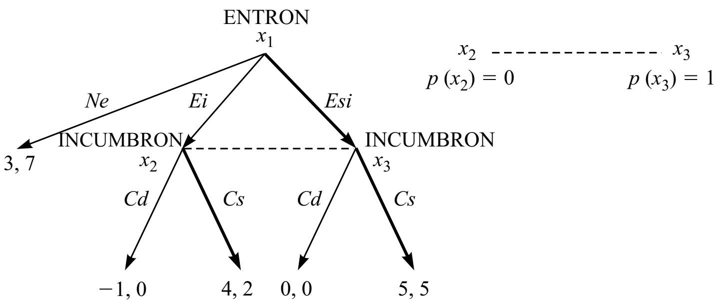


Figura 6.8 Juego de la disuasión 3a. Único EBP.

Ejemplo 6.11

a) Sea el juego de la disuasión 3b. Hemos visto en el Ejemplo 6.9 (a) que los dos EN del juego de la disuasión 3b, los perfiles $s = (Esi, Cs)$ y $s' = (Ne, Cd)$, son secuencialmente racionales para los sistemas de conjeturas μ: $[p(x_2) = 0,\ p(x_3) = 1]$ y μ': $[p(x_2) = 1,\ p(x_3) = 0]$, respectivamente. Razonando análogamente a como se ha hecho en el Ejemplo 6.10, se demuestra que la evaluación (s, μ) es un EBP.

Por otra parte, veamos que también la evaluación (s', μ') es un EBP. En efecto, se cumple la condición (b) de modo trivial ya que el conjunto de información h_2 está fuera de la trayectoria de equilibrio, y se cumple la condición (c) ya que la conjetura sobre h_2 es acorde con el perfil, también de modo trivial (cualquier conjetura hubiera sido válida), ya que h_2 está fuera de la trayectoria de equilibrio y el perfil no impone ninguna restricción a la conjetura sobre h_2. En conclusión, ambas evaluaciones, que se muestran en la Figura 6.9, son EBP.

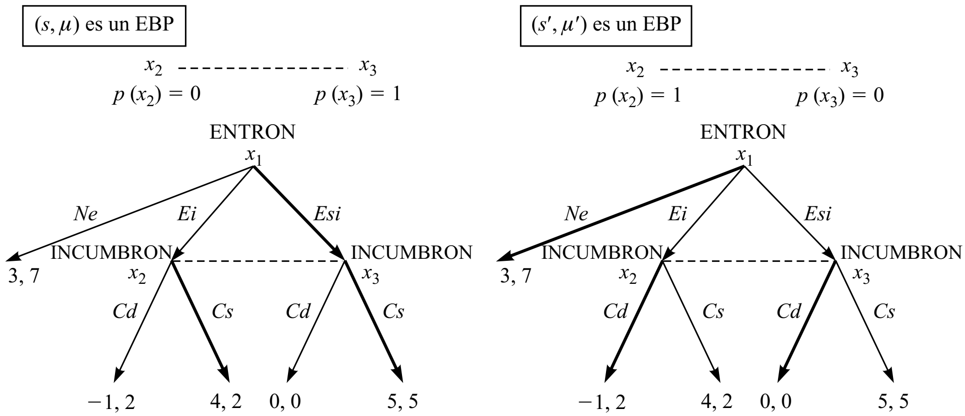


Figura 6.9 Juego de la disuasión 3b. Dos EBP.

b) Sea el juego de la disuasión 3c. Referiremos la discusión a la conjetura sobre el conjunto $h_3 = \{x_3, x_4\}$, es decir, al par $(p, 1 - p)$ donde p es la probabilidad de que INCUMBRON esté en el nodo x_3. Hemos visto en el Ejemplo 6.9 (b) que:

- El EN $s = [(E, Esi), Cs]$ es secuencialmente racional con respecto a la conjetura μ: $(p = 0,\ 1 - p = 1)$, y
- El EN $s'' = [(Ne, Esi), Cd]$ es secuencialmente racional con respecto a la conjetura μ'': $(p = 1,\ 1 - p = 0)$.

Nos queda por tanto averiguar si alguna de las evaluaciones (s, μ) y (s'', μ'') es un EBP o un EBPD.

En cuanto a la evaluación (s, μ), la conjetura μ: $(p = 0,\ 1 - p = 1)$ cumple la condición (b) de la Definición 6.4, puesto que el perfil estratégico s obliga a pasar por x_4, lo que implica $p = 0$. Expresado en términos de actualización bayesiana, estando el conjunto de información $h_3 = \{x_3, x_4\}$ en la trayectoria de equilibrio, la probabilidad p puede calcularse así:

$$p = \mu_{h_3}(x_3) = \frac{\text{prob}\,(x_3/s)}{\text{prob}\,(h_3/s)} = \frac{0}{1} = 0$$

Además, cumple la condición (c) de modo trivial debido a que no existen conjuntos de información que estén fuera de la trayectoria de equilibrio. En consecuencia, **la evaluación (s, μ) es un EBP**.

Y por último, en cuanto a la evaluación (s'', μ''), la conjetura μ'': ($p = 1$, $1 - p = 0$) cumple la condición (b) de la Definición 6.4 de manera vacía, pues h_3 está fuera de la trayectoria de equilibrio. Sin embargo, no cumple la condición (c) porque el perfil estratégico s'' obliga a INCUMBRON a conjeturar, si tuviera que jugar, que está con certeza en x_4, lo que implica $p = 0$, en contradicción con la conjetura μ''. En consecuencia, **la evaluación (s'', μ'') es un EBPD, pero no es un EBP**. Merece la pena hacer notar una observación de Mas-Colell, Whinston y Green (1995) que limita el interés del concepto EBPD. A pesar de que la evaluación (s'', μ'') es un EBPD, el perfil s'' no es un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, ya que induce el perfil (*Esi*, *Cd*) en el subjuego que se inicia en x_2 y este perfil no es EN del subjuego. El fallo radica en no exigir ninguna consistencia entre el perfil estratégico y las conjeturas en conjuntos de información fuera de la trayectoria de equilibrio. En la Figura 6.10 se muestran los dos equilibrios del juego.

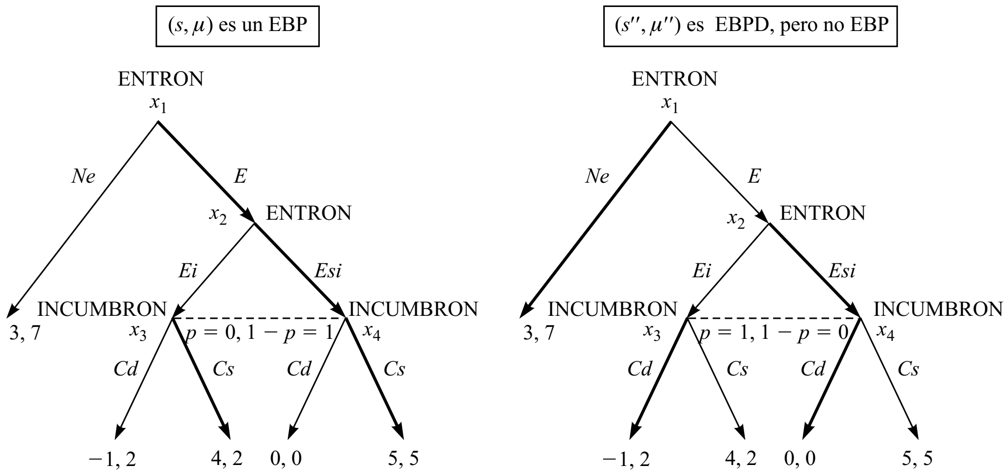


Figura 6.10 Juego de la disuasión 3c. Un EBP y un EBPD.

Ejemplo 6.12

En el juego de cartas analizado en los Ejemplos 6.7 y 6.8 (b), sabemos que el único EN es $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, donde σ_1 es la estrategia de comportamiento de Blanca «si la carta es oro o copa, *Apostar* con seguridad, y si es espada o basto, *Apostar* con probabilidad 1/3 y *Retirarse* con probabilidad 2/3», abreviada ((1, 0), (1/3, 2/3)), y σ_2 es la estrategia de comportamiento de Carlos «*Recoger* la apuesta con probabilidad 2/3 y *Pasar* con probabilidad 1/3», abreviada (2/3, 1/3).

Vamos a buscar un sistema de conjeturas μ tal que (σ, μ) sea un EBP. En la práctica, puesto que sólo existe un conjunto de información no unitario, el $h_3 = \{x_3, x_4\}$ en que decide Carlos, buscamos una conjetura (p, $1 - p$) donde p es la probabilidad estimada por Carlos de encontrarse en el nodo x_3, que sigue a la jugada de azar oro-copa y a la jugada *Apostar* de Blanca. El conjunto $h_3 = \{x_3, x_4\}$ está en la trayectoria de equilibrio, puesto que la probabilidad a priori de alcanzarlo si se juega de acuerdo con σ es $\text{prob}\,(h_3/\sigma) = (1/2)(1) + (1/2)(1/3) = 2/3 > 0$. En virtud por tanto de la condición (b), apliquemos la regla de Bayes para calcular p:

$$p = \mu_{h_3}(x_3) = \frac{\text{prob}\,(x_3/\sigma)}{\text{prob}\,(h_3/\sigma)} = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$$

Así pues, la probabilidad buscada es $p = 3/4$. En conclusión, **la evaluación (σ, μ), donde $\boldsymbol{\mu}$ es la conjetura** ($p = 3/4$, $1 - p = 1/4$), **es un EBP**. En la Figura 6.11 se muestra el EBP del juego.

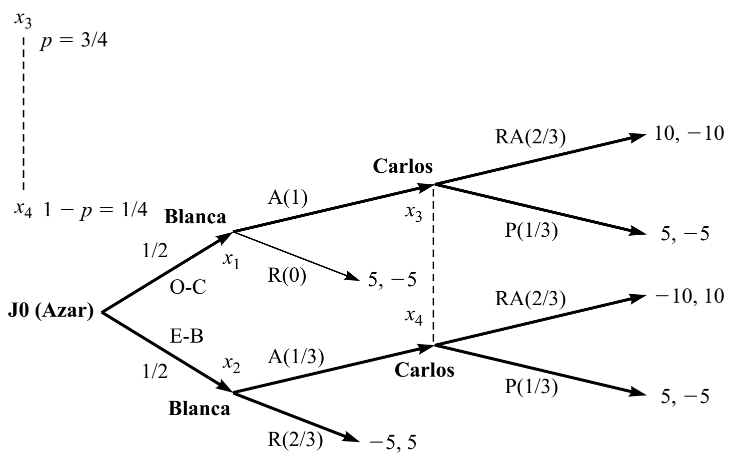


Figura 6.11 EBP del juego de cartas.

Podría pensarse que, dado un perfil estratégico σ, la regla de Bayes como método para actualizar el cálculo de las probabilidades en un conjunto de información dado h (es decir, para determinar sus conjeturas) sólo es aplicable cuando dicho conjunto de información h está dentro de la trayectoria de equilibrio, al ser allí $\text{prob}\,(h/\sigma) > 0$, haciendo aplicable la fórmula

$$\mu_h(x_j) = \frac{\text{prob}\,(x_j/\sigma)}{\text{prob}\,(h/\sigma)}$$

que aparece en el apartado (b) en la Definición 6.4. Sin embargo, el siguiente ejemplo, tomado de Mas-Colell, Whinston y Green (1995) demuestra que en ocasiones sí es aplicable la regla de Bayes, convenientemente reinterpretada en términos relativos, para determinar las conjeturas apropiadas fuera de la trayectoria de equilibrio.

Ejemplo 6.13

Consideremos el siguiente juego en forma extensiva, al que llamaremos Juego 6.1:

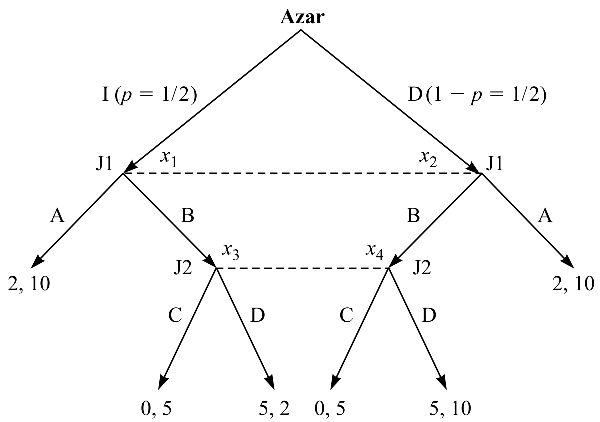


Figura 6.12 Juego 6.1.

La representación en forma normal, con pagos esperados, del juego anterior es

		J2	
		C	D
J1	A	2, 10	2, 10
	B	0, 5	5, 6

y los EN en estrategias puras son s = (A, C) y s' = (B, D). Ambos son perfectos en subjuegos, ya que no existe ningún subjuego propio. Vamos a analizar ambos equilibrios y demostrar que sólo el segundo es un escenario de EBP.

El equilibrio s (que, dicho sea de paso, tiene una estrategia débilmente dominada, la C de J2) impone obviamente una conjetura al conjunto de información $h_1 = \{x_1, x_2\}$ de J1, y no es otra que la conjetura ($q = 1/2$, $1 - q = 1/2$) derivada de la propia jugada de azar. En cuanto al conjunto de información $h_2 = \{x_3, x_4\}$ de J2, que está fuera de la trayectoria de equilibrio, podríamos asignarle una conjetura como ($r = 9/10$, $1 - r = 1/10$).

Para este sistema de conjeturas es fácil ver que s es secuencialmente racional. En efecto, la acción A de J1 es óptima, dada la anterior conjetura en h_1, supuesto que J2 va a responder con C, pues le proporciona a J1 un pago de 2 frente a un pago de 0 que obtendría con B. Y además, la acción C de J2 es respuesta óptima, dada la anterior conjetura en h_2, a la acción A de J1, pues le proporciona un pago esperado de 5, mayor que el que obtendría con D.

Sin embargo, es claro que falla la consistencia, en particular la condición (c) de la Definición 6.4, relativa a conjuntos de información fuera de la trayectoria de equilibrio.

En efecto, si J2 se viera obligado a jugar (contra lo previsto en equilibrio, que es que J1 juega A y se acaba el juego) debería razonar que, puesto que J1 no ha visto el resultado de la jugada de azar antes de jugar B, la probabilidad r de estar en x_3 es 1/2, valor que viene determinado por el valor $p = 1/2$ de la jugada de azar. Así pues $(r = 1/2,\ 1 - r = 1/2)$ es la única conjetura consistente con la jugada A de J1. Por otra parte, dada esta conjetura, la acción de respuesta óptima de J2 a la acción A de J1 es D, pues le proporciona un pago esperado de 6 frente a 5 que obtendría con C.

Por tanto, acabamos de demostrar que s no es un escenario de EBP. Veamos que la evaluación $(s' = (\text{B, D}),\ \mu = [(q = 1/2,\ 1 - q = 1/2),\ (r = 1/2,\ 1 - r = 1/2)])$ sí es un EBP. El razonamiento recién hecho sobre las conjeturas sigue siendo válido ($q = 1/2$ porque lo exige la jugada de azar, y $r = 1/2$ porque cuando J1 juega B no ha observado el resultado de la jugada de azar), y hemos visto que D es la acción óptima de J2 dada la conjetura $(r = 1/2,\ 1 - r = 1/2)$ en h_2. Solo falta ver que la acción B de J1 es óptima, dada la conjetura $(q = 1/2,\ 1 - q = 1/2)$ en h_1, y supuesto que J2 va a responder con D. Pues bien, lo es porque le proporciona un pago esperado de 5 frente a un pago de 2 que obtendría con A.

En conclusión, **la evaluación**

$$(s' = (\text{B, D}),\ \mu = [(q = 1/2,\ 1 - q = 1/2),\ (r = 1/2,\ 1 - r = 1/2)])$$

sí es un EBP, mientras que la evaluación $(s = (\text{A, C}),\ \mu = [(q = 1/2,\ 1 - q = 1/2),\ (r = 9/10,\ 1 - r = 1/10)])$ **no lo es (aunque podemos mantener que es un EBPD).** En la Figura 6.13 se muestra el único EBP.

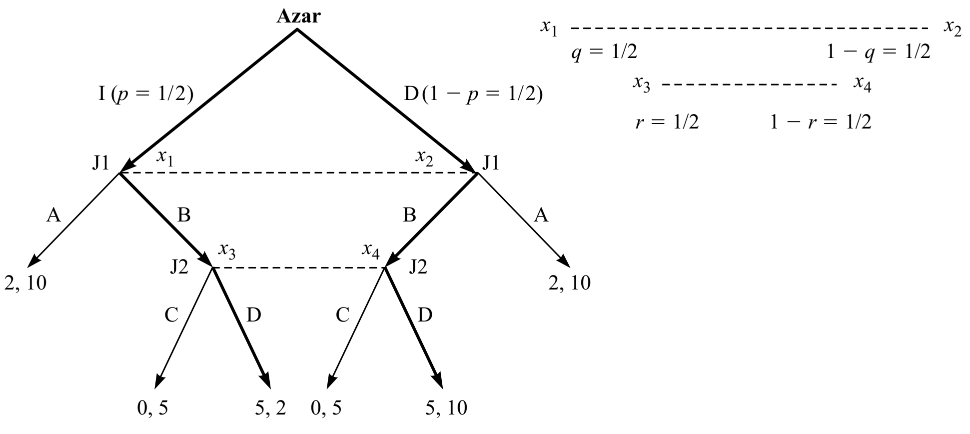


Figura 6.13 EBP del Juego 6.1.

Ejemplo 6.14

Sea el caballo de Selten, definido en el Ejemplo 6.5. Hemos visto que los equilibrios en estrategias puras son $s = (\text{B, C}', \text{I})$ y $s' = (\text{C, C}', \text{D})$. Ambos son perfectos en subjuegos, pues no existen subjuegos propios. Para estudiar sus EBP, denotaremos $h_1 = \{x_1\}$, $h_2 = \{x_2\}$ y $h_3 = \{x_3, x_4\}$ a los conjuntos de información de J1, J2 y J3, respectivamente, y denotaremos $\mu_{h_3} = (q, 1 - q)$ a las conjeturas de J3 en h_3, de modo que q es la probabilidad (condicionada por estar en h_3) de estar en el nodo x_3.

El primero de sus EN, $s = (\text{B, C}', \text{I})$ no puede ser escenario de un EBP ni de un EBPD pues la estrategia C′ de J2 no sería respuesta óptima a la combinación (B, I) de J1 y J3 en el caso de tener que jugar en $h_2 = \{x_2\}$. En efecto, la restricción de (B, I) a la parte que resta por jugar del juego a partir de $h_2 = \{x_2\}$ es I, y de ello se deduce que J2 hubiese obtenido un pago de 4 jugando B′ en lugar del pago de 1 que obtiene con C′. Así pues, no ha respondido óptimamente en $h_2 = \{x_2\}$ como exige la racionalidad secuencial, aunque h_2 esté fuera de la trayectoria de equilibrio y no inicie un subjuego.

En cuanto al segundo EN, $s' = (\text{C, C}', \text{D})$, vamos a proponer una conjetura sobre el conjunto de información h_3 que haga secuencialmente racional al equilibrio. Nos vale cualquier conjetura $\mu_{h_3} = (q, 1 - q)$ donde $0 \leqslant q \leqslant 1/3$. En efecto, para cualquiera de esas conjeturas D es la acción óptima de J3 en h_3 (obtiene un pago igual a $1 - q$ con D y un pago igual a $2q$ con I), y además C′ es respuesta óptima de J2 a (C, D) y C es respuesta óptima de J1 a (C′, D). Así pues, s cumple la racionalidad secuencial con respecto a cualquiera de esas conjeturas. Por otra parte, cualquiera de ellas cumple la condición (b) de la definición de EBP trivialmente, ya que h_3 no está en la trayectoria de equilibrio, y cumple la condición (c) de dicha definición también trivialmente, ya que, estando fuera de la trayectoria de equilibrio, nada la restringe.

En conclusión, **la evaluación** ($s' = (\text{C, C}', \text{D})$, $\mu' = [\mu_{h_3} = (q, 1 - q)$, donde $0 \leqslant q \leqslant 1/3]$) **es un EBP**. En la Figura 6.14 se muestra el EBP obtenido.

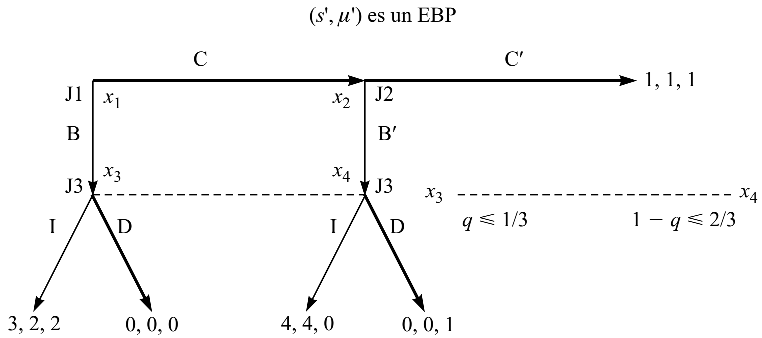


Figura 6.14 EBP del caballo de Selten.

Ejemplo 6.15

Sea el juego venta de un coche usado, definido en el Ejemplo 6.6. Distingamos dos posibilidades según la relación que exista entre el valor $u_{a,V}$ que la vendedora atribuye a un coche de alta calidad, y el valor $\varphi_q = qu_{a,C} + (1 - q)u_{b,C}$, que es el valor esperado a priori por el comprador para un coche cuya calidad desconoce. O bien $u_{a,V} \leqslant \varphi_q$, o bien $u_{a,V} > \varphi_q$.

— Vamos a demostrar que en el primer caso ($u_{a,V} \leqslant \varphi_q$) existe algún EBP cuyo resultado concluye con la venta de cualquier tipo de coche. En efecto, sea v_0 un precio de venta fijo tal que $u_{b,C} \leqslant v_0$ y además $u_{a,V} \leqslant v_0 \leqslant \varphi_q$ (es decir, mayor o igual que el valor que V atribuye al tipo alto, mayor o igual que el valor que C atribuye al tipo bajo y menor o igual que el valor esperado a priori por el comprador). Veremos que es EBP cualquier evaluación (s^*, μ), tal que s^* es el perfil en estrategias puras $((s_V^*(C_a), s_V^*(C_b)), (s_C^*(v))_{v\in[0,\ 1]})$ donde

- $s_V^*(C_a) = s_V^*(C_b) = v_0$, (para cualquier tipo de coche, V solicita un precio de venta v_0), y
- $s_C^*(v)$ = Aceptar si y sólo si $v = v_0$ o bien $v \leqslant u_{b,C}$ (C acepta sólo la propuesta de equilibrio v_0 y las inferiores a su valoración para coches de baja calidad).

Y μ es el sistema de conjeturas de C donde

- $\mu(v) = (q, 1 - q)$ si $v = v_0$ y $\mu(v) = (0, 1)$ si $v \neq v_0$ (C estima que la probabilidad de calidad alta es la probabilidad a priori si la propuesta es la de equilibrio y que el coche tiene con seguridad calidad baja si la propuesta está fuera del equilibrio).

Para ello, veamos que cumple:

1. Racionalidad secuencial, dadas esas estrategias y conjeturas. Se cumple porque es óptimo para cualquier tipo de V responder con esa estrategia a la estrategia de C, y es óptimo para C, dadas esas conjeturas, responder así a la estrategia de V.
2. Condición (b) de actualización bayesiana en los conjuntos de información en la trayectoria de equilibrio. Se cumple porque al recibir C la propuesta v_0 su conjetura obligada por la actualización bayesiana es precisamente la conjetura a priori $(q, 1 - q)$.
3. Condición (c) de actualización bayesiana, si es posible, en los conjuntos de información fuera de la trayectoria de equilibrio. Se cumple de manera trivial porque al recibir C una propuesta $v \neq v_0$, ello no impone ninguna restricción sobre cuál haya podido ser el tipo de E que envió esa propuesta, es decir, no existe ninguna conjetura a la que obligue la actualización bayesiana.

— Sin embargo, ahora vamos a demostrar que en el segundo caso $(u_{a,V} > \varphi_q)$ no existe ningún EBP en estrategias puras cuyo resultado concluya con la venta del coche de calidad alta. En efecto, supongamos que existe un EBP en el que la estrategia s_V^* de V es aceptada cuando el coche es de calidad alta. En ese caso, $s_V^*(C_a) \geqslant u_{a,V} > \varphi_q$ (si $s_V^*(C_a) < u_{a,V}$, la vendedora obtendría una ganancia negativa). Pues bien, ni puede darse el caso de que $s_V^*(C_b) = s_V^*(C_a)$, ya que el comprador no aceptaría pagar un precio por encima de su valoración esperada, ni puede darse el caso de que $s_V^*(C_b) < s_V^*(C_a)$, debido a que V desearía desviarse del equilibrio cuando la calidad es baja, ya que pidiendo un precio más alto, $s_V^*(C_a)$, se le acepta. Es decir, el tipo C_b simularía ser C_a lo que impide esta posibilidad de equilibrio. En conclusión, no existe tal equilibrio. Como vemos, el mercado falla en este caso.

En la Figura 6.15 se da una idea de la situación. El segmento BQ corresponde al intervalo de precios de venta alcanzables en equilibrio por un coche de calidad alta (y a resultados de EBP), y el segmento QR corresponde al intervalo de precios de venta no alcanzables en equilibrio por dicho tipo de coche.

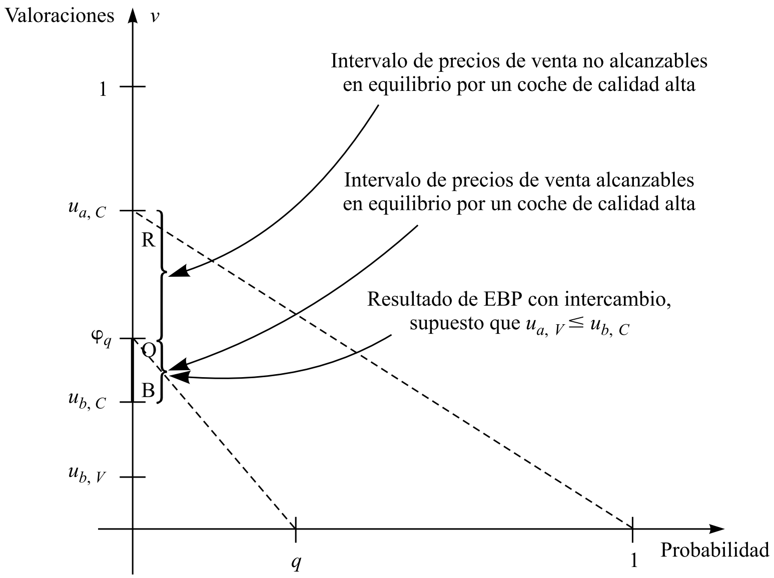


Figura 6.15 Precios de venta en equilibrio para los coches de calidad alta.

6.3. EL EQUILIBRIO SECUENCIAL Y EL EQUILIBRIO PERFECTO DE MANO TEMBLOROSA

En esta sección se introducen los conceptos de equilibrio secuencial y equilibrio perfecto de mano temblorosa, que son más exigentes que (y por tanto refinan) el equilibrio bayesiano perfecto.

Podría decirse que todos estos intentos de encontrar un concepto satisfactorio de equilibrio se proponen excluir, en el contexto de los juegos bayesianos dinámicos, aquellas situaciones en las que determinadas amenazas no creíbles que incorpora la estrategia de algún jugador puedan tener éxito afectando al desarrollo del juego, de modo que las propias amenazas queden fuera de dicho desarrollo y así no tengan que materializarse. El concepto de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos es un primer paso en esa dirección, pero sólo resulta suficiente cuando la información es perfecta (en cuyo caso es aplicable la inducción hacia atrás). Cuando la información es imperfecta, la exclusión de amenazas no creíbles obliga a exigir un comportamiento óptimo en todos los conjuntos de información (inicien o no subjuegos y estén dentro o fuera de la trayectoria de equilibrio), pero esta exigencia se ha revelado muy difícil de definir de manera satisfactoria en aquellos conjuntos de información que están fuera de la trayectoria de equilibrio.

En todo caso, cualquier solución del problema, y en consecuencia cualquier concepto de equilibrio que pretenda excluir esas amenazas no creíbles, ha de interpretar la causa de las desviaciones con respecto a la trayectoria de equilibrio (racionalizar las desviaciones) y asumir, de acuerdo con dicha causa, cuáles han de ser los comportamientos posteriores de los jugadores. Siguiendo a Vega Redondo (2000) citemos tres modos importantes de racionalizar las desviaciones:

- El jugador que se ha desviado del equilibrio lo ha hecho por error.
- El jugador que se ha desviado del equilibrio lo ha hecho porque supone que todos están realizando otro equilibrio distinto.
- El jugador que se ha desviado del equilibrio lo hace porque pretende de ese modo, enviar una señal a los demás.

Los conceptos de equilibrio que vamos a definir se basan en la suposición de que la desviación se ha debido a un error.

Definición 6.5

Sea G un juego dinámico finito con información imperfecta y H la familia de todos los conjuntos de información de G. Dado un perfil estratégico $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ y un sistema de conjeturas $\mu = \{\mu_h\}_{h \in H}$, decimos que la evaluación (σ^*, μ) es un **equilibrio secuencial** si cumple:

1. El perfil estratégico σ es secuencialmente racional con respecto al sistema de conjeturas μ.
2. Existe una sucesión $\{\sigma^j, \mu^j)\}_{j=1,2,...}$ de evaluaciones tal que

— el límite de dicha sucesión es la evaluación (σ, μ),
— todos los perfiles estratégicos σ^j están constituidos por estrategias mixtas completas (es decir, en todo conjunto de información, cualquier acción disponible es elegida con probabilidad no nula),
— cada sistema de conjeturas μ^j está determinado, por la regla de Bayes, por su correspondiente perfil estratégico σ^j.

En términos más compactos, una evaluación (σ, μ) es un equilibrio secuencial si σ es secuencialmente racional con respecto a μ, y además, existe una evaluación tan cercana como queramos a (σ, μ) en la que las estrategias del perfil son mixtas completas y el sistema de conjeturas se deriva del perfil mediante actualización bayesiana. Podría decirse intuitivamente que en un equilibrio secuencial las conjeturas vienen justificadas, por la regla de Bayes, por perfiles de estrategias mixtas completas que se obtienen al perturbar levemente por error las estrategias de equilibrio.

El próximo concepto de equilibrio se llama equilibrio perfecto de mano temblorosa. Ya se definió un equilibrio con ese nombre en el Capítulo 3 para juegos en forma estratégica, y la nueva definición se basará en aquélla.

Definición 6.6

Sea G un juego dinámico con información imperfecta. Sea J = {J1, J2, ..., Jn} el conjunto de los n jugadores y sea $H = \{h_i\}_{i=1,2,...,k}$ la familia de todos los conjuntos de información de G. Decimos que el perfil de estrategias de comportamiento $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ es un **equilibrio perfecto de mano temblorosa para el juego en forma extensiva *G*** si dicho perfil es un equilibrio perfecto de mano temblorosa para la forma multiagente de G.

Es decir, σ es el límite de una sucesión $\{\sigma^k\}_{k=1,2,...}$ de perfiles de estrategias mixtas (de comportamiento) completas, tales que para cualquier jugador i, su estrategia σ_i en σ es respuesta óptima a la combinación σ^k_{-i} de estrategias de los demás jugadores, para cualquier perfil σ^k de la sucesión.

Para entender adecuadamente las dos definiciones anteriores es preciso observar que, cuando todas las estrategias de un perfil σ son mixtas completas, cualquier conjunto de información h está en la trayectoria de equilibrio (pues $\text{prob}\,(h/\sigma) > 0$), y la conjetura μ_h sobre h está completamente determinada por la regla de Bayes del modo siguiente:

$$\mu_h(x) = \frac{\text{prob}\,(x/\sigma)}{\text{prob}\,(h/\sigma)}$$

Observación 6.4

La definición que acaba de hacerse en términos de límites es perfectamente válida ya que tanto el espacio de los perfiles estratégicos como el espacio de los sistemas de conjeturas son espacios euclídeos.

Existencia del equilibrio y relaciones entre los distintos conceptos de equilibrio

El siguiente teorema, referido a juegos finitos, establece las relaciones entre los distintos conceptos de equilibrio estudiados y afirma la existencia del más exigente de dichos conceptos.

Teorema 6.1

Sea G un juego dinámico finito con información imperfecta.

a) Si el perfil estratégico $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ es un equilibrio perfecto de mano temblorosa para el juego en forma extensiva G, entonces es escenario de un equilibrio secuencial de G.

b) Si la evaluación (σ, μ) es un equilibrio secuencial de G, entonces es un equilibrio bayesiano perfecto de G.

c) Si σ es escenario de un equilibrio bayesiano perfecto de G, entonces es un equilibrio perfecto en subjuegos de G.

d) Existe al menos un perfil estratégico que es un equilibrio perfecto de mano temblorosa para el juego en forma extensiva G.

Demostración:

Apartado a) Si el perfil σ es un equilibrio perfecto de mano temblorosa para el juego en forma extensiva G, σ es el límite de una sucesión $\{\sigma^k\}_{k=1,2,...}$ de perfiles de estrategias de comportamiento completas, tales que para cualquier jugador i, su estrategia σ_i en σ es respuesta óptima a la combinación σ^k_{-i} de estrategias de los demás jugadores, para cualquier perfil σ^k de la sucesión. Por ser completas sus estrategias, estos perfiles σ^k determinan de manera única, por la regla de Bayes, sistemas asociados de conjeturas μ^k ya que cualquier conjunto de información h es alcanzado en equilibrio con una prob (h/σ^k) estrictamente positiva. Llamando ahora μ al límite de una subsucesión convergente (tal subsucesión existe por estar situados todos los sistemas μ^k en un subconjunto compacto de un espacio euclídeo) de $\{\mu^k\}_{k=1,2,...}$, obtenemos una evaluación (σ, μ) donde μ es consistente con σ por razones de continuidad. Además, por ser la estrategia σ_i en σ de cualquier jugador i una respuesta óptima a la combinación σ^k_{-i} de estrategias de los demás jugadores, (σ, μ) es secuencialmente racional asimismo por razones de continuidad. En consecuencia, la evaluación (σ, μ) es un equilibrio secuencial.

Apartado b) Si la evaluación (σ, μ) es un equilibrio secuencial, cumple por definición la condición (a) de la definición de EBP. Por otra parte, cumple evidentemente las condiciones (b) y (c) por razones de continuidad.

Apartado c) Si la evaluación (σ, μ) es un EBP, y un determinado conjunto de información h inicia un subjuego, dicho conjunto h es por definición unitario y, en consecuencia, la conjetura μ_h es trivialmente consistente con σ, y la secuencialidad racional de (σ, μ) implica que σ induce en dicho subjuego un equilibrio de Nash.

Apartado d) El perfil σ es por definición un equilibrio perfecto de mano temblorosa para el juego en forma extensiva G si es un equilibrio perfecto de mano temblorosa para la forma multiagente de G, y por tanto nos remitimos al apartado (e) del Teorema 3.13, que implica la existencia de un equilibrio de ese tipo para todo juego finito en forma estratégica.

Ejemplos ilustrativos

Ejemplo 6.16

Hemos analizado en el Ejemplo 6.10 los equilibrios del juego de la disuasión 3a y hemos concluido que $s = (Esi, Cs)$ es el único perfil de estrategias puras que es escenario de un EBP, y que se sostiene en la conjetura μ: $[p(x_2) = 0,\ p(x_3) = 1]$. Vamos a comprobar que también es equilibrio perfecto de mano temblorosa del juego, y por tanto escenario de un equilibrio secuencial.

Llamemos $h_1 = \{x_1\}$ y $h_2 = \{x_2, x_3\}$ a los dos conjuntos de información. Sea $\varepsilon_n = 1/2^n$ y definamos la sucesión de perfiles estratégicos $\{\sigma^k\}_{k=1,2,...}$ en estrategias mixtas completas $\sigma^k = (\sigma_1^k = (\varepsilon_k, \varepsilon_k, 1 - 2\varepsilon_k), \sigma_2^k = (\varepsilon_k, 1 - \varepsilon_k))$, donde σ_1^k es la estrategia de comportamiento de ENTRON consistente en decidir Ne con probabilidad ε_k, decidir Ei con probabilidad ε_k y decidir Esi con probabilidad $1 - 2\varepsilon_k$, mientras que σ_2^k es la estrategia de comportamiento de INCUMBRON consistente en decidir Cd con probabilidad ε_k y decidir Cs con probabilidad $1 - \varepsilon_k$.

Es fácil ver que $\lim_{k\to\infty} \{\sigma^k\} = s$ y que además Cs es respuesta óptima de INCUMBRON a σ_1^k para cualquier valor de k suficientemente grande, mientras que Esi es respuesta óptima de ENTRON a $\sigma^k{}_2$ para cualquier valor de k suficientemente grande. En consecuencia, s es un equilibrio perfecto de mano temblorosa del juego, y por tanto s es escenario de un equilibrio secuencial.

Ejemplo 6.17

a) Sea el juego de la disuasión 3b. Hemos visto en el Ejemplo 6.11 (a) que las dos evaluaciones (s, μ) y (s', μ') son EBP. Los perfiles son $s = (Esi, Cs)$ y $s' = (Ne, Cd)$, y los sistemas de conjeturas son μ: $[p(x_2) = 0,\ p(x_3) = 1]$ y μ': $[p(x_2) = 1,\ p(x_3) = 0]$. Vamos a estudiar si $s = (Esi, Cs)$ y $s' = (Ne, Cd)$ son equilibrios perfectos de mano temblorosa, y por tanto escenarios de equilibrios secuenciales.

Comencemos por la evaluación (s, μ). Recordemos que (s, μ) es el único EBP del juego de la disuasión 3a. Pues bien, es fácil ver que el mismo razonamiento que se ha hecho en el Ejemplo 6.16 para esta evaluación sirve aquí para demostrar que s es un equilibrio perfecto de mano temblorosa del juego, y por tanto s es escenario de un equilibrio secuencial.

Analicemos ahora la evaluación (s', μ'). Llamemos $h_1 = \{x_1\}$ y $h_2 = \{x_2, x_3\}$ a los dos conjuntos de información. Sea $\varepsilon_n = 1/2^n$ y definamos la sucesión de perfiles estratégicos $\{\sigma'^k\}_{k=1,2,\dots}$ en estrategias mixtas de comportamiento completas

$$\sigma'^k = (\sigma_1'^k = (1 - \varepsilon_k - \varepsilon_k^2,\ \varepsilon_k,\ \varepsilon_k^2),\ \sigma_2'^k = (1 - \varepsilon_k,\ \varepsilon_k)),$$

donde $\sigma_1'^k$ es la estrategia de comportamiento de ENTRON consistente en decidir *Ne* con probabilidad $1 - \varepsilon_k - \varepsilon_k^2$, decidir *Ei* con probabilidad ε_k y decidir *Esi* con probabilidad ε_k^2, mientras que $\sigma_2'^k$ es la estrategia de comportamiento de INCUMBRON consistente en decidir *Cd* con probabilidad $1 - \varepsilon_k$ y decidir *Cs* con probabilidad ε_k.

Es evidente que $\lim\limits_{k\to\infty} \{\sigma'^k\} = s'$. Por otra parte, la conjetura sobre h_2 determinada por σ'^k es

$$\mu'^k = \left[p(x_2) = \mu_{h_2}(x_2) = \frac{\text{prob}\,(x_2/\sigma'^k)}{\text{prob}\,(h_2/\sigma'^k)} = \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_k + \varepsilon_k^2} = \frac{1}{1 + \varepsilon_k},\ p(x_3) = \frac{\varepsilon_k}{1 + \varepsilon_k}\right]$$

y por tanto $\lim\limits_{k\to\infty} \{\mu'^k\} = [p(x_2) = 1,\ p(x_3) = 0] = \mu'$.

En consecuencia, **la evaluación (s', μ') es un equilibrio secuencial**. Sin embargo, vamos a demostrar que s' no es equilibrio perfecto de mano temblorosa del juego.

Sea $\{\sigma'^k\}_{k=1,2,\dots}$ una sucesión cualquiera de perfiles estratégicos en estrategias mixtas de comportamiento completas que cumpla $\lim\limits_{k\to\infty} \{\sigma'^k\} = s'$, y sea $\sigma'^k = (\sigma_1'^k, \sigma_2'^k)$ un perfil cualquiera de esa sucesión. Debido a que $\sigma_1'^k$ es una estrategia mixta completa de comportamiento de ENTRON, la probabilidad de que juegue *Esi* es estrictamente positiva, lo cual implica que la estrategia *Cd* de INCUMBRON no es respuesta óptima a $\sigma_1'^k$ (*Cd* le proporciona a INCUMBRON la misma utilidad que *Cs* si ENTRON hubiera decidido *Ne* o *Ei*, pero le proporciona una utilidad estrictamente menor que *Cs* si ENTRON hubiera decidido *Esi*). En consecuencia, **la evaluación (s', μ') no es un equilibrio perfecto de mano temblorosa del juego**. Este es un ejemplo de equilibrio que, siendo escenario de un equilibrio secuencial, no es perfecto de mano temblorosa.

b) Sea el juego de la disuasión 3c. Referiremos la discusión a la conjetura sobre el conjunto $h_3 = \{x_3, x_4\}$, es decir, al par $(p, 1 - p)$ donde p es la probabilidad de que INCUMBRON esté en el nodo x_3. Hemos visto en el Ejemplo 6.11 (b) que (s, μ), donde $s = [(E, Esi), Cs]$ y μ: $(p = 0,\ 1 - p = 1)$ es el único EBP. Vamos a comprobar que también es un equilibrio perfecto de mano temblorosa, y por tanto secuencial.

Llamemos $h_1 = \{x_1\}$, $h_2 = \{x_2\}$ y $h_3 = \{x_3, x_4\}$ a los tres conjuntos de información. Sea $\varepsilon_n = 1/2^n$ y definamos la sucesión de perfiles estratégicos $\{\sigma^k\}_{k=1,2,\ldots}$ en estrategias mixtas de comportamiento completas $\sigma^k = (\sigma_1^k = (\varepsilon_k,\ 1 - \varepsilon_k),\ \sigma_2^k = (\varepsilon_k,\ 1 - \varepsilon_k),\ \sigma_3^k = (\varepsilon_k, 1 - \varepsilon_k))$, donde $\sigma_1^k = (\varepsilon_k, 1 - \varepsilon_k)$, $\sigma_2^k = (\varepsilon_k, 1 - \varepsilon_k)$, $\sigma_3^k = (\varepsilon_k, 1 - \varepsilon_k)$ significan, respectivamente, que ENTRON en h_1 decide *Ne* con probabilidad ε_k y *E* con probabilidad $1-\varepsilon_k$, que ENTRON en h_2 decide *Ei* con probabilidad ε_k y *Esi* con probabilidad $1 - \varepsilon_k$, y que INCUMBRON en h_3 decide *Cd* con probabilidad ε_k y *Cs* con probabilidad $1 - \varepsilon_k$.

Es evidente que $\lim\limits_{k\to\infty}\{\sigma^k\} = s$. Además, para cualquier valor de k suficientemente grande ocurre que *Cs* es respuesta óptima de INCUMBRON a (σ_1^k, σ_2^k), que *E* es respuesta óptima de ENTRON a (σ_2^k, σ_3^k) y que *Esi* es respuesta óptima de ENTRON a (σ_1^k, σ_3^k). En consecuencia, s es un equilibrio perfecto de mano temblorosa del juego, y por tanto escenario de un equilibrio secuencial.

Ejemplo 6.18

Sea el juego del Trespiés 2, definido en el Ejemplo 6.3. J1 tiene dos conjuntos de información, $h_1 = \{x_1\}$ y $h_3 = \{x_3\}$, ambos unitarios, y J2 tiene un único conjunto de información, $h_2 = \{x_2\}$, también unitario. Los sistemas de conjeturas que habrían de respaldar los perfiles de equilibrio secuencial son, por tanto, triviales. J1 tiene dos agentes, a los que llamaremos $J1_1$ y $J1_2$, y J2 solo tiene uno. Los EN en estrategias puras de su representación en forma estratégica son $s = (S - S, S)$, $s' = (T - S, T)$ y $s'' = (T - T, T)$, y la inducción hacia atrás conduce al único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, que es $s = (S - S, S)$. Merece la pena observar también que en la representación en forma multiagente existe, aparte de los EN $s^* = (S, S, S)$, $s^{*\prime} = (T, S, T)$ y $s^{*\prime\prime} = (T, T, T)$, que son la contrapartida aquí de s, s' y s'', un cuarto EN que no tiene contrapartida en la representación estratégica.

Así pues, y en virtud del Teorema 6.1, el perfil $s = (S - S, S)$ es el único equilibrio perfecto de mano temblorosa del juego del Trespiés 2, el único escenario de equilibrio secuencial y el único escenario de EBP. Veamos en detalle por qué $s = (S - S, S)$ es un equilibrio perfecto de mano temblorosa de dicho juego, lo que significa que $s^* = (S, S, S)$ es un equilibrio perfecto de mano temblorosa del juego en forma multiagente arriba representado.

Sea la sucesión de perfiles $\{\sigma^k\}_{k=1,2,\ldots}$ de la representación multiagente en que $\sigma^k = \sigma_1^k = (1 - \varepsilon_k,\ \varepsilon_k),\ \sigma_2^k = (1 - \varepsilon_k,\ \varepsilon_k),\ \sigma_3^k = (1 - \varepsilon_k,\ \varepsilon_k))$, donde $\varepsilon_k = 1/2^k$ y el par $(p, 1 - p)$ significa que se juega S con probabilidad p y T con probabilidad $1 - p$. Es evidente que $\lim\limits_{k\to\infty}\{\sigma^k\} = s$ y que, para cualquier valor de k suficientemente grande, T es respuesta óptima del agente $J1_1$ a (σ_2^k, σ_3^k), S es respuesta óptima del agente $J1_2$ a (σ_1^k, σ_2^k) y T es respuesta óptima de J2 a (σ_1^k, σ_3^k).

Ejemplo 6.19

Sea el caballo de Selten, definido en el Ejemplo 6.5. En el Ejemplo 6.14 hemos deducido que la evaluación (s', μ'), donde $s' = (C, C', D)$, $\mu' = [\mu_{h_3} = (q,\ 1 - q)$, donde

$0 \leqslant q \leqslant 1/3$], es un EBP. Vamos a comprobar que s' también es un equilibrio perfecto de mano temblorosa, y por tanto escenario de un equilibrio secuencial.

Dados los tres conjuntos de información $h_1 = \{x_1\}$, $h_2 = \{x_2\}$ y $h_3 = \{x_3, x_4\}$, sea $\varepsilon_n = 1/2^n$ y definamos la sucesión de perfiles estratégicos $\{\sigma^k\}_{k=1,2,...}$ en estrategias mixtas de comportamiento completas $\sigma^k = (\sigma_1^k = (\varepsilon_k,\ 1 - \varepsilon_k),\ \sigma_2^k = (3\varepsilon_k,\ 1 - 3\varepsilon_k),\ \sigma_3^k = (\varepsilon_k, 1 - \varepsilon_k))$, donde σ_1^k, σ_2^k y σ_3^k significan, respectivamente, que J1 en h_1 decide B con probabilidad ε_k y C con probabilidad $1 - \varepsilon_k$, que J2 en h_2 decide B′ con probabilidad $3\varepsilon_k$ y C′ con probabilidad $1 - 3\varepsilon_k$, y que J3 en h_3 decide I con probabilidad ε_k y D con probabilidad $1 - \varepsilon_k$.

Es evidente que $\lim_{k \to \infty} \{\sigma^k\} = s'$. Además, para cualquier valor de k suficientemente grande son ciertas las tres afirmaciones siguientes:

- En primer lugar, C de J1 es respuesta óptima a (σ_2^k, σ_3^k). En efecto, si juega B y le da a J3 la oportunidad de jugar, es «casi seguro» que J3 jugará D, que le produce un pago de 0 a J1. Sin embargo, si juega C es casi seguro que J2 jugará C′, que le da un pago de 1 a J1.
- En segundo lugar, C′ de J2 es respuesta óptima a (σ_1^k, σ_3^k). En efecto, si juega B′ y le da a J3 la oportunidad de jugar, obtendrá un pago de 0 «casi con seguridad», mientras que si juega C′ obtendrá con seguridad un pago de 1.
- En tercer lugar, D de J3 es respuesta óptima a (σ_1^k, σ_2^k). En efecto, mediante actualización bayesiana calculamos la probabilidad de que J3 se encuentre en cada uno de sus nodos, condicionada a que le toque jugar:

$$p(x_3) = \frac{\text{prob}\,(x_3/\sigma^k)}{\text{prob}\,(h_3/\sigma^k)} = \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_k + 3\varepsilon_k(1 - \varepsilon_k)} = \frac{1}{1 + 3(1 - \varepsilon_k)} \quad \text{y} \quad p(x_4) = \frac{3(1 - \varepsilon_k)}{1 + 3(1 - \varepsilon_k)}$$

Por tanto, si cuando le toque jugar decide I, obtendrá un pago esperado de $\dfrac{2}{1 + 3(1 - \varepsilon_k)}$, mientras que con D obtendrá un pago esperado de $\dfrac{3(1 - \varepsilon_k)}{1 + 3(1 - \varepsilon_k)}$, que es mayor para ε_k suficientemente pequeño.

En consecuencia, s' es un equilibrio perfecto de mano temblorosa del juego, y por tanto escenario de un equilibrio secuencial.

Una exploración más detallada de las relaciones entre los distintos conceptos de equilibrio

Con el fin de dilucidar con mayor detalle las relaciones de estos nuevos conceptos de equilibrio, entre sí y con los conceptos de capítulos anteriores, nos plantearemos las siguientes preguntas:

1. **Relación entre equilibrio secuencial, EBP y EBPD.** ¿Puede existir, para un juego en forma extensiva, un equilibrio que sea escenario de un equilibrio secuencial y no sea perfecto de mano temblorosa? ¿Y un EBP que no sea equilibrio secuencial? ¿Y un EBPD que no sea EBP?

2. **Relación entre ENPS y EBPD.** ¿Puede existir, para un juego en forma extensiva, un ENPS (equilibrio de Nash perfecto en subjuegos) que no sea EBPD? ¿Y un EBPD que no sea ENPS?
3. **Algunas relaciones entre los conceptos de equilibrio definidos para juegos en forma estratégica y los definidos para juegos en forma extensiva.** Dado un juego G en forma estratégica,

   a) Si σ es un equilibrio perfecto de mano temblorosa de G, ¿lo será σ también de cualquier juego Γ_G en forma extensiva cuya representación en forma estratégica sea G? ¿En caso contrario, será al menos σ un equilibrio secuencial de Γ_G?
   b) Si σ es un equilibrio propio de G, ¿será σ un equilibrio secuencial de cualquier juego Γ_G en forma extensiva cuya representación en forma estratégica sea G?

Vamos a intentar responder a algunas de las anteriores preguntas.

1. En el ejemplo 6.17 se ha identificado un ejemplo de equilibrio que, siendo escenario de un equilibrio secuencial, no es perfecto de mano temblorosa. Se trata del perfil $s' = (Ne, Cd)$ en el juego de la disuasión 3b. Por otra parte, aunque puede decirse que «en general» coincide el conjunto de los EBP con el de los equilibrios secuenciales, existen EBP que no son equilibrios secuenciales. En Fudenberg y Tirole (1991) puede encontrarse un ejemplo. Por otra parte, en el juego de la disuasión 3c del Ejemplo 6.11, la evaluación (s'', μ''), donde $s'' = [(Ne, Esi), Cd]$ y μ'': $(p=1,\ 1-p=0)$, es un EBPD y, sin embargo, el perfil s'' no es un EBP.
2. Hemos visto en los Ejemplos 6.9 y 6.10 que en el juego de la disuasión 3a, el perfil $s' = (Ne, Cd)$ es un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos que no es escenario de un EBPD. Por otra parte, se ha visto en el Ejemplo 6.10 que, en el juego de la disuasión 3c, la evaluación (s'', μ''), donde $s'' = [(Ne, Esi), Cd]$ y μ'': $(p = 1,\ 1 - p = 0)$, es un EBPD y, sin embargo, el perfil s'' no es un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.
3. Daremos las respuestas, sin demostrarlas:

   a) Si σ es un equilibrio perfecto de mano temblorosa de G, no necesariamente es un equilibrio secuencial (ni siquiera ENPS) de cualquier juego en forma extensiva Γ_G cuya forma estratégica sea G. *Véase* Selten (1982).
   b) Si σ es un equilibrio propio de G, necesariamente es un equilibrio secuencial de cualquier juego en forma extensiva Γ_G cuya forma estratégica sea G. *Véase* Myerson (1991, Sección 5.4).

A modo de resumen visual, en la Figura 6.16 se muestran algunas de las implicaciones lógicas y las condiciones de existencia de los refinamientos, para juegos en forma estratégica y para juegos en forma extensiva, en dos escalas horizontales. Si un refinamiento X está a la derecha de otro Y en la misma línea horizontal, es estrictamente más fuerte que ese otro, es decir, la proposición «para todo juego, todo perfil de equilibrio de tipo X es equilibrio de tipo Y, pero existe algún juego en el cual hay algún equilibrio de tipo Y que no es de tipo X» es verdadera. También está indicado con flechas de implicación. Además, si de un refinamiento X en la forma estratégica sale una flecha hasta un refinamiento X′ en la forma extensiva, ello quiere decir que la proposición «para todo juego G en forma normal, si σ es un perfil de equilibrio de tipo X en G, σ es un perfil de equilibrio de tipo X′ en cualquier juego en forma extensiva Γ_G cuya forma estratégica sea *G*».

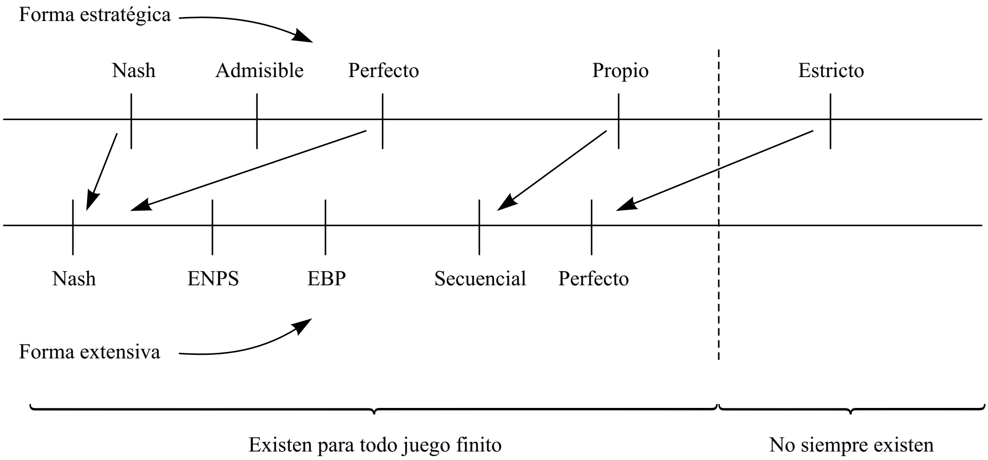


Figura 6.16 Escalas lógicas de los refinamientos del EN.

6.4. JUEGOS DE SEÑALIZACIÓN

Algunas de las aplicaciones más importantes de la teoría de juegos son las referidas a señalización en los mercados. En ellas se da a menudo un patrón básico que puede describirse, grosso modo, así:

> Un agente E interviniente en una transacción tiene información que la otra parte, R, ignora, y que a E le convendría que R conociera. No basta con que E comunique a R dicha información (R no tiene por qué creerle) y en consecuencia E toma decisiones que R interpretará como señales o indicios de la veracidad de dicha información.

La descripción anterior guarda una cierta relación con el dicho popular «Obras son amores, que no buenas razones», y puede ejemplificarse en el siguiente relato, que incluye el juego venta de un coche usado del Ejemplo 6.6:

> El dueño de un coche usado, V, quiere vendérselo a un determinado comprador potencial, C, por un precio v. Sólo V conoce la calidad del coche. Por más que V afirma que el coche es muy bueno, que el precio v es muy bajo y que la transacción sería una ganga para C, C no se muestra en absoluto convencido (se dice que si v es bajo, razón de más para sospechar que el coche es malo, pues V pretenderá obtener un beneficio, y no un perjuicio, con su venta). Sólo cuando V le ofrece una garantía de un año, consistente en hacerse cargo durante ese año del coste de reparación de cualquier avería, C comienza a considerar seriamente la posibilidad de la compra.

Hay muchas situaciones de importancia económica evidente que se ajustan al patrón básico anteriormente descrito, donde la parte informada E plantea un cambio en la situación de partida (*statu quo*), y la parte no informada R le responde aceptando o rechazando la oferta, o a otros patrones estrechamente relacionados, como el de *identifi-*

cación (*screening* en inglés), en donde es la parte no informada R la que lleva la iniciativa, y E quien le responde. Estas situaciones se han modelado haciendo uso de los conceptos de teoría de juegos que estamos estudiando en este capítulo (al mismo tiempo, esas aplicaciones han hecho posible el desarrollo teórico de esos conceptos). Citemos, por ejemplo:

- El modelo del mercado de los coches usados de Akerlof, descrito en el párrafo anterior.
- El modelo de Spence, en el que un trabajador bastante capaz da señales de su capacidad mediante el nivel de sus estudios.
- El modelo de Rothschild y Stiglitz, en el que un asegurado da señales de su alto grado de aversión al riesgo mediante la aceptación de un aseguramiento parcial.
- El modelo de Milgrom y Roberts, en el que una empresa capaz de producir a bajo coste da señales de esta capacidad vendiendo a un bajo precio.
- El modelo de Sobel, en el que el demandante en un caso con buenas posibilidades ante los tribunales da señales de dichas posibilidades exigiendo una alta indemnización para retirar la demanda.

Observación 6.5

Los autores George Akerlof, Michael Spence y Joseph Stiglitz, autores de los tres primeros modelos mencionados, fueron galardonados con el Premio Nobel de Economía el año 2001 por sus «análisis de los mercados con información asimétrica».

En esta sección se estudia el modelo básico subyacente a las situaciones anteriormente descritas, mediante la definición de un tipo especial de juego en forma extensiva, al cual se aplican y con el cual se ilustran y precisan, los conceptos de equilibrio introducidos en este capítulo.

Definición 6.7

Sea G un juego dinámico con información incompleta. Decimos que G es un **juego de señalización** si cumple:

a) Tiene dos jugadores, jugador 1 y jugador 2. Les llamaremos, respectivamente, E (emisor) y R (receptor).

b) E tiene información privada (su tipo) y R no. Hay una información a priori, de dominio público, que es una distribución de probabilidad $p(t)$ sobre el conjunto T de los tipos potenciales de E.

c) El emisor E juega en primer lugar. Decide una acción m, llamada mensaje, perteneciente a un conjunto M.

d) El receptor R juega en segundo lugar, tras observar la acción de E. Decide una acción a perteneciente a un conjunto A y se acaba el juego.

e) Los pagos correspondientes son $u_E(m, a; t)$ y $u_R(m, a; t)$. Dependen de las acciones realizadas m y a, y del tipo efectivo t de E.

E tiene un conjunto de información unitario $h_t = \{t\}$ por cada tipo $t \in T$ que pueda observar, y R tiene un conjunto de información h'_m (con tantos nodos como tipos tiene el conjunto T) por cada mensaje $m \in M$ de E que pueda observar. Así pues, las estrategias puras de E son reglas de asignación que a cada tipo $t \in T$ le asocian un mensaje m_t en M, mientras que las estrategias puras de R son reglas de asignación que a cada mensaje $m \in M$ le asocian una acción a_m de A. Análogamente, las estrategias mixtas (de comportamiento) de E son reglas de asignación σ_E que a cada tipo $t \in T$ le asocian una lotería $\sigma_E(t) \in \Delta(M)$ sobre el conjunto de los mensajes M, y las de R son reglas de asignación σ_R que a cada mensaje $m \in M$ le asocian una lotería $\sigma_R(m) \in \Delta(A)$ sobre el conjunto de las acciones A. Dado un tipo t cualquiera de E, los pagos en el caso de que E juegue su estrategia mixta σ_E y R su estrategia mixta σ_R son $U_E(\sigma_E, \sigma_R; t)$ y $U_R(\sigma_E, \sigma_R; t)$, definidos como pagos esperados del modo natural, que en el caso en que M y A sean finitos pueden expresarse así:

$$U_E(\sigma_E, \sigma_R; t) = \sum_{m \in M} \sum_{a \in A} \sigma_E(m/t)\sigma_R(a/m)u_E(m, a; t)$$
$$U_R(\sigma_E, \sigma_R; t) = \sum_{m \in M} \sum_{a \in A} \sigma_E(m/t)\sigma_R(a/m)u_R(m, a; t)$$

donde $\sigma_E(m/t)$ es la probabilidad especificada por σ_E de que E juegue m, condicionada al tipo t, y $\sigma_R(a/m)$ es la probabilidad especificada por σ_R de que R juegue a, condicionada al mensaje m. Los pagos esperados *ex ante* en el caso de que E juegue su estrategia mixta σ_E y R su estrategia mixta σ_R son $U_E(\sigma_E, \sigma_R)$ y $U_R(\sigma_E, \sigma_R)$, definidos como pagos esperados del modo natural, que en el caso en que M y A sean finitos pueden expresarse así:

$$U_E(\sigma_E, \sigma_R) = \sum_{t \in T} p(t)\left(\sum_{m \in M} \sum_{a \in A} \sigma_E(m/t)\sigma_R(a/m)u_E(m, a; t)\right)$$
$$U_R(\sigma_E, \sigma_R) = \sum_{t \in T} p(t)\left(\sum_{m \in M} \sum_{a \in A} \sigma_E(m/t)\sigma_R(a/m)u_R(m, a; t)\right)$$

donde $p(t)$ es la probabilidad a priori de que E tenga el tipo t.

En la Figura 6.17 se muestra la estructura de un juego de señalización en forma extensiva en dos versiones, (a) y (b). En ambas hay dos tipos de emisor, t_1 y t_2, y mientras en la primera los espacios de mensajes y acciones son continuos, en la segunda tienen dos elementos cada uno. Para hacer más legible el dibujo, en (a) sólo se ha señalado uno de los infinitos conjuntos de información de R mediante línea de puntos.

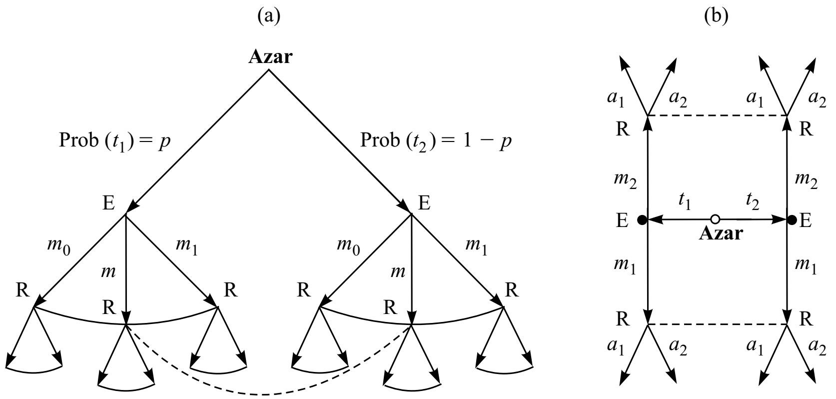


Figura 6.17 Esquema estructural de un juego de señalización en forma extensiva.

Una característica interesante de este juego (para el caso no trivial en que hay más de un tipo de emisor), y que se aprecia en la Figura 6.17 es que no existe ningún subjuego propio. En efecto, los únicos conjuntos de información unitarios distintos del inicial son los del emisor E (uno tras cada jugada de azar), pero ninguno de ellos inicia un subjuego, ya que el conjunto de nodos que le siguen interseca (rompe) a todos los conjuntos de información del receptor.

El equilibrio bayesiano perfecto en el juego básico de señalización

Merece la pena traducir a este contexto particular el concepto abstracto de equilibrio bayesiano perfecto de la Definición 6.4.

Las conjeturas de E son triviales ya que todos sus conjuntos de información h_t son unitarios (por tanto, no nos referiremos explícitamente a ellas), y con respecto a R, una conjetura suya en cualquiera de sus conjuntos de información h'_m es una distribución de probabilidad μ_m que R percibe en el conjunto T de tipos de E tras haber observado el mensaje m. Se supone que el conjunto de tipos T es finito.

De acuerdo con la Definición 6.4, diremos, dado un perfil estratégico $\sigma = (\sigma_E, \sigma_R)$ y un sistema de conjeturas $\mu = \{\mu_m\}_{m \in M}$, que la evaluación (σ, μ) es un **equilibrio bayesiano perfecto** si cumple:

a) El perfil σ es secuencialmente racional con respecto a μ. Es decir:

- Dado cualquier tipo t del emisor, el mensaje (o lotería sobre mensajes) $\sigma_E(t)$ que éste envía al observar su tipo es respuesta óptima por parte de E a la estrategia σ_R del receptor. Dicho de otro modo, $\forall\, t \in T$, $(U_E(\sigma_E(t), \sigma_R(\sigma_E(t)); t) \geqslant U_E(m, \sigma_R(m)); t)$, $\forall\, m \in M)$.
- Dado cualquier mensaje m que reciba del emisor, la acción (o lotería sobre acciones) $\sigma_R(m)$ del receptor es una respuesta óptima esperada por parte de R a dicho mensaje, dada la conjetura μ_m del receptor en el conjunto de información h'_m acerca de los tipos de E. Dicho de otro modo,

$$\forall\, m \in M, \left(\sum_{t \in T} \mu_m(t) \cdot U_R(m, \sigma_R(m); t) \geqslant \sum_{t \in T} \mu_m(t) \cdot U_R(m, a\colon t), \forall\, a \in A \right)$$

donde $\mu_m(t)$ es la probabilidad que dicha conjetura estipula para el tipo t de E cuando R recibe el mensaje m.

b) En cualquier conjunto de información h'_m situado en la trayectoria de equilibrio, las conjeturas de μ son consistentes con las estrategias de σ en el sentido de que las probabilidades de cada conjetura están determinadas, mediante la regla de Bayes, por dichas estrategias. Es decir, tras observar cualquier mensaje m situado en la trayectoria de equilibrio, la conjetura μ_m se determina mediante actualización bayesiana. De ello se deduce:

- La probabilidad prob (h'_m/σ_E) de alcanzar h'_m es no nula, lo que significa que existe algún tipo t de E tal que la probabilidad $\sigma_E(m/t)$ de enviar el mensaje m si se tiene el tipo t es no nula.

- La probabilidad $\mu_m(t)$ que la conjetura estipula para cualquier tipo $t \in T$, es

$$\mu_m(t) = \mu_{h'_m}(t) = \frac{\text{prob}\,(t/\sigma_E)}{\text{prob}\,(h'_m/\sigma_E)} = \frac{p(t)\sigma_E(m/t)}{\sum\limits_{\sigma_E(m/t')>0} p(t')\sigma_E(m/t')}$$

En el caso en que σ_E sea una estrategia pura, la conjetura estipula para cualquier tipo $t \in T$,

$$\mu_m(t) = \frac{p(t)}{\sum\limits_{\sigma_E(t')=m} p(t')}$$

lo que significa que para calcular la probabilidad de un tipo t de E una vez observado un mensaje m, al receptor le basta con dividir la probabilidad a priori de t por la suma de las probabilidades de todos los tipos que envían ese mensaje.

c) En cualquier conjunto de información h'_m situado fuera de la trayectoria de equilibrio, la conjetura μ_m se determina mediante actualización bayesiana, siempre que sea posible. En tal conjunto de información h'_m ocurre que no existe ningún tipo t de E tal $\sigma_E(t) = m$. Pues bien, es evidente que en este caso, al igual que se argumentó en el Ejemplo 6.15 a propósito de la venta de un coche usado (que es un juego básico de señalización), no es posible determinar, a partir de la estructura del juego y del perfil estratégico σ, las probabilidades de la conjetura correspondiente a h'_m. En consecuencia, cualquier conjetura es válida en él. En conclusión, esta condición se cumple de manera trivial.

Puesto que la condición (c) de la definición del EBP se cumple siempre en estos juegos, podemos decir que **todo EBPD de un juego de señalización es EBP.** Merece la pena observar otros tres hechos importantes relativos a los EBP de todo juego básico de señalización finito, que recogemos en el Teorema 6.2. Solo demostraremos los dos primeros.

Teorema 6.2

Sea G un juego básico de señalización finito. Sea $T = \{t_1, t_2, ..., t_k\}$ el conjunto de tipos del emisor.

a) Todo perfil estratégico $\sigma = (\sigma_E, \sigma_R)$ que sea EN es también ENPS.

b) Si el perfil estratégico $\sigma = (\sigma_E, \sigma_R)$ es un EN, y además no hay ningún conjunto de información h'_m de R en el que dicho perfil induzca con probabilidad positiva una acción estrictamente dominada en dicho conjunto, entonces σ es también escenario de un EBP.

c) Todo perfil estratégico $\sigma = (\sigma_E, \sigma_R)$ que sea escenario de un EBP es también escenario de un equilibrio secuencial.

Demostración:

Apartado a) Al no existir ningún subjuego propio, todo EN cumple trivialmente la condición de inducir un EN en cualquier subjuego, luego es un ENPS.

Apartado b) Supongamos que el perfil estratégico $\sigma = (\sigma_E, \sigma_R)$ sea un EN. Definamos la siguiente conjetura μ_m del receptor para cada conjunto de información h'_m. Si h'_m está en la trayectoria de equilibrio, definimos

$$\mu_m(t) = \mu_{h'_m}(t) = \frac{\text{prob}\,(t/\sigma_E)}{\text{prob}\,(h'_m/\sigma_E)} = \frac{p(t)\sigma_E(m/t)}{\sum\limits_{\sigma_E(m/t')>0} p(t')\sigma_E(m/t')}$$

Si h'_m está fuera de la trayectoria de equilibrio, definimos la conjetura μ_m de modo que la acción $\sigma_R(m)$ sea óptima, lo cual es posible porque, por hipótesis, $\sigma_R(m)$ no está estrictamente dominada. Ahora podemos afirmar que la evaluación (σ, μ), donde $\sigma = (\sigma_E, \sigma_R)$ y $\mu = \{\mu_m\}_{m \in M}$, es un EBP, ya que se cumple:

- Primera condición de la racionalidad secuencial. Dado cualquier tipo t del emisor, $\sigma_E(t)$ es respuesta óptima por parte de E a la estrategia σ_R del receptor, por ser (σ_E, σ_R) un EN.
- Segunda condición de la racionalidad secuencial. Dado cualquier mensaje m que reciba del emisor, la acción $\sigma_R(m)$ del receptor es una respuesta óptima esperada por parte de R a dicho mensaje, dada la conjetura σ_m recién definida del receptor en el conjunto de información h'_m.
- Consistencia dentro de la trayectoria del equilibrio. En cualquier conjunto de información h'_m situado en la trayectoria de equilibrio, las conjeturas de μ son consistentes con las estrategias de σ. Así es por definición de μ_m.
- Consistencia fuera de la trayectoria del equilibrio. Se cumple de manera trivial.

Apartado c) Véase Fudenberg y Tirole (1991, Sección 8.3), donde también se da un ejemplo, para un juego más complejo, de un EBP que no es equilibrio secuencial.

Con el fin de facilitar la discusión sobre los EBP de un juego de señalización, y la identificación de algunos de los EBP más interesantes, se definen los conceptos de equilibrio agrupador y equilibrio separador.

Definición 6.8

Sea G juego de señalización.

a) Decimos que una estrategia pura s_E del emisor es una **estrategia de agrupación** si todos los tipos de emisor deciden el mismo mensaje, es decir, si existe un mensaje $m \in M$ tal que $s_E(t) = m$ para todo tipo $t \in T$.

b) Decimos que una estrategia pura s_E del emisor es una **estrategia de separación** si tipos distintos de emisor deciden mensajes distintos, es decir, si $t \neq t'$ implica $s_E(t) \neq s_E(t')$.

c) Decimos que un perfil de equilibrio $\sigma = (\sigma_E, \sigma_R)$ es un **equilibrio agrupador** si σ_E es una estrategia de agrupación, y que es un **equilibrio separador o discriminador** si σ_E es una estrategia de separación.

Dicho con otras palabras, una estrategia pura s_E del emisor es una estrategia de agrupación si define una aplicación constante de T en M, y es una estrategia de separación si define una aplicación inyectiva de T en M. Obsérvese que los equilibrios agrupadores son especiales en el sentido de que los mensajes no ayudan en nada al receptor a estimar o conjeturar los tipos del emisor, pues le dejarán con las probabilidades a priori ya conocidas. Por el contrario, los equilibrios separadores son especiales e interesantes en el sentido de que los mensajes le serán muy útiles para identificar los tipos del emisor, y en ese sentido cumplirán eficazmente su papel de señalización.

Veamos un ejemplo ilustrativo.

Ejemplo 6.20

Este juego, al que llamaremos juego de la querella, es una adaptación de un ejemplo de Morrow (1994) y se conforma al siguiente relato:

> *Tras ser demandado por negligencia, un profesional (J1) ofrece una cantidad q, que puede ser mil o cinco mil euros, al demandante (J2) para que éste retire la querella, y el demandante acepta retirarla o no lo acepta, en cuyo caso se celebra el juicio. La probabilidad a priori de que haya habido negligencia, que es de dominio público, es 1/2, pero el demandado sí sabe si ha sido negligente. Si se celebra el juicio, se sabrá la verdad, aunque resultará costoso (un coste de dos mil euros para cada uno, y una indemnización de I = 5.000 euros, que el demandado habrá de pagar al demandante si resulta culpable).*

En la Figura 6.18 se representa en forma extensiva este juego de señalización, abreviando mediante N y D las expresiones *Negligente* y *Diligente*, y mediante A y NA las expresiones *Acepto* y *No acepto*.

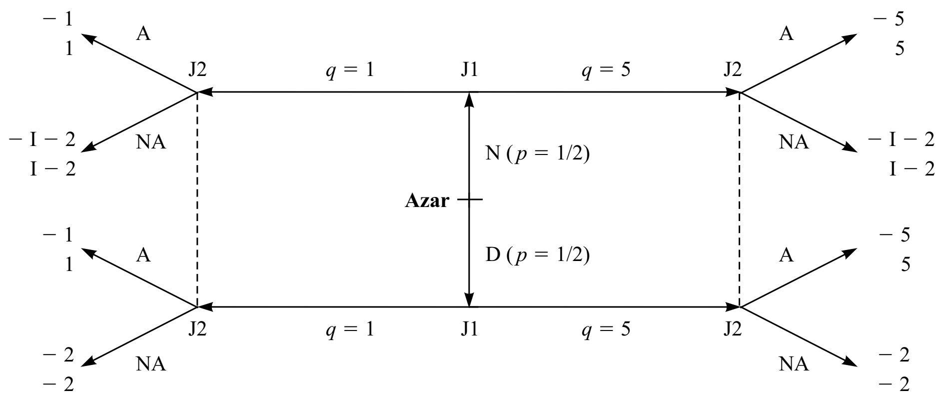


Figura 6.18 El juego de la querella.

El emisor es el demandado (J1), cuyos tipos son N (*negligente*) y D (*Diligente*) y cuyos mensajes son $q = 1$ y $q = 5$, mientras que el receptor es el demandante (J2), cuyas acciones son A (*Acepto*) y NA (*No acepto*). Denotemos como h_3 y h_4 a los conjuntos de información de J2 que siguen, respectivamente, a los mensajes $q = 1$ y $q = 5$. Busquemos los EBP del juego.

Comencemos por los equilibrios agrupadores en estrategias puras:

- Sea $q = 1$ la única oferta-mensaje que realiza J1, sea cual sea su tipo. En ese caso, la respuesta óptima por parte de J2 al mensaje de equilibrio $q = 1$ es A, pues le reporta un pago seguro de 1, que es mayor que el pago esperado (I-2)(1/2) + (-2) (1/2) = (I$-$4)/2 = 1/2 que le reportaría NA. Por otra parte, $q = 1$ para cualquier tipo es la respuesta óptima de J1 ante cualquier estrategia de J2 que responda al mensaje $q = 1$ con A. La repuesta óptima de J2 al mensaje $q = 5$ fuera del equilibrio también sería A, que domina estrictamente a NA en ese conjunto de información. Así pues el perfil $\sigma = ((\sigma_E(\mathrm{N}) = 1,\ \sigma_E(\mathrm{D}) = 1),\ (\sigma_R(1) = \mathrm{A},\ \sigma_R(5) = \mathrm{A}))$ es un equilibrio agrupador. Las conjeturas que lo respaldan son (1/2, 1/2) en el conjunto de información que sigue al mensaje $q = 1$, y $(p,\ 1 - p)$, siendo p cualquier valor de [0, 1], en el conjunto de información que sigue al mensaje $q = 5$.
- Sea $q = 5$ la única oferta-mensaje que realiza J1, sea cual sea su tipo. En ese caso, la respuesta óptima por parte de J2 al mensaje de equilibrio $q = 5$ es A, pues domina estrictamente a NA. Sin embargo, en ese caso a J1 le interesaría desviarse del equilibrio potencial jugando $q = 1$ pues le reporta pagos estrictamente mayores haga lo que haga J2 en respuesta. Así pues, no existe equilibrio agrupador donde $\sigma_E(\mathrm{N}) = \sigma_E(\mathrm{D}) = 5$.

Veamos ahora los equilibrios discriminadores en estrategias puras:

- Sea $q = 5$ la oferta-mensaje que realiza J1 cuando su tipo es N, y $q = 1$ la oferta-mensaje que realiza cuando su tipo es D. Es decir, $\sigma_E(\mathrm{N}) = 5$ y $\sigma_E(\mathrm{D}) = 1$. En ese caso, la respuesta óptima por parte de J2 es A tras cualquier oferta, es decir, $\sigma_R(1) = \sigma_R(5) = \mathrm{A}$. Sin embargo, σ_E: $(\sigma_E(\mathrm{N}) = 5,\ \sigma_E(\mathrm{D}) = 1)$ no es respuesta óptima por parte de J1 a σ_R: $(\sigma_R(1) = \mathrm{A},\ \sigma_R(5) = \mathrm{A})$, ya que $\sigma_E(\mathrm{N}) = 1$ le proporcionaría un pago de -1 en lugar de -5.
- Sea $q = 1$ la oferta-mensaje que realiza J1 cuando su tipo es N, y $q = 5$ la oferta-mensaje que realiza cuando su tipo es D. Es decir, $\sigma_E(\mathrm{N}) = 1$ y $\sigma_E(\mathrm{D}) = 5$. En ese caso, la respuesta óptima por parte de J2 es NA tras la oferta $q = 1$ y A tras la oferta $q = 5$. Es decir, $\sigma_R(1) = \mathrm{NA}$ y $\sigma_R(5) = \mathrm{A}$. Sin embargo, σ_E: $(\sigma_E(\mathrm{N}) = 1,\ \sigma_E(\mathrm{D}) = 5)$ tampoco es respuesta óptima por parte de J1 a σ_R: $(\sigma_R(1) = \mathrm{NA},\ \sigma_R(5) = \mathrm{A})$, ya que $\sigma_E(\mathrm{D}) = 1$ le proporcionaría un pago de -2 en lugar de -5.

En conclusión no existe ningún equilibrio separador, y el único equilibrio agrupador es $\sigma = ((\sigma_E(\mathrm{N}) = 1,\ \sigma_E(\mathrm{D}) = 1),\ (\sigma_R(1) = \mathrm{A},\ \sigma_R(5) = \mathrm{A}))$, respaldado por las conjeturas de J2 (1/2, 1/2) en h_3, y $(p,\ 1 - p)$, siendo p cualquier valor de [0, 1], en h_4.

6.5. APLICACIONES: EL MODELO DE SPENCE DE SEÑALIZACIÓN EN EL MERCADO LABORAL

El modelo de Spence plantea rigurosamente la idea de que el nivel de estudios de un trabajador puede actuar, ante las empresas que podrían contratarlo, como señal indicadora de su productividad laboral. Se trata de uno de los trabajos pioneros en el campo ahora llamado de la señalización. Fue publicado en 1973 y por tanto no está expresado en los términos modernos de la teoría de juegos. De hecho, es anterior a la elaboración de los refinamientos del equilibrio de Nash estudiados en este capítulo. Sin embargo, puesto que pone de manifiesto algunas ideas y cuestiones básicas de los juegos dinámicos con información incompleta (revisión bayesiana, comportamiento fuera del equilibrio, etc.) ha estimulado el estudio y creación de algunos de esos refinamientos.

Vamos a desarrollar en forma simplificada una versión de este modelo, basada en el tratamiento de Tirole (1988), que lo convierte en un juego básico de señalización con dos tipos de emisor, un conjunto continuo de mensajes y dos acciones del receptor. Los resultados de esta adaptación del modelo son equivalentes a los de otras adaptaciones más literales del modelo original, en las que varios receptores compiten en un juego estático tras recibir el mensaje del emisor.

Descripción del juego

El jugador 1 es un trabajador que escoge un nivel de estudios $e \geqslant 0$ y demanda un salario $w \geqslant 0$ al jugador 2, que es una empresa. La empresa acepta o rechaza la oferta. El trabajador tiene una productividad p, que puede ser alta, p_a, o baja, p_b. Él sabe de qué tipo es, pero la empresa sólo conoce la probabilidad a priori, q, de que se trate del tipo de alta productividad. La elección del nivel de estudios por el trabajador tiene costes de adquisición $c(e, p)$ que dependen de ese nivel, pero también de su tipo efectivo.

Vamos a expresar el juego anterior como juego básico de señalización, y a concretar las reglas del juego (haciendo algunas simplificaciones) y los pagos o ganancias.

El jugador 1 es el emisor. Su espacio de tipos es $T = \{p_a, p_b\}$ donde $p_a > p_b$. Elige un mensaje $(e, w) \in M = R_+ \times R_+$ que observa el jugador 2, que es el receptor, el cual elige una acción $a \in \{A, RE\}$, donde A significa *Acepta* y RE significa *Rechaza*, y se acaba el juego. A los mensajes (e, w) les llamaremos también contratos. El coste de adquisición de estudios para los dos tipos es $c(e, p_a) = ec_a$ y $c(e, p_b) = ec_b$, siendo $0 < c_a < c_b$. La función de productividad $g(e; p)$ coincide con p, donde p es el tipo (productividad) del emisor; por tanto la productividad esperada a priori, que denotamos como φ_q, es $qp_a + (1 - q)p_b$. Así pues, dado el mensaje (e, w), el vector de pagos si el receptor elige RE es $(0, 0)$ y si el receptor elige A es:

- $(w - ec_a, p_a - w)$ si el tipo del emisor es p_a.
- $(w - ec_b, p_b - w)$ si el tipo del emisor es p_b.

Obsérvese que en el planteamiento anterior hay varias suposiciones importantes:

- Las funciones $c(e, p)$ de costes de adquisición son lineales. Es una hipótesis simplificadora.
- El coste marginal de adquisición de estudios c_a del tipo de productividad alta es menor, para todo nivel de estudios e, que el coste marginal c_b del tipo de productividad baja. Este supuesto es crucial en el modelo, y recibe el nombre de «propiedad de intersección única».
- La productividad $g(e; p)$ del trabajador para la empresa sólo depende de su tipo y no del nivel de estudios adquirido. Es una hipótesis simplificadora.

En la Figura 6.19 está la representación (aproximada) del juego en forma extensiva.

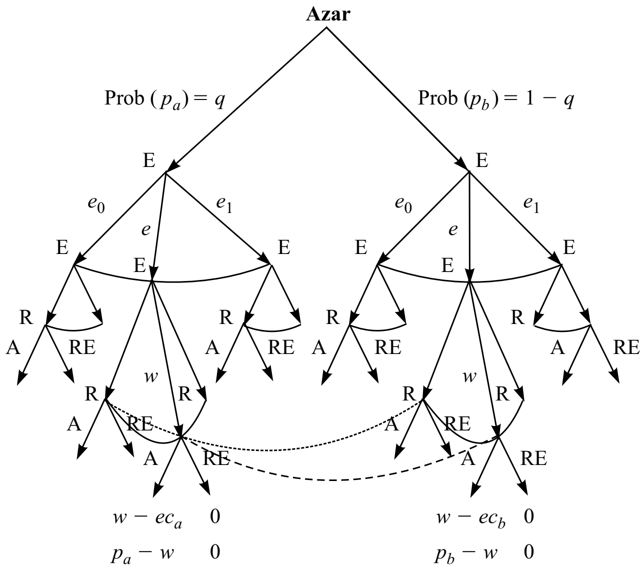


Figura 6.19 Juego del modelo de Spence en forma extensiva.

Análisis previo para el caso más simple de información perfecta

Merece la pena estudiar, a modo de referencia, el caso más simple en que la productividad del trabajador es de dominio público. Se trataría ahora de un juego dinámico con información perfecta al que le sería aplicable la inducción hacia atrás. Según el razonamiento de la inducción hacia atrás, la posibilidad más importante es la siguiente: el receptor R, al tratar con un emisor E de alta productividad p_a elegiría su acción A de aceptación si y sólo si observara un mensaje (e, w) del emisor E tal que $w \leqslant p_a$, mientras que al tratar con un emisor de baja productividad p_b elegiría su acción A de aceptación si y sólo si observara un mensaje (e, w) del emisor E tal que $w \leqslant p_b$. En respuesta a ese plan de acción de R, un emisor E de tipo p_a elegiría un mensaje (e, w) que maximizara $w - ec_a$, lo que conseguiría eligiendo $w = p_a$ y $e = 0$, y un emisor E de tipo p_b elegiría un mensaje (e, w) que maximizara $w - ec_b$, lo que conseguiría eligiendo $w = p_b$ y $e = 0$.

En términos trabajador-empresa, el resultado final sería que un trabajador de cualquier tipo elige el nivel de estudios mínimo y el salario que iguala su nivel de productividad, y que la empresa acepta contratarle. Obsérvese que el resultado es eficiente en el sentido de Pareto, pues cualquier resultado posible que beneficiara más a la empresa (pagando a algún tipo menos que su productividad) perjudicaría a alguno de los tipos de trabajador, y cualquier resultado posible que beneficiara más a alguno de los tipos de trabajador sin perjudicar al otro (aceptando la empresa pagarle un salario mayor), perjudicaría a la empresa.

En la Figura 6.20 se ha representado el resultado de la inducción hacia atrás.

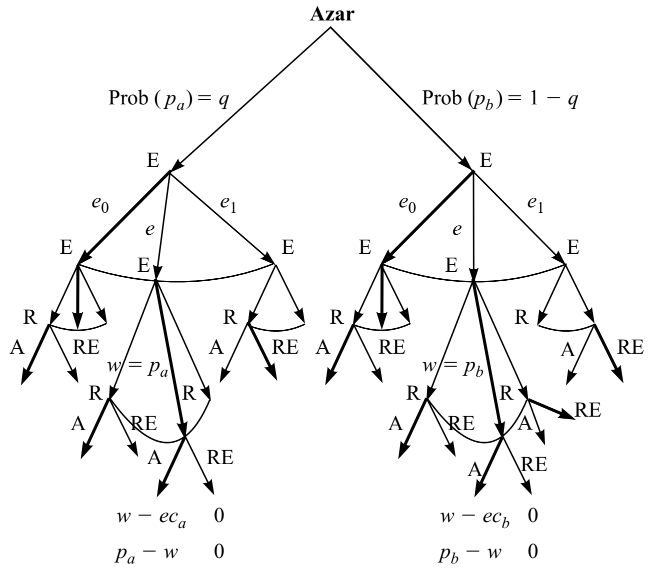


Figura 6.20 Inducción hacia atrás en el caso de información perfecta.

Otro modo útil de visualizar este resultado es representarlo en el plano (e, w) de las variables nivel de estudios y salario, como se hace en la Figura 6.21, donde se muestran las curvas de indiferencia de ambos tipos de jugador.

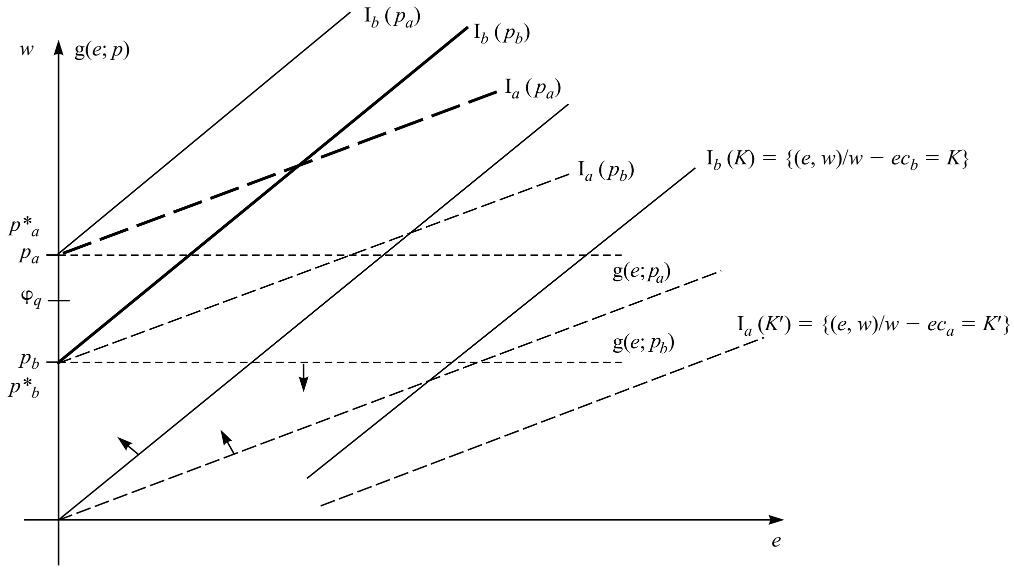


Figura 6.21 Análisis a través de curvas de indiferencia en el caso de información perfecta.

Las curvas de indiferencia del tipo de alta productividad p_a son las rectas más aplanadas $\mathrm{I}_a(K)$ y el equilibrio para ese caso resulta en el punto P_a^* (con gasto nulo en estudios y salario $w^* = p_a$), mientras que las curvas de indiferencia del tipo p_b son las rectas más empinadas $\mathrm{I}_b(K)$ y el equilibrio para ese caso resulta en el punto P_b^* (con gasto nulo en estudios y salario $w^* = p_b$). Unas pequeñas flechas, apoyadas en las curvas de indiferencia y perpendiculares a ellas, indican el sentido en que crece el nivel de la utilidad.

Obsérvese que una curva de indiferencia del tipo p_a tiene una intersección única con una curva de indiferencia del tipo p_b. Es una consecuencia de que sus inclinaciones (al tratarse de rectas, sus pendientes, que son precisamente los costes marginales de cada tipo) son distintas para cualquier valor de e. Las rectas horizontales pueden interpretarse como curvas de indiferencia de la empresa.

Análisis para el caso original. Equilibrios agrupadores en estrategias puras

En un equilibrio agrupador en estrategias puras $s^* = ((s_E^*(p_a), s_E^*(p_b)), (s_R^*(m))_{m \in M})$ ocurre que ambos tipos de emisor eligen un mismo y único mensaje $m^* = (e_0, w_0)$. En ese caso, la conjetura de R tras recibir el mensaje m^* es evidentemente la misma conjetura a priori. Es decir, $\mu_{m^*} = (q, 1 - q)$ siendo q la probabilidad de que el tipo de E sea p_a. Por tanto, la productividad de E esperada por R es $\varphi_q = qp_a + (1 - q)p_b$ y en consecuencia la acción óptima de R ante m^* será *Aceptar* si $w_0 \leqslant \varphi_q$.

¿Cuál será la conjetura de R tras recibir un mensaje $m = (e, w) \neq m^*$, es decir, fuera del equilibrio? Tenemos libertad completa para elegirla, así que la elegiremos atendiendo a razones de simplicidad. Sea $\mu_m = (0, 1)$, es decir, suponemos que R tras recibir un mensaje $m = (e, w) \neq m^*$ conjetura que el tipo del emisor es de baja productividad p_b con toda seguridad. De acuerdo con ello, la acción óptima de R ante $m \neq m^*$ será *Aceptar* si $w \leqslant p_b$.

Resumiendo lo anterior, R responde a $s_E^*(p_a) = s_E^*(p_a)) = m^* = (e_0, w_0)$ de E con la estrategia $(s_R^*(m))_{m \in M})$ consistente en *Aceptar*:

- Si $w_0 \leqslant \varphi_q$ en el caso en que $m = m^* = (e_0, w_0)$.
- Si $w \leqslant p_b$ en el caso en que $m \neq m^* = (e_0, w_0)$.

En consecuencia, es óptimo para cualquier tipo de E que el salario w_0 coincida con φ_q y que el nivel de estudios sea $e_0 = 0$. Por tanto, hemos identificado un equilibrio agrupador en el que la estrategia del emisor es $s_E^*(p_a) = s_E^*(p_a)) = m^* = (0, \varphi_q)$ y la estrategia del receptor es $(s_R^*(m))_{m \in M})$ consistente en aceptar solamente el mensaje de equilibrio $m^* = (0, \varphi_q)$ y aquellos mensajes $m = (e, w) \neq m^*$ fuera del equilibrio en los que $w \leqslant p_b$. Esta estrategia del receptor está sostenida por la conjetura $\mu_{m^*} = (q, 1 - q)$ para el mensaje de equilibrio y por la conjetura $\mu_m = (0, 1)$ para los mensajes fuera de equilibrio.

En otras palabras, en este equilibrio ambos tipos de trabajador ejercen un esfuerzo nulo de adquisición de estudios y reclaman un salario igual a la productividad media a priori φ_q, y la empresa acepta pagar dicho salario pero castiga las desviaciones del mensaje de equilibrio (incluso las consistentes en hacer un esfuerzo mayor de adquisición de estudios) aceptando pagar solo reclamaciones salariales iguales o inferiores a la productividad baja p_b.

¿Existen otros equilibrios de agrupación? Sí, pues el razonamiento anterior para el mensaje de equilibrio $m^* = (0, \varphi_q)$ también sería válido para el mensaje $m^* = (e_0, \varphi)$ siempre que se cumplan dos condiciones:

- $p_b \leqslant \varphi \leqslant \varphi_q$ (si $\varphi < p_b$, cualquier tipo de trabajador desearía desviarse a (e_0, p_b), pues obtendría una ganancia mayor, ya que R también aceptaría. Si $\varphi > \varphi_q$ cualquier tipo de trabajador desearía desviarse a (e_0, φ_q), pues obtendría una ganancia mayor, ya que R aceptaría ahora y no antes).
- $e_0 \leqslant (\varphi - p_b)/c_b$. En este caso, al tipo de productividad baja p_b (y por tanto también al de productividad alta p_a) le conviene más hacer el esfuerzo de adquisición del nivel e_0 de estudios, y así mantener el salario φ, que no hacer ese esfuerzo y obtener solamente (por haberse desviado del equilibrio) el salario p_b. Ello ocurre si el pago p_b es menor o igual que $\varphi - e_0 c_b$, es decir, si $e_0 \leqslant (\varphi - p_b)/c_b$.

Resumiendo, **todas las evaluaciones** $[(s_E^*(p_a), s_E^*(p_b)), (s_R^*(m)_{m\in M}), \mu]$ **que cumplen:**

- $s_E^*(p_a) = s_E^*(p_b) = m^* = (e_0, \varphi)$, donde $p_b \leqslant \varphi \leqslant \varphi_q$ y $e_0 \leqslant (\varphi - p_b)/c_b$.
- $s_R^*(m^*) = Acepta$.
- Para todo $m = (e, w) \neq m^*$, $s_R^*(m) = Acepta$ si y sólo si $w < p_b$.
- Si $m = m^*$, $\mu_m = (q, 1 - q)$, y en caso contrario $\mu_m = (0, 1)$.

son EBP agrupadores de este juego.

En conclusión, existe un continuo de equilibrios agrupadores en estrategias puras, todos ellos respaldados por el anterior sistema de conjeturas en el que R atribuye baja productividad a quien se desvíe del equilibrio. En la Figura 6.22 se representa la situación. Los resultados de los equilibrios agrupadores en estrategias puras encontrados constituyen todos los puntos, incluidos los bordes, del triángulo BQC cuyos lados están señalados en trazo grueso.

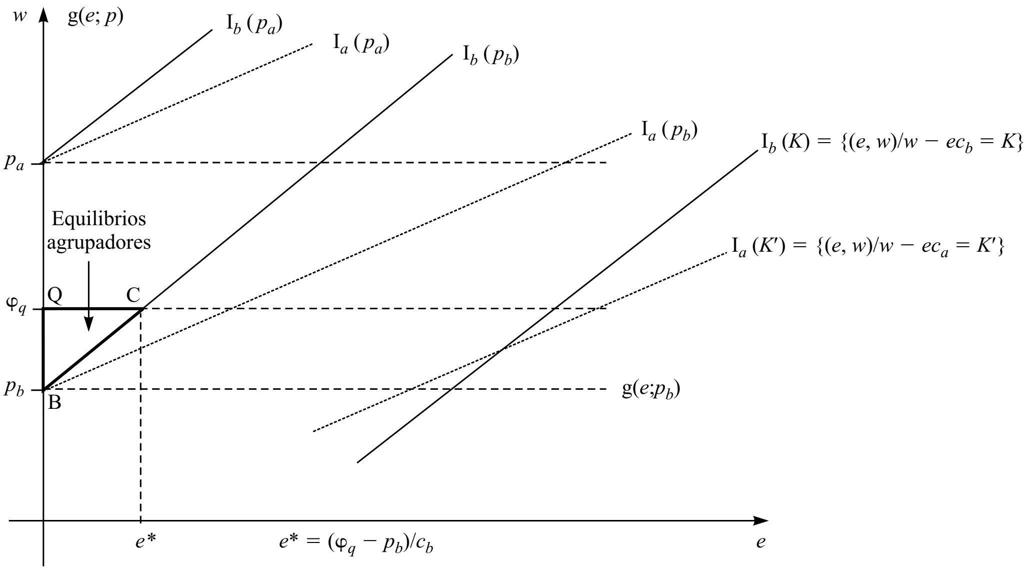


Figura 6.22 Equilibrios agrupadores en el juego del modelo de Spence.

Si comparamos estos resultados de equilibrio con el único equilibrio obtenido cuando la productividad del trabajador era de dominio público, reflejado en la Figura 6.21, es fácil ver que la ausencia de información pública beneficia al trabajador de productividad baja (salvo en el caso extremo del vértice B), perjudica al de productividad alta y perjudica o beneficia a la empresa, según con qué tipo de trabajador se encuentre.

Dos observaciones parecen naturales en este momento:

a) En primer lugar, una modelación con tal multiplicidad de equilibrios (a los ya encontrados habría que añadir los que se obtuvieran asumiendo una conjetura distinta de R ante las desviaciones del equilibrio) parece en cierto modo insatisfactoria.

b) En segundo lugar, todos los equilibrios encontrados, cuyos resultados en el plano (e, w) se encuentran en el triángulo BQC en la Figura 6.22, son ineficientes, salvo los situados en el lado izquierdo BQ, pues incluyen un esfuerzo de adquisición de estudios costoso para ambos tipos de trabajador y superfluo para la empresa (debido a la hipótesis simplificadora que así lo establece).

Hay otra observación importante que hacer, aunque menos obvia que las anteriores, que se refiere al hecho de que casi todos los equilibrios agrupadores encontrados son insatisfactorios de alguna manera que a continuación precisamos. Consideremos el equilibrio que resulta en un punto X = $(0, w_x)$ del segmento BQ muy cercano a B, de tal modo que la pendiente c_x de la recta XC sea cercana a la pendiente c_b de las curvas de indiferencia del tipo de baja productividad (una de las cuales contiene a BC), pero menor, y al mismo tiempo mayor que la pendiente c_a de las curvas de indiferencia del tipo de alta productividad. Es decir, $c_a < c_x < c_b$.

Recordemos que se trata de un equilibrio agrupador en el que la estrategia de E es $s_E^*(p_a) = s_E^*(p_b)) = m^* = (0, w_x)$ y la estrategia del receptor es $(s_R^*(m))_{m \in M}$ consistente en aceptar solamente el mensaje de equilibrio $m^* = (0, w_x)$ y aquellos mensajes $m = (e, w) \neq m^*$ fuera del equilibrio en los que $w \leqslant p_b$. Recordemos también que la conjetura del receptor para todo mensaje que se desvíe del equilibrio (amparada en el hecho de que toda conjetura es válida para los mensajes fuera de equilibrio) es $\mu_m = (0, 1)$ que establece que el tipo que se ha desviado es con toda seguridad el de baja productividad. Sin embargo, ¿qué ocurre si el emisor se desvía del mensaje de equilibrio X = $(0, w_x)$ al mensaje fuera de equilibrio C = (e^*, φ_q)? Téngase en cuenta que de la hipótesis $c_a < c_x < c_b$ se deduce que C está en una curva de indiferencia de mayor nivel de utilidad para el tipo de alta productividad p_a y en una de menor nivel de utilidad para el tipo p_b, y en consecuencia en el paso de X a C el primero de esos tipos sale ganando y el segundo perdiendo.

He aquí una línea de razonamiento bastante *intuitiva* (este calificativo no se ha escogido de modo casual) que podría seguir R al ver la desviación de X a C:

«Esperaba que E enviase el mensaje X, pero ha enviado el C. Seguramente tendrá sus razones, pues no creo que se haya equivocado. En ese caso, no debe de ser del tipo de baja productividad, pues para ese tipo, y en estas circunstancias, el mensaje C está estrictamente dominado por el mensaje X (haga yo lo que haga, sale perdiendo con C. Si rechazo su mensaje C, sale perdiendo porque el mensaje X no lo hubiera rechazado, y si lo acepto, aun así con C consigue un nivel de utilidad menor que con X). En consecuencia, E ha de ser, con toda seguridad, del tipo de alta productividad.»

Así pues, el razonamiento anterior nos dice que en el caso del equilibrio bayesiano perfecto X, la conjetura que lo respalda para mensajes fuera del equilibrio (que se trata del tipo de baja productividad) no es intuitivamente razonable. En términos más generales, hace una crítica a la hipótesis que da libertad total, en los EBP de un juego de señalización, para establecer conjeturas tras los mensajes fuera del equilibrio, y nos dice que no todos los EBP de tal clase de juego son satisfactorios. Algunos autores han propuesto algunas restricciones en la formulación de conjeturas fuera del equilibrio, de modo que estas conjeturas cumplieran determinados criterios razonables. Uno de esos criterios, definido para los juegos de señalización, y que elabora formalmente el razonamiento entrecomillado anteriormente, se llama **criterio intuitivo** y permite realizar una fuerte selección dentro de los EBP. La lógica de ese razonamiento no pertenece al ámbito de la inducción hacia atrás sino al de la llamada «inducción hacia adelante».

Obsérvese que la crítica hecha al equilibrio agrupador con resultado en X puede hacerse también a casi todos los equilibrios agrupadores con resultado en el triángulo BQC (todos, salvo los de los lados QC y CB), suponiendo una desviación de la misma naturaleza, pero de magnitud tan pequeña como sea necesaria para no salir del triángulo BQC. En la Figura 6.23 se representa la situación.

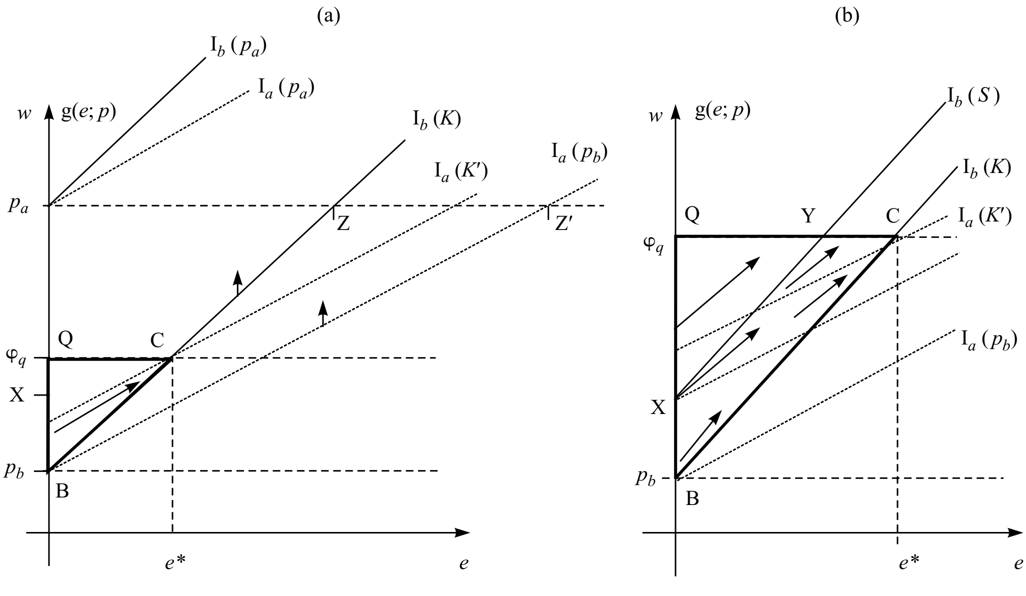


Figura 6.23 Algunas desviaciones significativas desde equilibrios agrupadores.

Equilibrios separadores en estrategias puras

En un equilibrio separador en estrategias puras $s^* = ((s_E^*(p_a), s_E^*(p_a)), (s_R^*(m))_{m\in M})$ ocurre que cada tipo de emisor elige un mensaje diferente, es decir, separan los mensajes de acuerdo con sus tipos. Así pues, $m_a^* = s_E^*(p_a) \neq s_E^*(p_b) = m_b^*$. En ese caso, es evidente que la conjetura de R tras recibir el mensaje de equilibrio m_a^* es $\mu_{m_a^*} = (1, 0)$, y tras recibir el mensaje m_b^* es $\mu_{m_b^*} = (0, 1)$. Dicho de otro modo, R supone necesariamente que quien envía el mensaje m_a^* es el tipo p_a y quien envía el mensaje m_b^* es el tipo p_b.

Sea $m_a^* = (e_a, w_a)$ y $m_b^* = (e_b, w_b)$. La respuesta óptima de R al mensaje m_a^* es *Aceptar* si y sólo si $w_a \leqslant p_a$ (puesto que supone que se trata del tipo p_a) y la respuesta óptima de R al mensaje m_b^* es *Aceptar* si y sólo si $w_b \leqslant p_b$ por análoga razón.

Hay algunas restricciones que pueden imponerse al par de mensajes m_a^* y m_b^*, teniendo en cuenta que s^* es un EBP y cuál es la respuesta óptima de R a dicho par de mensajes.

- La primera es que el tipo p_b reclamará un salario p_b, es decir, $w_b = p_b$. La justificación de esta restricción es la siguiente: a) si $w_b < p_b$, aunque R aceptaría, al tipo p_b le conviene desviarse a la reclamación p_b pues R también la aceptaría (al convenirle, sea cual sea el tipo), y b) si $w_b > p_b$, R la rechazaría, y en consecuencia al tipo p_b le convendría desviarse a la reclamación p_b que R sí aceptaría.
- La segunda es que el tipo p_b elegirá un nivel de estudios nulo, lo que implica $m_b^* = (e_b = 0, p_b)$. La justificación es que si $e_b > 0$, R aceptaría pero al tipo p_b le conviene desviarse al mensaje $(e_b = 0, p_b)$, pues R también aceptaría (al convenirle, sea cual sea el tipo).
- La tercera establece, una vez fijado el mensaje $m_b^* = (0, p_b)$, que el tipo p_a reclamará un salario mayor o igual que el mínimo p_b y menor o igual que el máximo, es decir, $p_b \leqslant w_a \leqslant p_a$. La justificación es la siguiente: a) si $w_a < p_b$, aunque R aceptaría, al tipo p_a le conviene desviarse a la reclamación p_a pues sale ganando tanto si R acepta como si no, y b) si $w_a > p_a$, R la rechazaría, y en consecuencia al tipo p_a le convendría desviarse a una reclamación menor que R sí aceptaría.
- La cuarta, llamada restricción de compatibilidad de incentivos, restringe aún más las posibilidades del mensaje $m_a^* = (e_a, w_a)$ del tipo de alta productividad una vez fijado el mensaje $m_b^* = (0, p_b)$ del otro tipo. Tiene dos partes:

  1. Es preciso que $w_a - p_b \geqslant c_a e_a$, es decir, que el punto $m_a^* = (e_a, w_a)$ esté situado en o por encima de la curva de indiferencia $\mathrm{I}_a(p_b)$ (la del tipo p_a que pasa por $(0, p_b)$), correspondiendo así a una curva de indiferencia de dicho tipo, con igual o mayor nivel de utilidad. La justificación es que en caso contrario el tipo p_a no querría separar su mensaje del tipo p_b (le convendría más simular que es de tipo p_b enviando el mensaje $(0, p_b)$).
  2. Es preciso que $w_a - p_b \leqslant c_b e_a$, es decir, que el punto $m_a^* = (e_a, w_a)$ esté situado en o por debajo de la curva de indiferencia $\mathrm{I}_b(p_b)$ (la del tipo p_b que pasa por $(0, p_b)$), correspondiendo así a una curva de indiferencia de dicho tipo, con igual o menor nivel de utilidad. La justificación es que en caso contrario el tipo p_b no querría separar su mensaje del tipo p_a (le convendría más simular que es de tipo p_a enviando el mensaje (e_a, w_a)).

Para averiguar si los perfiles supervivientes a las restricciones anteriores son efectivamente equilibrios bayesianos perfectos, falta completar cuatro tareas

- La primera tarea es precisar y concretar la estrategia de respuesta óptima de R a los mensajes de E en el supuesto equilibrio, es decir, $s_R^*(m_a^*)$ y $s_R^*(m_b^*)$. Sea $s_R^*(m_a^*) = \mathit{Acepta}$ y $s_R^*(m_b^*) = \mathit{Acepta}$.
- La segunda tarea es precisar y concretar la estrategia de respuesta óptima de R a los mensajes de E fuera de equilibrio, es decir, $s_R^*(m)$ donde $m = (e, w) \neq m_a^*$ y $m \neq m_b^*$. Sea $s_R^*(m) = \mathit{Acepta}$ si $w < p_b$ y *Rechaza* en caso contrario.
- La tercera tarea es proponer las conjeturas de R tras cada mensaje de E, es decir, μ_m para $m \in M$. Podemos elegirlas libremente. Sean las conjeturas siguientes: si

$m = m_a^*$, $\mu_m = (1, 0)$, y en caso contrario $\mu_m = (0, 1)$. Es decir, si R observa el mensaje m_a^* considera que lo emitió con seguridad el tipo de alta productividad p_a, y si observa cualquier otro mensaje considera que lo emitió con seguridad el tipo de baja productividad p_b.

- La cuarta y última tarea es comprobar que todas las piezas encajan, es decir, que se cumplen, para cualquiera de los equilibrios propuestos, las condiciones de un EBP en un juego de señalización:
  1. Condición de racionalidad secuencial 1. Tanto el mensaje del tipo p_a, $s_E^*(p_a)$, como el del tipo p_b, $s_E^*(p_b)$, son respuesta óptima a la estrategia s_R^* de R. Se cumple, pues la respuesta a ambos mensajes es *Acepta*.
  2. Condición de racionalidad secuencial 2. La acción $s_R^*(m)$ es respuesta óptima de R, dada la conjetura μ_m, a cualquier mensaje m de E. Se cumple obviamente.
  3. Condición (b) del EBP. Tras observar cualquier mensaje m situado en la trayectoria de equilibrio, la conjetura μ_m se determina mediante actualización bayesiana. Se cumple obviamente, pues tras el mensaje $m = m_a^*$, la conjetura actualizada es $\mu_m = (1, 0)$, y tras el mensaje $m = m_b^*$, la conjetura actualizada es $\mu_m = (0, 1)$.
  4. Condición (c) del EBP. Tras observar cualquier mensaje m situado fuera de la trayectoria de equilibrio, la conjetura μ_m se determina mediante actualización bayesiana, si ello es posible. Como sabemos, se cumple trivialmente.

Resumiendo, **todas las evaluaciones** $[((m_a^*, m_b^*), s_R^*), \mu]$ **que cumplen:**

- $m_b^* = (0, p_b)$
- $m_a^* = (e_a, w_a)$, donde $p_b \leqslant w_a \leqslant p_a$, $w_a - p_b \leqslant c_b e_a$ y $w_a - p_b \geqslant c_a e_a$
- $s_R^*(m_a^*) = Acepta$, $s_R^*(m_b^*) = Acepta$
- Para todo $m = (e, w) \neq m_a^*$ y $m \neq m_b^*$, $s_R^*(m) = Acepta$ si y sólo si $w < p_b$
- Si $m = m_a^*$, $\mu_m = (1, 0)$, y en caso contrario $\mu_m = (0, 1)$

son EBP separadores de este juego.

Los EBP mencionados pueden visualizarse como una pareja de mensajes en el plano (e, w), o más fácilmente aún, por un mensaje m_a^* del tipo p_a, ya que el mensaje $m_b^* = (0, p_b)$ del tipo p_b es fijo. En la Figura 6.24, se muestran dichos mensajes m_a^*, que constituyen todos los puntos, incluidos los bordes, del triángulo BYZ cuyos lados están señalados en trazo grueso.

Si comparamos también estos resultados de equilibrio con el único equilibrio obtenido cuando la productividad del trabajador era de dominio público, reflejado en la Figura 6.21, y con los resultados de los equilibrios agrupadores, reflejados en la Figura 6.22, observaremos que ahora el trabajador de baja productividad no resulta beneficiado por la ausencia de información pública, y que ahora es ineludible un esfuerzo de adquisición de estudios por parte del trabajador de productividad alta, incluso más intenso que en el equilibrio agrupador. Podría decirse que la idea de separación es eficaz para distinguir ambos tipos de trabajador y para que le sea posible al tipo de alta productividad obtener un salario igual o cercano a su verdadera productividad, pero tras pagar el coste de adquisición de estudios que ha hecho viable esa separación.

Las observaciones que se hicieron, a propósito de los equilibrios agrupadores, referentes a la multiplicidad de equilibrios, a la ineficiencia en el sentido de Pareto de casi

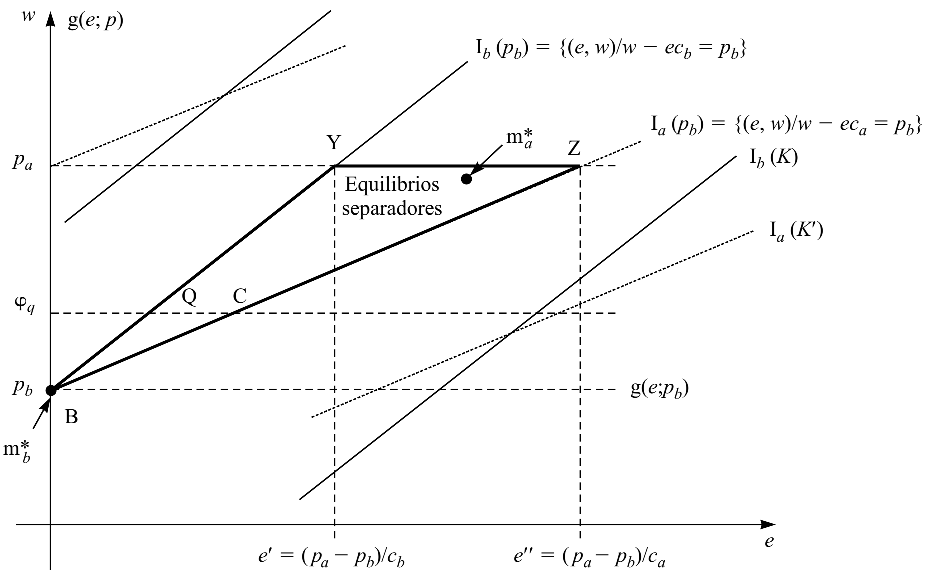


Figura 6.24 Equilibrios separadores en el juego del modelo de Spence.

todos ellos y al no cumplimiento por casi todos del criterio intuitivo en la formulación de conjeturas fuera del equilibrio, siguen siendo válidas para los equilibrios separadores. No obstante, existe un equilibrio separador especial del que podríamos decir que es el más natural y razonable. Se trata del equilibrio en el cual el mensaje del tipo de alta productividad es $m_a^* = (e', p_a)$, donde $e' = (p_a - p_b)/c_b$. Se trata de un equilibrio eficiente y además (aunque no lo demostraremos) es el único equilibrio separador que cumple el criterio intuitivo.

Para concluir el estudio del modelo de Spence, plantearemos un caso particular extremo de dicho modelo, cuyo análisis tiene interés comparativo.

Análisis del caso particular en el que no es posible la señalización

Merece la pena estudiar este caso, también a modo de referencia. Supongamos que la variable nivel de estudios se elimina del análisis estratégico. A efectos de comparación, consideraremos el modelo equivalente en el que dicho nivel se mantiene nulo obligatoriamente. Revisemos en este contexto las fases del análisis anterior.

Información perfecta

El análisis realizado anteriormente sigue siendo válido, con sólo sustituir los mensajes vectoriales $m = (e, w)$ por mensajes escalares $m = w$. Razonando por inducción hacia atrás, R, al tratar con un E de alta productividad p_a elegiría su acción *Aceptar* si y sólo si observara un mensaje $w \leqslant p_a$, mientras que al tratar con un E de baja productividad p_b elegiría su acción *Aceptar* si y sólo si observara un mensaje $w \leqslant p_b$. En respuesta a esa estrategia de R, un E de tipo p_a elegiría un mensaje w que maximizara su salario, lo que conseguiría eligiendo $w = p_a$, y un E de tipo p_b elegiría, por análoga razón, un mensaje $w = p_b$.

En la Figura 6.25 se representa el juego en forma extensiva, la inducción hacia atrás y el EBP obtenido en el espacio de los mensajes (se ha mantenido un eje de nivel de estudios a efectos de comparación).

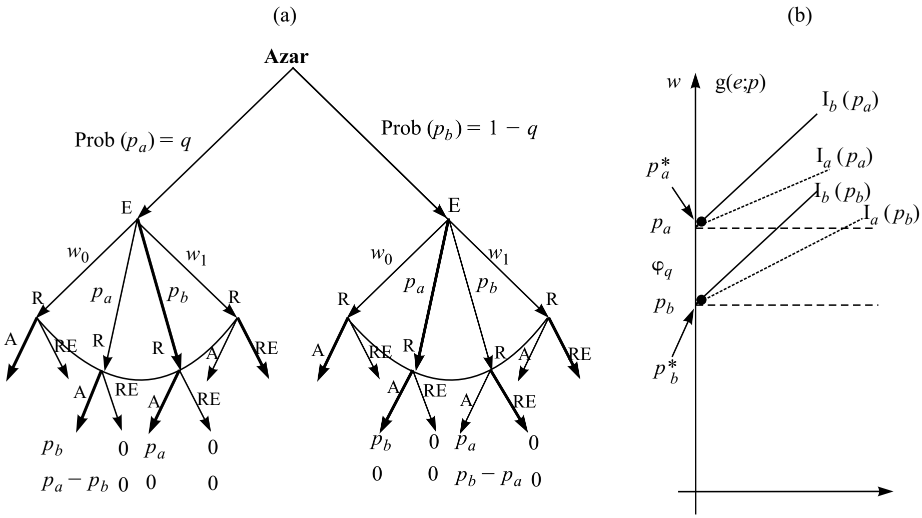


Figura 6.25 Caso sin variable señalizadora nivel de estudios. Información perfecta.

En términos trabajador-empresa, el resultado final sería que un trabajador de cualquier tipo elige el salario que iguala su nivel de productividad, y la empresa acepta contratarle. Recuérdese que este resultado es eficiente en el sentido de Pareto.

Información imperfecta. Equilibrios agrupadores y separadores en estrategias puras

El análisis realizado anteriormente también sigue siendo válido, sin más que sustituir los mensajes vectoriales $m = (e, w)$ por mensajes escalares $m = w$ y sustituir e por 0 en aquellas restricciones en que aparece e. Obtendríamos así:

1. Son EBP agrupadores de este juego todas las evaluaciones

$$[((s_E^*(p_a), s_E^*(p_b)), (s_R^*(m)_{m \in M}), \mu]$$

que cumplen

- $s_E^*(p_a) = s_E^*(p_b) = m^* = \varphi$, donde $p_b \leqslant \varphi \leqslant \varphi_q$
- $s_R^*(m^*) = Acepta$
- Para todo $m = w \neq m^*$, $s_R^*(m) = Acepta$ si y sólo si $w < p_b$
- Si $m = m^*$, $\mu_m = (q, 1 - q)$, y en caso contrario $\mu_m = (0, 1)$.

2. Son EBP separadores de este juego todas las evaluaciones

$$[((s_E^*(p_a), s_E^*(p_b)), (s_R^*(m)_{m \in M}), \mu]$$

que cumplen

- $s_E^*(p_b) = m_b^* = p_b$

- $s_E^*(p_a) = m_a^* = w_a$, donde $p_b \leqslant w_a \leqslant p_a$, $w_a - p_b \leqslant 0$ y $w_a - p_b \geqslant 0$, lo que implica que $w_a = p_b$. Obsérvese que esto contradice la propia existencia de equilibrio separador.

Por tanto, existe un continuo de equilibrios agrupadores, pero ningún equilibrio separador en estrategias puras.

En la Figura 6.26 se representa la situación. Los resultados de los equilibrios agrupadores sin señalización en estrategias puras constituyen todos los puntos, incluidos los bordes, del segmento BQ, señalado en trazo grueso. Los conjuntos triangulares encontrados cuando era posible la señalización se han indicado también.

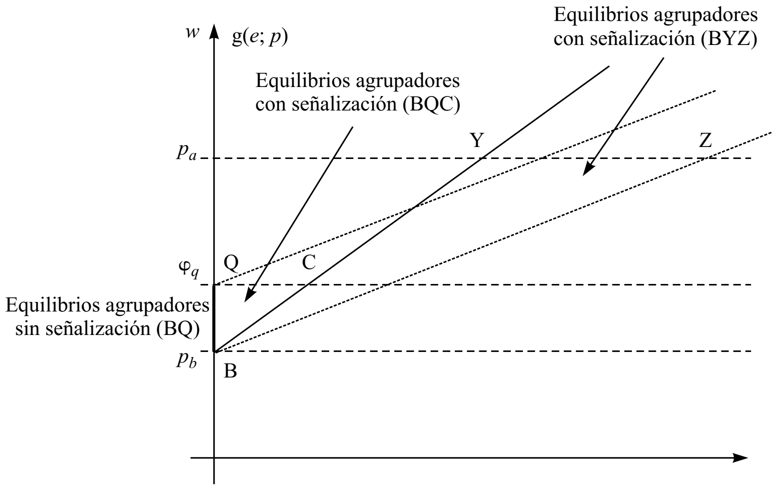


Figura 6.26 Equilibrios sin señalización versus equilibrios con señalización.

Analicemos las características de los resultados de equilibrio de este modelo con información privada y sin señalización, en comparación con el caso en que sí hay señalización, restringiendo la discusión a los equilibrios en estrategias puras. La propia Figura 6.26 nos guiará en el comentario.

En primer lugar desaparecen los equilibrios separadores que eran posibles con señalización, lo cual es beneficioso para el tipo de baja productividad p_b, ya que en esos equilibrios él siempre recibía el «mínimo» salario posible, p_b. No es posible establecer por anticipado si esa desaparición es perjudicial para el tipo de alta productividad, aunque sí puede haber una región de resultados alcanzables en equilibrio separador con señalización que son superiores para este tipo a todos los resultados alcanzables en equilibrio sin señalización. Se trata de la región del triángulo BYZ situada por encima de la curva de indiferencia de dicho tipo que pasa por el punto Q(0, φ_q). Obsérvese que esta región puede agrandarse hasta coincidir con el triángulo de BYZ conforme la probabilidad a priori q se acerca a 0, y empequeñecerse hasta desaparecer si dicha probabilidad es suficientemente alta.

En segundo lugar, al comparar el triángulo BQC de los equilibrios agrupadores con señalización con el segmento BQ de los equilibrios agrupadores sin señalización, vemos que el salario de equilibrio no varía, pero que al impedir la señalización se ha ganado en eficiencia, ya que todos los equilibrios agrupadores con señalización (salvo los de BQ) están Pareto-dominados por algún equilibrio sin señalización.

Relación entre el modelo de Akerlof y el modelo de Spence

Es interesante observar que el juego del modelo sin señalización que acabamos de estudiar es, desde un punto de vista formal, casi idéntico al juego venta de un coche usado estudiado en los Ejemplos 6.6 y 6.15, y que está en la base del modelo de Akerlof.

Obsérvese que la estructura de ambos juegos es idéntica, correspondiendo el emisor E con la vendedora V, ambos con la información privada, en un caso relativo a los dos tipos de productividad, y en el otro a los dos tipos de calidad. Se corresponden asimismo el receptor R con el comprador C, y los mensajes proponiendo un salario w con las propuestas de precio de venta v, reservándose en ambos casos al segundo jugador las opciones de aceptar o rechazar el intercambio. La única diferencia significativa entre ambos juegos radica en las funciones de ganancia de ambos jugadores, pero basta con considerar las diferencias en las ganancias del jugador 1.

En el juego de Spence sin señalización el jugador 1, E, tiene por ganancia un salario w (que se ha supuesto implícitamente que siempre es positivo), en caso de que R acepte la propuesta w, o bien una ganancia nula si R la rechaza. Por tanto, las ganancias de E si hay aceptación (es decir, si se produce el intercambio) siempre son iguales o superiores a las correspondientes al rechazo. Sin embargo, en el juego venta de un coche usado la jugadora 1, V, tiene por ganancia un precio de venta v menos su valoración del coche (que pudiera ser superior a ese precio v), en caso de que C acepte la propuesta v, o bien una ganancia nula si C la rechaza. Por tanto, las ganancias de V si hay aceptación podrían ser inferiores a las correspondientes al rechazo.

Dicho de otro modo, en el juego de Spence sin señalización se ha asumido implícitamente que al jugador que tiene la iniciativa le interesa participar en el intercambio, trabajar con cualquier salario (dilucidándose, mediante el análisis de los equilibrios, sólo los niveles del intercambio, es decir, su salario), mientras que en el juego venta de un coche usado al jugador que tiene la iniciativa puede no interesarle participar en el intercambio, pues V no querrá vender el coche por un precio inferior al valor que le atribuye (y lo que se dilucida en el análisis de los equilibrios es si hay o no intercambio, y a qué niveles podría producirse).

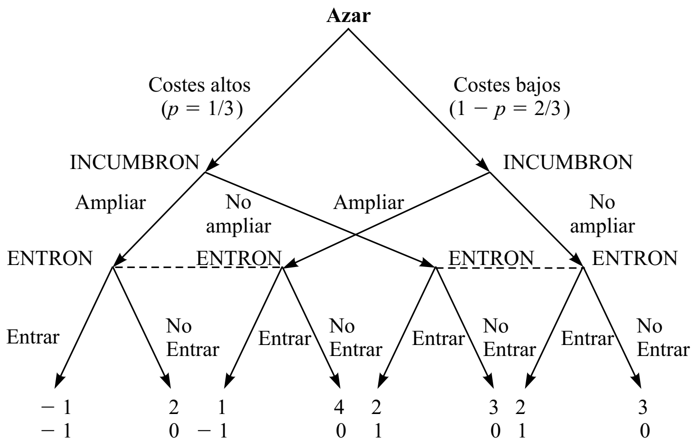
La equivalencia formal completa entre esos dos juegos se restablecería si en el juego de Spence hiciéramos la suposición (relativamente razonable) de que el trabajador tiene la posibilidad de trabajar fuera de esa empresa, con un salario «estimado» dependiente de su verdadera productividad, que suele recibir el nombre de *salario de reserva*. En ese caso, podríamos decir que ambos juegos son el mismo, y ello nos permitiría establecer la siguiente relación entre los modelos:

El modelo de Akerlof apunta un problema general (ausencia de intercambios o fallo de mercado, causada por el hecho de que algunas informaciones cruciales para esos intercambios son privativas de sólo uno de los agentes que intervienen), e ilustra el problema especificando los detalles en algunas situaciones particulares como el mercado de coches usados. Por su parte el modelo de Spence analiza una situación en la que se asume que determinadas acciones de señalización (elección de nivel de estudios) contrarrestan en cierto modo el fallo de mercado que se produciría sin ellas, por las razones expuestas en el modelo de Akerlof.

EJERCICIOS PROPUESTOS

6.1 Analice todos los equilibrios en estrategias puras del juego de disuasión a la entrada introducido en el Ejemplo 5.5 del capítulo anterior.

6.2 Considérese el siguiente juego de disuasión a la entrada, adaptado a partir de un ejemplo de Bierman y Fernández (1998). Antes de que ENTRON decida entre *Entrar* y *No entrar*, observa la decisión de INCUMBRON de ampliar la capacidad de su planta de producción o no ampliarla. Pero ENTRON no sabe si los costes de dicha ampliación son altos o bajos, sólo estima que hay una probabilidad de 1/3 de que sean altos, y de 2/3 de que sean bajos. Por otra parte, debido a que esa ampliación permitiría a INCUMBRON rebajar los costes de producción, a la empresa ENTRON sólo le convendría entrar si la expansión no se produjera. La representación en forma extensiva es:



Analice todos los equilibrios en estrategias puras de este juego.

6.3 Halle los equilibrios de agrupación y de separación, en estrategias puras, del juego de la querella del Ejemplo 6.20, para todo valor de la indemnización I en el intervalo [0, 10].

6.4 Considérese la siguiente simplificación del juego venta de un coche usado del Ejemplo 6.6, en la que se consideran sólo dos precios de venta, $v = 4$ y $v = 8$, y los valores de los parámetros son:

— Probabilidad a priori de que la calidad del coche sea alta: $q = 1/2$.
— Valor de un coche de calidad alta: $u_{a,V} = 6$ para la vendedora y $u_{a,C} = 9$ para el comprador.
— Valor de un coche de calidad baja: $u_{b,V} = 0$ para la vendedora y $u_{b,C} = 3$ para el comprador.

Por tanto, el valor esperado a priori por el comprador de un coche cuya calidad no conoce es $\varphi_q = qu_{a,C} + (1 - q)u_{b,C} = 6$.

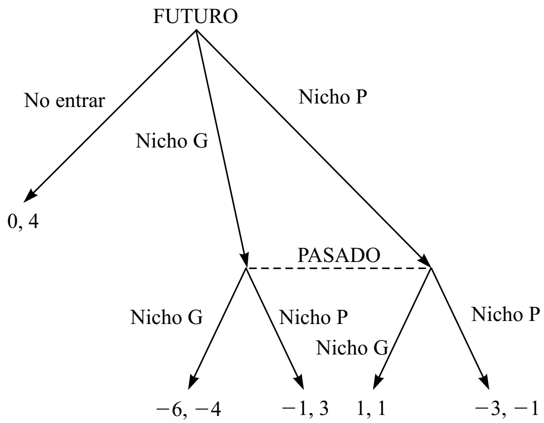
a) Represente este juego en forma extensiva y halle los equilibrios de agrupación y de separación, en estrategias puras, de este juego.
b) Halle los equilibrios de separación, en estrategias puras, para cualquier valor de q en el intervalo [1/2, 1].

6.5 Supóngase que en el juego anterior la vendedora puede optar entre ofrecer una garantía sobre reparaciones de avería (G) o no ofrecerla (NG). La garantía consiste en hacerse cargo de costes ocasionados por averías durante un año. Es de dominio público que el gasto esperado por razón de averías en un año es 1/2 si la calidad del coche es alta y 2 si la calidad es baja.

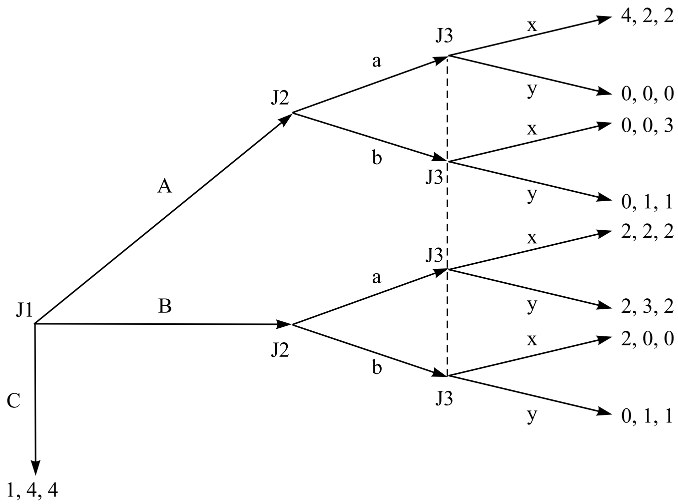
Halle los equilibrios de agrupación y de separación, en estrategias puras, de este nuevo juego (siendo $q = 1/2$).

6.6 La empresa FUTURO está considerando su introducción en una industria, que hasta ahora ha sido un monopolio de la empresa PASADO. Si entra, puede dirigir su producción a dos nichos de mercado distintos, que denominaremos Nicho Grande y Nicho Pequeño. El hasta ahora monopolista sólo sabe si la empresa potencial entrante FUTURO ha decidido entrar o no, pero no observa a qué nicho de mercado ha dirigido sus esfuerzos, y debe decidir si dirige su producción al Nicho Grande o Pequeño.

Teniendo en cuenta que las ganancias de ambas empresas son las que aparecen en el árbol de juego, hallar los EBP y los equilibrios secuenciales en estrategias puras, especificando el sistema de conjeturas que los sustentan.

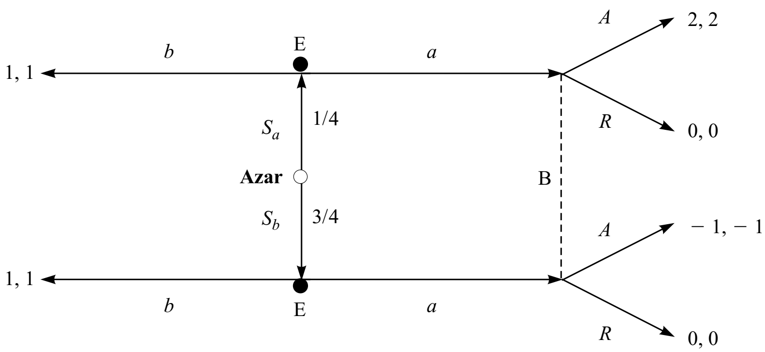


6.7 Considere el siguiente juego con tres jugadores con información completa pero imperfecta y determine cuáles de los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos, en estrategias puras, son escenario de un EBP.



6.8 La empresa E quiere solicitar un préstamo al banco B para financiar un proyecto de inversión. Se sabe que hay solicitantes con proyectos que dan un bajo rendimiento y solicitantes con proyectos que dan un alto rendimiento, pero sólo el solicitante conoce el tipo. La probabilidad *ex ante* de estar frente a un solicitante con un proyecto de alto rendimiento es 1/4. Las solicitudes para proyectos de bajo rendimiento se procesan inmediatamente sin costes adicionales, y se conceden inmediatamente. Las solicitudes para proyectos de alto rendimiento requieren una cantidad de dinero mayor a prestar, y el proceso de aprobación es más costoso por ambas partes.

Sean S_a y S_b, los tipos posibles de solicitante de la empresa E, según se trate de una empresa con proyecto de alto o bajo rendimiento. Independientemente de su tipo la empresa E puede presentar una solicitud de préstamo a o b, según se trate de una solicitud de préstamo para un proyecto de alto rendimiento o para un proyecto de bajo rendimiento. Por su parte, el banco B ante cualquier solicitud presentada puede aprobar (A) o rechazar (R) dicha solicitud. El siguiente árbol de juego representa el modelo, indicando los pagos correspondientes a cada circunstancia:

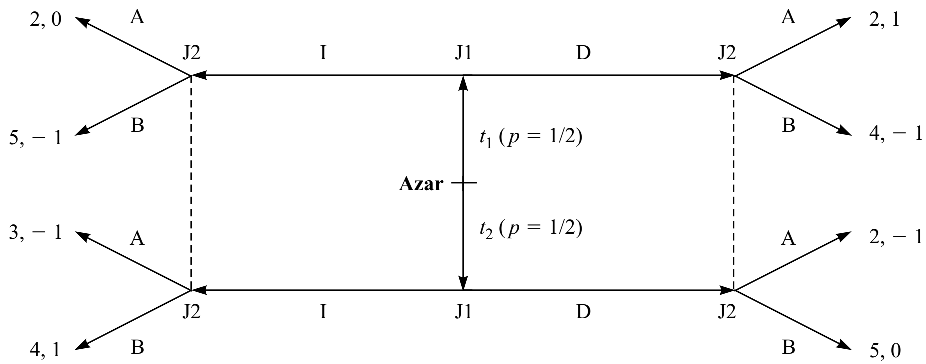


Calcule los equilibrios bayesianos perfectos, en estrategias puras.

6.9 Consideremos la siguiente versión del juego de la verdad. Dos jugadores J1 y J2 compiten en un juego en el que su organizador tiene una moneda sesgada de manera que al lanzarla aleatoriamente al aire proporciona cara en el 60% de las veces, siendo dicho sesgo conocido por ambos jugadores. El controlador del juego lanza una moneda al aire, y muestra el resultado al jugador J1. Éste, a continuación, hace una declaración al jugador J2 sobre el resultado del lanzamiento de la moneda, permitiéndosele al jugador J1 decir sólo «cara» o «cruz» (sin poder añadir ningún comentario). Seguidamente, el jugador J2, que ha oído lo que dice el jugador J1, pero que no ha visto el resultado del lanzamiento, debe indicar cuál cree que es el resultado real del lanzamiento: «cara» o «cruz». Con esta declaración se acaba el juego.

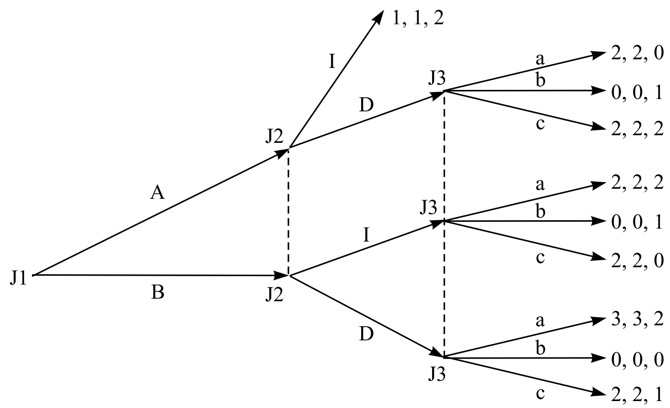
Los pagos se establecen de la siguiente manera: para el jugador J2 las cosas son bastante sencillas: obtiene un pago de 1 u.m. si adivina el resultado real del lanzamiento y 0 u.m. en caso contrario. Para el jugador J1 las cosas son un poco más complicadas: obtiene 2 u.m. si el jugador J2 dice «cara» y 0 u.m. si dice «cruz», independientemente de cuál sea el resultado real del lanzamiento de la moneda; además de esos pagos el jugador J1 obtiene 1 u.m. adicional si lo que declara al jugador J2 coincide con el resultado real del lanzamiento de la moneda, y 0 u.m. adicionales si su mensaje al jugador J2 difiere del resultado real. Represente el árbol del juego y calcule los equilibrios bayesianos perfectos en estrategias puras.

6.10 Considere el siguiente juego de señalización.



Calcule los equilibrios bayesianos perfectos y los equilibrios secuenciales.

6.11 Halle los equilibrios bayesianos perfectos, los equilibrios secuenciales y los equilibrios perfectos de mano temblorosa del juego siguiente, tomado de Ritzberger (2002):



6.12 Pedro subasta un billete de 500 € entre Carlos y Blanca con las siguientes reglas: juegan por turnos, aquel a quien le toca jugar puede pasar, lo que pondría fin al juego, o bien, si los tiene, ofrecer (pujar) 200 € más que el anterior. Empieza Blanca (pasando o pujando 200 €). Gana el último en pujar (o lo decide una moneda al azar si ninguno ha pujado) y éste se lleva el billete, pero ambos pagan su última puja.

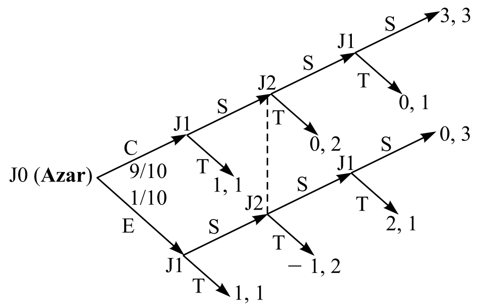
Aparte de las reglas, es de conocimiento común que Carlos dispone de 600 €, mientras que Blanca puede disponer de 300 o 600 € con probabilidades 1/3 y 2/3 respectivamente.

A modo de ejemplo, dos de los posibles desarrollos del juego son: 1) El azar determina que Blanca dispone sólo de 300 € y Blanca pasa. 2) El azar determina que Blanca dispone de 600 €, Blanca puja 200 €, Carlos pasa.

Se pide:

1. Dibujar la forma extensiva del juego y determinar todos los EN.
2. Hallar razonadamente todos los EBP. ¿Existe algún equilibrio agrupador?

6.13 Considérese la siguiente versión del juego del Trespiés en la que con probabilidad 9/10 el jugador J1 interpreta que se juega el juego del Trespiés desarrollado en el Ejemplo 6.3 y con probabilidad 1/10 el jugador J1 interpreta que se juega otra versión del mismo en el que los pagos que recibe fluctuan con mayor dispersión, y donde el jugador J2 no sabe si se enfrenta a un jugador J1 que interpreta de un modo correcto (C) o erróneo (E) el juego.



CAPÍTULO 7

Juegos repetidos

En este capítulo vamos a analizar los juegos repetidos, que son una familia particular de juegos dinámicos con una estructura temporal simple, consistente en que durante varias etapas determinados jugadores, los mismos en cada etapa, completan un determinado juego, siempre el mismo, llamado juego de etapa, haciéndose públicos los resultados y recibiendo cada jugador sus pagos tras cada etapa. Debe entenderse que una situación con estas características no es una mera acumulación de juegos sueltos, sino que constituye un juego complejo en el que las jugadas en las etapas posteriores se pueden hacer depender de cómo se jugó en etapas anteriores y, en consecuencia, las jugadas en una etapa determinada pueden decidirse según sus consecuencias en etapas posteriores. Puesto que las interacciones sociales y económicas repetidas son muy habituales e importantes, es lógico pensar que su modelación mediante juegos repetidos puede ser fructífera para comprender ciertos aspectos importantes de la realidad económica y social.

Mediante los juegos repetidos se pretende modelar aquellas relaciones económicas, políticas, sociales, etc., a las que los individuos se enfrentan de un modo repetido o rutinario, como por ejemplo la competencia entre vendedores, las negociaciones sindicales, o cualquier otro tipo de relación en la que los mismos agentes tienen que enfrentarse o negociar entre sí, no de un modo único sino en distintos momentos del tiempo y de una forma repetitiva.

Se aplicarán a estos juegos los conceptos de equilibrio introducidos en capítulos anteriores, en particular el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. El análisis de estos juegos resulta facilitado por la especial estructura de los mismos.

En las secciones siguientes se aborda, tras una primera sección introductoria, el estudio de los juegos repetidos finita e infinitamente en los que el juego de etapa es de información completa. Se concluye con una aplicación, el duopolio de Cournot repetido infinitamente.

7.1. INTRODUCCIÓN

En los Capítulos 4 y 6 se han estudiado los juegos dinámicos y se han definido los conceptos de equilibrio apropiados para esos juegos, en particular el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) y el equilibrio bayesiano perfecto (EBP). Algunos juegos dinámicos tienen una estructura natural por etapas, y tienen además la siguiente propiedad en cuanto a la información de los jugadores: en el momento de comenzar una etapa cualquiera, es de dominio público cuál ha sido la historia previa del juego, es decir, cómo se ha desarrollado el juego (qué jugadas ha realizado cada jugador, y qué resultados se han producido en las jugadas de azar, si estas existen) hasta ese momento. Un caso particular dentro de este tipo de juegos es el de los **juegos repetidos**, en los cuales en cada etapa actúan los mismos jugadores y juegan siempre el mismo juego.

En este tipo de juegos, llamados habitualmente polietápicos, es útil razonar hacia atrás del siguiente modo: ¿cómo se jugarán los subjuegos que representan a la última etapa? Si lo supiéramos, podríamos «podar» la última etapa del juego y considerar como terminales los nodos que preceden inmediatamente a dicha etapa. A continuación repetiríamos la pregunta anterior, pero referida a los subjuegos que ahora representan la última etapa. En la medida en que podamos responder a la pregunta anterior podremos dar un paso hacia atrás en el árbol y reducir éste un poco más. Así seguiríamos hasta llegar al nodo inicial.

En el caso más simple de los juegos dinámicos con información perfecta, se avanzaba hacia atrás suponiendo que cada jugador realizaba una acción óptima, acción que podíamos identificar siempre ya que los pagos o consecuencias de sus acciones dependían sólo de dicho jugador. Sin embargo, en el caso que nos ocupa, y cuando se está jugando una determinada etapa, puede no tener sentido preguntarse por la acción (o estrategia) óptima de un jugador, pues sabemos que dicha acción óptima no tiene por qué existir de modo absoluto, sino que depende de qué hagan los otros jugadores. Ahora bien, como estamos especialmente interesados en buscar los ENPS del juego, es razonable suponer que, en la que actualmente sea la última etapa, los jugadores jugarán algún EN. Supuesto que en los subjuegos que representan la última etapa los jugadores juegan un EN particular, ya podemos podar el árbol y avanzar en el razonamiento hacia atrás.

Esto significa que también en estos juegos es aplicable la inducción hacia atrás generalizada. Entonces, ¿por qué diferenciarlos del resto de los juegos y darles un tratamiento individualizado? La respuesta es que este tipo de juegos se caracteriza por la existencia de una interacción repetida de los mismos jugadores en las mismas circunstancias. Esta característica de los juegos repetidos nos permite utilizarlos para intentar explicar por qué muchos fenómenos económicos y sociales producen comportamientos muy diferentes en función del número de interacciones, es decir, nos permiten entender por qué los individuos se comportan de una determinada forma cuando saben que la situación a la que se enfrentan no se va a volver a repetir, y de un modo completamente diferente cuando saben que en un periodo corto de tiempo o con determinada periodicidad se va a repetir la misma situación.

Intuitivamente, la razón de esta diversidad de comportamientos se encuentra en la creencia de los jugadores en que el comportamiento presente puede de alguna manera afectar al comportamiento futuro de los individuos, de tal manera que se puede condicionar con el fin de sacar partido de él en el futuro. Dicho de otro modo, si el comportamiento futuro se puede ver influido por el comportamiento presente, entonces un individuo se verá en cierta medida estimulado a evitar aquellas acciones que puedan generar un castigo futuro y a realizar aquellas que puedan verse recompensadas más adelante.

En lo que sigue analizaremos bajo qué circunstancias un jugador debe condicionar su comportamiento con el fin de evitar un castigo o buscar una recompensa en el futuro. Es decir, analizaremos la credibilidad de las amenazas o promesas que los jugadores puedan hacerse en situaciones que están sujetas a una interacción repetida.

Merece la pena subrayar la característica crucial que diferencia un juego repetido finitamente de un juego repetido infinitamente: se trata del conocimiento de los jugadores al principio del juego sobre cuál es la última etapa. En un juego repetido n veces, los jugadores saben desde el principio (o dicho con más precisión, es de dominio público) que va a haber exactamente n etapas del juego, tras las cuales se acaba, y que la etapa enésima será la última. Por el contrario, en un juego repetido infinitas veces no se requiere la repetición efectiva (por lo demás imposible) del juego de etapa, sino la posibilidad permanente de proseguir el juego, de manera que de ninguna etapa puede decirse anticipadamente que va a ser la última.

Supongamos, por ejemplo, que decidimos jugar el dilema del prisionero de manera indefinida pero especificando que, tras cada etapa, se hará un lanzamiento de un dado equilibrado y que se concluirá el juego global cuando y sólo cuando salga un seis. Pues bien, lo que nos proponemos iniciar es un juego infinito, aunque en sus realizaciones concretas ocurra unas veces que se juegan sólo 3 etapas, y otras veces que se juegan 50 etapas, y aunque sepamos que el número medio de etapas que se juegan en una realización concreta del juego es 7.

Factor de descuento, valor presente descontado y pago medio

Uno de los problemas a los que nos enfrentamos cuando tenemos en cuenta el horizonte temporal en que puede desarrollarse un juego es la valoración de los resultados en distintos momentos del tiempo: ¿tiene el mismo valor o utilidad para un individuo una unidad monetaria hoy que dentro de un año?, ¿es constante la utilidad que obtenemos de un mismo resultado o de un mismo bien cuando la recibimos en distintos momentos del tiempo? En general, la respuesta es no.

El valor o utilidad que los agentes económicos atribuyen a recibir una cantidad de dinero (o cualquier otro hecho al que atribuyan utilidad) tiene un carácter temporal, depende del momento en que haya de producirse la recepción. En particular, la utilidad que un agente atribuye en el momento presente t a cobrar más tarde una determinada cantidad de dinero depende del momento t' en que se vaya a efectuar el cobro.

De manera general, los agentes económicos prefieren disponer del dinero en una fecha cercana que en una lejana. Esta preferencia por el «ahora» frente al «más tarde» cabe atribuirla esencialmente a dos razones o factores. La primera radica en la seguridad del presente frente a la incertidumbre del futuro, y así lo expresa el refrán «Más vale pájaro en mano que ciento volando». En virtud de esta razón, ningún agente presta dinero a una operación económica arriesgada si no recibe como promesa de pago futuro una cantidad sustancialmente mayor que la que prestó, de modo que se compense el riesgo de que la promesa no se cumpla. La segunda razón procede del hecho de que disponer ahora del dinero nos da más oportunidades de actuación que disponer de él en el futuro, aunque sea seguro que esa promesa de disponibilidad futura se va a cumplir. En virtud de esta segunda razón, incluso al prestar dinero al gobierno (por ejemplo, comprando Letras del Tesoro), que conlleva en los países desarrollados un riesgo mínimo de perder su dinero, se exige un tipo de interés que compense de la pérdida de oportunidades que la disponibilidad del dinero brinda.

Formalizaremos el primer factor mediante una probabilidad β y el segundo mediante una tasa de preferencia temporal o tipo de interés α (en tanto por uno), donde $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $0 \leqslant \alpha$.

Para ilustrar ambas razones, y al mismo tiempo formalizarlas, veamos qué relación ha de existir entre dos sumas de dinero de modo que a un agente dado (neutral al riesgo) le resulte indiferente cobrar la primera en una fecha dada o la segunda en una fecha posterior. Para concretar, calculemos qué cantidad C′, a pagar en el instante t, habría que ofrecer a dicho agente para que la prefiriera igualmente que cobrar C u.m. en el instante $t + 1$ (un año después, por ejemplo). Si tuviera la certeza de que no fallará el cobro aplazado, exigiría (por la sola razón de que prefiere el dinero antes) una cantidad $C' < C$. Sea $C' = C/(1 + \alpha)$. Puede interpretarse, ya que $C = C'(1 + \alpha)$, que α es el tipo de interés, en tanto por uno, que refleja la preferencia temporal sin riesgo de dicho agente, también llamada **preferencia de liquidez**. Si ahora introducimos el riesgo de que no cobre en el instante $t + 1$, y dicho agente estima que la probabilidad de cobrar es $\beta < 1$, se mostrará indiferente entre cobrar βC con seguridad y tener la promesa de cobrar C con ese riesgo de incumplimiento. El factor β cuantifica lo que podríamos llamar la preferencia derivada de la **incertidumbre sobre el futuro**.

Considerando conjuntamente ambas razones, resulta que el agente en cuestión es indiferente entre la promesa (con probabilidad β de cumplimiento) de cobrar C en el instante $t + 1$, y tener la seguridad de cobrar βC en ese mismo instante. Por otra parte, es indiferente entre cobrar βC en el instante $t + 1$ (supuesto que el cumplimiento del cobro es seguro) y cobrar $\beta C/(1 + \alpha)$ en el instante t.

En resumen, y llamando δ al cociente $\beta/(1 + \alpha)$, concluimos que el agente es indiferente entre cobrar C en $t + 1$ y cobrar $C' = \delta C$ en t.

Definición 7.1

Dado un agente económico y un periodo temporal τ, llamamos **factor de descuento** de ese agente, en ese periodo, al número real positivo δ tal que dicho agente es indiferente entre cobrar la cantidad δC en un instante t o la cantidad C en el instante $t + \tau$.

Dicho de otro modo, el factor de descuento δ es el valor, en unidades de pago actuales, de una unidad de pago que se hará efectiva un periodo más tarde.

La definición anterior nos proporciona un modelo simple (un único factor multiplicativo) de preferencia temporal que incorpora las dos razones básicas, anteriormente explicadas, por las cuales un beneficio o utilidad en el presente es preferido a un beneficio nominalmente igual, pero a recibir en el futuro. Los valores extremos, $\delta = 0$ y $\delta = 1$, corresponden, respectivamente, al caso en que el agente sólo valora el presente (impaciencia extrema) y al caso en que valora en igual medida el futuro que el presente (paciencia extrema). Dado un factor de descuento δ, se llama tasa de descuento asociada, denotada r, a la cantidad $r = \frac{1}{\delta} - 1$ (de tal modo que $\delta = \frac{1}{1 + r}$).

En adelante consideraremos fijo el intervalo temporal al que se refiere la definición del factor de descuento (a menudo lo interpretaremos como un año) para no tener que referirnos a él.

Es fácil ahora, basándose en la Definición 7.1, comparar dos pagos cuya fecha difiere en un número cualquiera de intervalos temporales básicos.

Si el factor de descuento es δ, resulta obvio que todos los pagos siguientes son igualmente preferibles:

C/δ^m a pagar en el instante $t + m$
....
C/δ^2 a pagar en el instante $t + 2$
C/δ a pagar en el instante $t + 1$
C a pagar en el instante t

Como muchas decisiones económicas, tanto individuales como de grupo, involucran la existencia de flujos de pagos, constituidos por una secuencia de pagos realizados en diferentes fechas, es preciso saber comparar unos flujos con otros en términos de las preferencias del decisor. Esa comparación nos la posibilita el concepto de factor de descuento. Además, es conveniente disponer de una especie de unidad de medida, es decir, de una referencia que permita sistematizar ordenadamente las comparaciones aludidas. Esa referencia es el valor presente, que se definirá a continuación.

Definición 7.2

Sea $\{q_t\}_{t=1,2,\dots}$ una secuencia o flujo de pagos, finita o infinita.

a) Dado un factor de descuento δ, el **valor presente descontado** de la secuencia de pagos $\{q_t\}_{t=1,2,\dots}$ se denota $\mathrm{VP}[\{q_t\}_{t=1,2,\dots}, \delta]$, y se define como

$$\mathrm{VP}[\{q_t\}_{t=1,2,\dots}, \delta] = q_1 + \sigma q_2 + \delta^2 q_3 + \cdots + \delta^{t-1} q_t + \cdots = \sum_t q_t \delta^{t-1}$$

b) Dado un factor de descuento δ, el **pago medio** de la sucesión de pagos $\{q_t\}_{t=1,2,\dots}$ es el pago fijo q^* tal que la secuencia constante $\{q_t^*\}_{t=1,2,\dots}$, donde $q_t^* = q^* \; \forall\, t$, tiene el mismo valor presente descontado que la sucesión de pagos inicial $\{q_t\}_{t=1,2,\dots}$.

Recordemos la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica de razón δ y primer término igual a la unidad, pues nos será útil en las discusiones que siguen. Dada la sucesión geométrica $\{g_t\}_{t=1,2,\dots}$ donde $g_t = \delta^{t-1} \; \forall\, t$:

- La suma de sus T primeros términos es $\sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} = \dfrac{1 - \delta^T}{1 - \delta}$.
- La suma de sus infinitos términos, si $0 < \delta < 1$, es

$$\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} = \lim_{t \to \infty} \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} = \frac{1}{1 - \delta}$$

Observación 7.1

1. El valor presente es un número finito, y por tanto está bien definido, sólo si la serie es finita o infinita convergente.

2. Para evitar los problemas técnicos derivados del hecho de que el valor presente sea infinito, suele suponerse, en el caso de secuencias infinitas de pagos, que la sucesión está acotada (existe un número mayor que todos los pagos de la sucesión) y que $\delta < 1$, pues así aseguramos que la serie que define el valor presente es convergente.

3. Si $\delta = 1$, el pago medio q^* del flujo o secuencia finita de pagos $\{q_t\}_{t=1,2,\ldots,T}$ es simplemente la media aritmética de los valores de dicha secuencia, ya que,

$$q^*_t = q^* \; \forall\, t, \; \mathrm{VP}[\{q_t\}_{t=1,2,\ldots,T}, 1] = \mathrm{VP}[\{q_t^*\}_{t=1,2,\ldots,T}, 1] = \sum_{t=1}^{T} q_t^* = Tq^*$$

4. Si $\delta \neq 1$, el pago medio q^* del flujo o secuencia de pagos finita $\{q_t\}_{t=1,2,\ldots,T}$ es fácilmente calculable mediante la fórmula

$$q^* = \frac{1-\delta}{1-\delta^T}\mathrm{VP}[\{q_t\}_{t=0,1,2,\ldots,T}, \delta]$$

En efecto,

$$q_t^* = q^* \; \forall\, t, \; \mathrm{VP}[\{q_t\}_{t=1,2,\ldots,T}, \delta] = \mathrm{VP}[\{q_t^*\}_{t=1,2,\ldots,T}, \delta] = \sum_{t=1}^{T} q_t^* \delta^{t-1} =$$

$$= q^* \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} = q^* \frac{1-\delta^T}{1-\delta}$$

De aquí se deduce, si $0 < \delta < 1$, que el pago medio q^* del flujo o secuencia infinita de pagos $\{q_t\}_{t=1,2,\ldots,\infty}$ se calcula mediante la fórmula

$$q^* = (1-\delta)\mathrm{VP}[\{q_t\}_{t=1,2,\ldots,\infty}, \delta]$$

Ejemplo 7.1

La Tabla 7.1 ilustra los valores presentes y pagos medios de algunas secuencias de pagos, para distintos factores de descuento. Las cuatro primeras secuencias son finitas y las cuatro últimas infinitas.

Tabla 7.1

Factor de descuento	Secuencia de pagos	Valor presente	Pago medio
$\delta < 1$	$\{q_t\}_{t=1,2,\ldots,T}$	$\sum_{t=1}^{T} q_t\delta^{t-1}$	$\frac{1-\delta}{1-\delta^T}\sum_{t=1}^{T} q_t\delta^{t-1}$
$\delta < 1$	$\{q_t^*\}_{t=1,2,\ldots,T}$, donde $q_t^* = q^*$	$\sum_{t=1}^{T} q^*\delta^{t-1} = q^* \frac{1-\delta^T}{1-\delta}$	q^*

Tabla 7.1 *(Continuación)*

Factor de descuento	Secuencia de pagos	Valor presente	Pago medio
$\delta = 1$	$\{q_t\}_{t=1,2,...,T}$	$\sum_{t=1}^{T} q_t$	$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} q_t$
$\delta = 0$	$\{q_t\}_{t=1,2,...,T}$	q_1	q_1
$\delta < 1$	$\{q_t\}_{t=1,2,...,\infty}$	$\sum_{t=1}^{\infty} q_t\delta^{t-1}$	$(1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty} q_t\delta^{t-1}$
$\delta < 1$	$\{q_t^*\}_{t=1,2,...,\infty}$, donde $q_t^* = q^*$	$\sum_{t=1}^{\infty} q^*\delta^{t-1} = \frac{q^*}{1-\delta}$	q^*
$\delta = 1$	$\{q_t\}_{t=1,2,...,\infty}$	$\sum_{t=1}^{\infty} q_t$	$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} q_t$
$\delta = 0$	$\{q_t\}_{t=1,2,...,\infty}$	q_1	q_1

Obsérvese que, efectivamente, $\delta = 0$ corresponde al caso en que el agente sólo valora el presente (impaciencia extrema) ya que de una secuencia de pagos sólo cuenta el primero de ellos, mientras que los pagos futuros tienen valor 0. Además, $\delta = 1$ corresponde al caso en que el agente valora en igual medida el futuro que el presente (paciencia extrema), todos los pagos se valoran por igual y el valor presente de una secuencia de pagos coincide con la suma de éstos.

Vectores de pagos factibles de un juego

Definición 7.3

Dado un juego finito $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, decimos que el vector de pagos $(x_1, x_2, ..., x_n)$ es **factible** o **alcanzable** si es una combinación lineal convexa de los vectores de pagos correspondientes a perfiles de estrategias puras de G.

Es decir, cada componente x_i de un vector de pagos factible es una media ponderada, con ponderaciones positivas o nulas que suman 1, de los pagos que al jugador i le reportan todos los perfiles en estrategias puras del juego, y además las ponderaciones son las mismas para todos los jugadores. En términos más técnicos, los vectores de pagos factibles constituyen la envoltura convexa del conjunto de vectores de pagos de perfiles en estrategias puras. En general, son conjuntos cuya dimensión coincide con el número de jugadores. El conjunto de vectores de pagos factibles puede definirse como la intersección de todos los conjuntos convexos de $\boldsymbol{R}^n$ a los que pertenecen todos los vectores de pagos de perfiles en estrategias puras.

Por ejemplo, los vectores de pagos factibles en el dilema del prisionero son todos aquellos que se encuentran en el cuadrilátero cuyos vértices son (1, 1), (0, 5), (4, 4) y (5, 0). Cualquiera de los vectores de pagos correspondientes a perfiles de estrategias mixtas de un juego G es factible. Sin embargo, no podemos afirmar lo contrario. En efecto, existen vectores de pagos factibles (como por ejemplo el vector (3/2, 3/2) de la batalla de los sexos) que no corresponden a ningún perfil de estrategias mixtas.

En la Figura 7.1 se representan gráficamente los conjuntos de vectores de pagos factibles del dilema del prisionero, la caza del ciervo, el juego de disuasión 1 y la batalla de los sexos.

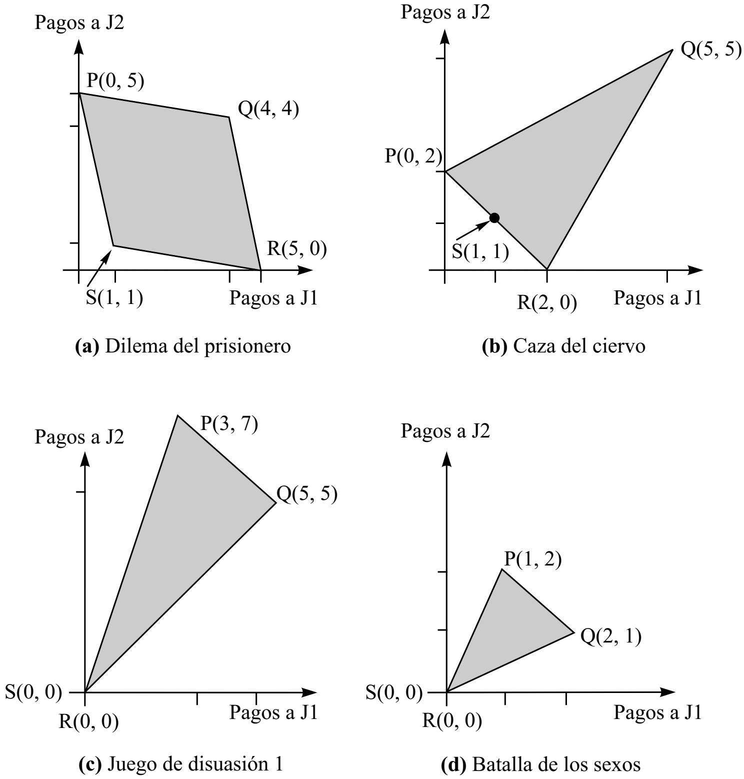


Figura 7.1 Vectores de pagos factibles.

Algunos ejemplos introductorios

Ejemplo 7.2

Consideremos el caso en el que el juego de la caza del ciervo, definido en el Ejemplo 2.5, se repite dos veces. A continuación mostramos, para el caso particular en que V = 5 y W = 1, la representación en forma estratégica del juego de etapa y la representación en forma extensiva del juego global (en ésta se ha abreviado *Cooperar* mediante COOP y *Buscar Liebre* mediante BL, y se han obtenido los pagos del juego global sumando los del juego de etapa).

Juego de etapa: la caza del ciervo (V = 5, W = 1)

		Jugador 2	
		Cooperar	Buscar liebre
Jugador 1	Cooperar	5, 5	0, 2
	Buscar liebre	2, 0	1, 1

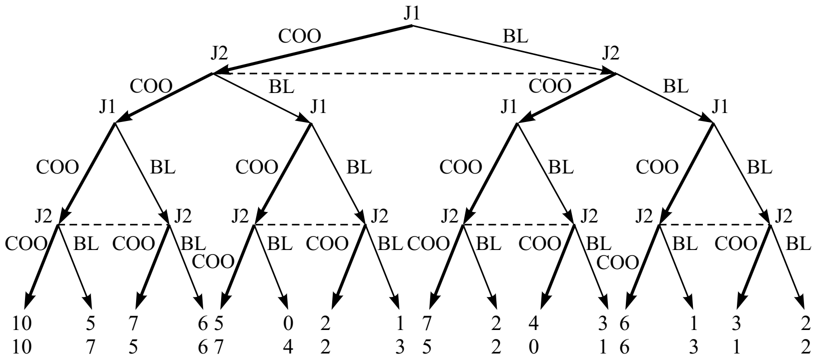


Figura 7.2 Caza del ciervo repetido dos veces, con $\delta = 1$.

El juego de etapa tiene aquí dos EN en estrategias puras, que son (*Cooperar*, *Cooperar*) y (*Buscar liebre*, *Buscar liebre*). En el juego global, que es de información imperfecta, ambos jugadores tienen 5 conjuntos de información (uno correspondiente a la primera etapa y cuatro correspondientes a la segunda etapa), y en cualquiera de ellos las opciones factibles son *Cooperar* y *Buscar liebre*, y por tanto ambos jugadores tienen 2^5 estrategias puras y el número de perfiles en estrategias puras es 2^{10}. Las estrategias puras del jugador i tienen la estructura $(a_i^1,\ a_i^2 - a_i^3 - a_i^4 - a_i^5)$ donde $a_i^k \in \{Cooperar, Buscar\ liebre\}$.

Es interesante observar sobre este sencillo caso particular de juego repetido algunos hechos que tienen validez general en los juegos repetidos:

- En primer lugar, la razón de que cada jugador tenga 4 conjuntos de información correspondientes a la segunda etapa se debe a que hay precisamente cuatro desarrollos previos (o historias) posibles del juego en el momento de comenzar esa etapa, y además, a que cuál sea el desarrollo efectivamente realizado es una información conocida por ambos jugadores (aun más, de dominio público), en ese momento.
- Todos los subjuegos propios de este juego tienen unas características y una estructura especiales: todos comienzan al iniciar J1 su jugada de la segunda etapa y todos reproducen exactamente el juego de etapa.

Es fácil aplicar a este juego global, tal como se estudió en el Capítulo 4, la inducción hacia atrás generalizada, que nos permitiría identificar varios ENPS en estrategias puras. Uno de ellos, $s = (s_1,\ s_2)$, donde $s_1 = s_2 =$ (*Cooperar*, *Cooperar-Cooperar-Cooperar-Cooperar*), se ha señalado mediante líneas gruesas en la Figura 7.2.

Ejemplo 7.3

Consideremos ahora el caso en el que el juego de etapa es el dilema del prisionero, definido en el Ejemplo 2.1. A continuación mostramos de nuevo la forma estratégica del juego de etapa.

Juego de etapa: dilema del prisionero

		Preso 2	
		Callar	Confesar
Preso 1	Callar	4, 4	0, 5
	Confesar	5, 0	1, 1

a) Considérese que el número de etapas sea finito y fijado de antemano. En el caso de dos etapas, la forma extensiva del juego global, que se representó en la Figura 4.5, tiene una estructura idéntica a la del juego repetido anterior, representado en la Figura 7.2, y por tanto le es aplicable lo que hemos dicho sobre la estructura de los conjuntos de información, de las estrategias y de los subjuegos. Supongamos ahora que hubiese tres etapas. En el juego global ambos jugadores tendrían 21 conjuntos de información, (uno correspondiente a la primera etapa, cuatro a la segunda y 16 a la tercera) y en cualquiera de ellos las opciones factibles son *Callar* y *Confesar*, y por tanto ambos jugadores tienen 2^{21} estrategias puras y el número de perfiles en estrategias puras es 2^{42}. Las estrategias puras del jugador i tienen la estructura $(a_i^1,\ a_i^2 - a_i^3 - a_i^4 - a_i^5,\ a_i^6 - a_i^7 - \cdots - a_i^{21})$ donde $a_i^k \in \{Callar,\ Confesar\}$.

Tal como se hizo en el Ejemplo 4.26 para 2 etapas, si se aplica la inducción hacia atrás generalizada a este juego global, para cualquier $\delta > 0$ y cualquier número de etapas, se obtendrá, debido al hecho de que la acción *Confesar* domina estrictamente a *Callar* en el juego de etapa, el siguiente único ENPS: $s = (s_1,\ s_2)$, donde $s_1 = s_2 =$ (*Confesar* en todos los conjuntos de información, *Confesar* en todos los conjuntos de información).

b) Considérese ahora que el número de etapas se decida lanzando un dado equilibrado tras cada etapa, y concluyendo el juego sólo si se obtiene un 6. Supóngase también que los pagos globales se obtienen sumando los pagos de las etapas efectivamente jugadas (es decir, que la preferencia temporal pura se caracteriza por una paciencia extrema en los jugadores). Este es un juego repetido infinitamente. Las siguientes son algunas estrategias del jugador 1 que podríamos llamar incondicionadas (porque no hacen depender del desarrollo previo del juego las acciones decididas en cada etapa):

- *Confesar* en cualquier etapa.
- *Callar* en cualquier etapa.
- *Confesar* con probabilidad 1/3 y *Callar* con probabilidad 2/3, en cualquier etapa.
- *Confesar* en las etapas pares y *Callar* en las impares.

Por el contrario, las siguientes son algunas estrategias condicionadas del jugador 1:

- *Confesar* en la primera etapa, *Callar* en las posteriores si el jugador 2 calló en la primera, y *Confesar* en las posteriores si el jugador 2 confesó en la primera.

• *Callar* en la primera etapa y repetir en la etapa $(t + 1)$-*ésima* lo que el jugador 2 haya hecho en la *t-ésima*.

Parece evidente que, también ahora, el perfil estratégico en el que cada jugador se propone *Confesar* en todos sus conjuntos de información es un ENPS. Sin embargo, ¿seguirá siendo el único ENPS? En las próximas secciones se contestará a esta pregunta.

Ejemplo 7.4

Supongamos ahora que el juego de etapa es el juego de disuasión 1, definido en el Ejemplo 4.1. A continuación se muestra, para dos etapas, la representación en forma extensiva del juego global (en ésta se ha abreviado *No entrar* por *Ne*, *Entrar* por *E*, *Competir duro* por *Cd* y *Competir suave* por *Cs*, y además se han obtenido los pagos del juego global sumando los del juego de etapa).

El juego de etapa tiene aquí dos EN, que son (*E*, *Cs*) y (*Ne*, *Cd*), pero sólo el primero de ellos es ENPS, tal como se puso de manifiesto en el Ejemplo 4.15. Debido a que el juego de etapa es en este caso dinámico de información perfecta, también lo es el juego repetido o global, al contrario de lo que ha ocurrido en los dos ejemplos anteriores, cuyo juego de etapa es estático. En este caso ambos jugadores tienen 4 conjuntos de información, (uno correspondiente a la primera etapa y 3 a la segunda).

Por ser de información perfecta, este juego es resoluble por inducción hacia atrás, lo que nos permite identificar el único ENPS del juego, que es $s = (s_1, s_2)$, donde s_1 es la estrategia de ENTRON consistente en *Entrar* en cualquiera de sus conjuntos de información, y s_2 es la estrategia de INCUMBRON consistente en *Competir suave* en cualquiera de sus conjuntos de información. Se ha señalado mediante líneas gruesas en la Figura 7.3.

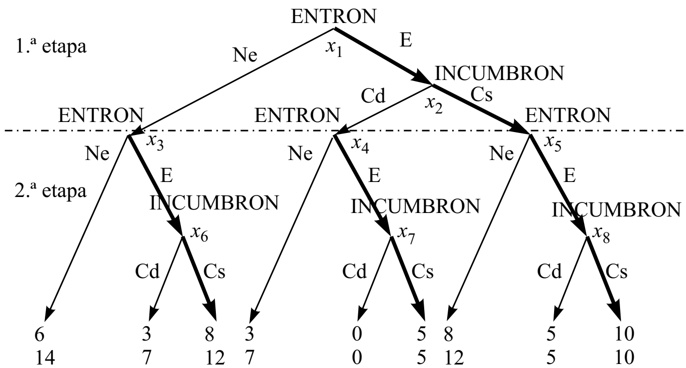


Figura 7.3 Juego de disuasión 1 repetido dos veces, con $\delta = 1$.

Al interpretar este juego repetido, es más realista considerar que se trata de dos mercados distintos, aunque idénticos en pagos (en lugar de un único mercado), de una única empresa ya instalada, que es INCUMBRON, y de una potencial entrante ENTRON (o varias idénticas) que toma secuencialmente decisiones de entrada en los distintos mercados.

7.2. JUEGOS REPETIDOS EN UN NÚMERO FINITO DE ETAPAS

En esta sección nos vamos a interesar por aquellos juegos consistentes en la repetición de un juego básico o juego de etapa a lo largo del tiempo, pero un número de veces especificado de antemano. Nuestro objetivo es analizar cómo la repetición de un juego afecta a los resultados que se pueden alcanzar, ya sea coordinando las acciones de los individuos o permitiendo que éstos alcancen algún nivel de cooperación, aun cuando se trate de juegos como el dilema del prisionero, en los que las estrategias de cooperación resultan ser estrictamente dominadas en una realización única del juego.

Observación 7.2

Como supuesto de partida consideraremos que los jugadores mantienen las mismas funciones de utilidad en cada momento del tiempo. Si bien se trata de un supuesto que hemos mantenido siempre, se hace preciso hacerlo explícito ahora, pues podría darse el caso de que los individuos sufrieran un cambio en sus gustos y preferencias a medida que va pasando el tiempo.

Mientras no se diga lo contrario, supondremos que el juego de etapa G es un juego en forma estratégica, ya que ello simplifica las próximas definiciones. Para evitar confusiones de notación entre los elementos que definen un juego de etapa y los que corresponden al juego repetido, adoptaremos la siguiente convención:

- Juego de etapa G. A las estrategias puras (a las que llamaremos acciones), a las estretegias mixtas y a las funciones de pagos o ganancias del jugador i las denotaremos a_i, α_i y g_i, respectivamente.
- Juego repetido o global. A las estrategias puras, a las estretegias mixtas y a las funciones de pagos o ganancias del jugador i las denotaremos s_i, σ_i y u_i, respectivamente. Así pues, hemos reservado la notación habitual para el juego repetido.

Definición 7.4

Dado un juego cualquiera $G = \{A_1, ..., A_n; g_1, ..., g_n\}$, al que llamamos **juego de etapa** o **juego constituyente**, y un vector de factores de descuento $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$, llamamos **juego repetido finitamente** $G^T(\boldsymbol{\delta})$ al juego que cumple:

a) Antes de que empiece el juego es de dominio público:

a$_1$) Que el factor de descuento de cada jugador i es δ_i.
a$_2$) Que G se va a jugar T veces.
a$_3$) Que los pagos de $G^T(\boldsymbol{\delta})$ son, para cada jugador i, el valor presente (para el factor de descuento δ_i) de la secuencia finita de sus pagos de etapa.

b) Antes de que empiece cualquier etapa, son de dominio público las jugadas realizadas en todas las etapas anteriores.

Observación 7.3

1. En lo que sigue se supondrá, para simplificar, el mismo factor de descuento δ para todos los jugadores, y se denominará $G^T(\delta)$ al juego repetido. Este supuesto no tiene ninguna repercusión en los resultados que obtengamos.

2. Obsérvese que aquí no se considera el factor de incertidumbre (probabilidad de que no se haga efectivo un pago) que puede intervenir en otras ocasiones en la determinación del factor de descuento. Es decir, δ viene determinado únicamente por la preferencia de liquidez.

3. El juego $G^1(\delta)$ es precisamente el juego de etapa G. Denotaremos $G^t(\delta)$ a las t primeras repeticiones del juego repetido $G^T(\delta)$ y G^T al juego repetido cuando $\delta = 1$.

4. Si el juego de etapa $G = \{A_1, ..., A_n; g_1, ..., g_n\}$ del juego repetido $G^T(\delta)$ es estático, las estrategias puras de los jugadores en G (que se han denotado a_i) se reducen efectivamente a sus acciones (que juegan de manera simultánea) y todos los subjuegos de $G^T(\delta)$ comienzan en un nodo de decisión que va a iniciar la etapa k-ésima, siendo $1 \leqslant k \leqslant T$. Sin embargo, si G no es estático, las estrategias puras de los jugadores en G ya son planes completos de acción, y además $G^T(\delta)$ puede tener otros subjuegos aparte de los anteriormente descritos. Por ejemplo, en el juego de disuasión 1 repetido dos veces, representado en la Figura 7.3, INCUMBRON inicia un subjuego en el nodo de decisión x_2, a pesar de que no es inicio de etapa.

Historias, estrategias y subjuegos

Para poder definir con rigor los conceptos de estrategia y de subjuego en un juego repetido, es útil precisar en primer lugar el concepto de historia del juego en un periodo o etapa concreto.

Definición 7.5

Dado el juego de etapa $G = \{A_1, ..., A_n; g_1, ..., g_n\}$ en forma estratégica y el juego repetido $G^T(\delta)$, las ***t*-historias** o **historias del juego hasta el momento *t***, denotadas $\boldsymbol{h_t}$, recogen toda la experiencia pasada del juego hasta llegar a ese momento, es decir, todas las decisiones tomadas por los n jugadores en las $t-1$ etapas anteriores. El conjunto de todas las t-historias h_t es

$$H_t = \{\{a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k)\}_{k=1,2,...,t-1} / a_i^k \in A_i\}$$

donde a_i^k ha de interpretarse como la acción realizada por el jugador i en la etapa k.

Así pues, si llamamos $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ al conjunto de los perfiles en estrategias puras del juego de etapa G, cada t-historia es un elemento de A^{t-1}. Convengamos en que existe una única 1-historia, que identificamos con el nodo inicial, y llamemos H al conjunto de todas las historias del juego repetido $G^T(\delta)$, es decir,

$$H = \bigcup_{t=2}^{T} H_t$$

Obsérvese que los resultados del juego repetido, en el sentido de desarrollos efectivos o trayectorias completas, son las $T+1$-historias $\{(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k)\}_{k=1,2,...,T}$. Es decir, los resultados del juego repetido especifican un perfil de acciones realizadas por cada etapa del juego.

Ejemplo 7.5

Si el juego de etapa G es el dilema del prisionero, como en el Ejemplo 7.3, su conjunto de perfiles estratégicos tiene $4(= 2 \times 2)$ elementos. Por tanto, en el juego $G^T(\delta)$:

• Hay $4(= 4^1)$ historias hasta el momento 2, tantas como perfiles en estrategias puras (es decir, modos de jugar posibles con estrategias puras). Enumerémoslas: $H_2 = \{(Confesar, Confesar), (Confesar, Callar), (Callar, Confesar), (Callar, Callar)\}$.
• Hay 4^5 6-historias. Una de ellas es $h_6 = ((Confesar, Callar), (Callar, Confesar), (Confesar, Callar), (Callar, Confesar), (Confesar, Callar))$.

Apliquemos al contexto de juegos repetidos las definiciones generales de estrategia y de subjuego:

Dado el juego de etapa $G = \{A_1, ..., A_n; g_1, ..., g_n\}$ en forma estratégica y el juego repetido $G^T(\delta)$:

• Una **estrategia** σ_i del jugador i en $G^T(\delta)$ es un plan que determina qué acción (o lotería de acciones) realizará dicho jugador en cada etapa para cada posible historia hasta ese momento. Dicho de otro modo, es un conjunto de T aplicaciones $a_i^k(.)$, una por cada etapa k, de modo que $a_i^k(.)$ asigna a cada k-historia (donde $1 \leqslant k \leqslant T$) una acción (o lotería de acciones) de A_i. Puede describirse simbólicamente así:

$$\sigma_i = (a_i^1(h_1), a_i^2(h_2), ..., a_i^T(h_T))$$

Si la aplicación es constante en cada etapa decimos que la estrategia es incondicionada o independiente de la historia. Por ejemplo, las estrategias «*Buscar liebre* en ambas etapas» y «*Buscar liebre* en la primera etapa y *Cooperar* en la segunda», son ambas incondicionadas en $G^2(\delta)$, siendo G el juego de la caza del ciervo, mientras que la estrategias «*Buscar liebre* en la primera etapa y copiar en la segunda etapa la jugada que el otro jugador hizo en la primera» no lo es.

Obsérvese que en los juegos repetidos hay una equivalencia completa entre las estrategias mixtas propiamente dichas (loterías de estategias puras del juego repetido) y las estrategias de comportamiento (loterías de acciones de G en cada etapa).

• Un perfil de estrategias puras o mixtas $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ del juego repetido $G^T(\delta)$ determina (junto con las correspondientes realizaciones del azar, en el caso de estrategias mixtas, y a través de un proceso iterativo) la secuencia de combinaciones de acciones

$$\{(a_1^k(h_k(\sigma)), a_2^k(h_k(\sigma)), ..., a_n^k(h_k(\sigma)))\}_{k=1,2,...,T}$$

una en cada etapa k, que se pondrán en práctica de manera efectiva. Se ha denominado $h_k(\sigma)$ a la k-historia así determinada por σ. A esta secuencia de combinaciones se la llama trayectoria del juego determinada por σ. Por su parte, estas combinaciones determinan los pagos de etapa y éstos determinan, de acuerdo con el factor de descuento, los pagos globales para cada jugador del juego repetido.

• Los **subjuegos** de $G^T(\delta)$ comienzan al iniciarse cada etapa y tienen la forma $G^{T-t}(\delta)$, donde $0 \leqslant t < T$. Existen tantos subjuegos que comiencen con la etapa t como t-historias sean posibles.

Ejemplo 7.6

Sea el juego de etapa G el juego de la caza del ciervo. Estudiemos con detenimiento en el juego repetido 2 veces $G^2(\delta)$ el perfil estratégico $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ donde σ_1 es la estrategia «*Cooperar* en la primera etapa y en cada etapa posterior k copiar lo que haya hecho el jugador 2 en la etapa $k-1$», y σ_2 es la estrategia «*Buscar liebre* en la primera etapa y en cada etapa posterior k copiar lo que haya hecho el jugador 1 en la etapa $k-1$».

La combinación de acciones que dicho perfil determina en la etapa 1 es $(a_1^1(h_1(\sigma)), a_2^1(h_1(\sigma))) = (Cooperar\ , Buscar\ liebre)$. Esta combinación es la 2-historia del juego determinada por el perfil σ, y por tanto la llamaremos $h_2(\sigma)$. Conocida ya la 2-historia efectiva, puede proseguir el cálculo. La combinación de acciones que σ determina en la etapa 2 es $(a_1^2(h_2(\sigma)), a_2^2(h_2(\sigma))) = (Buscar\ liebre, Cooperar)$.

Así pues, la sucesión completa de combinaciones de acciones que constituye el resultado del juego si se juega el perfil estratégico σ es ((*Cooperar*, *Buscar liebre*), (*Buscar liebre*, *Cooperar*)), que determina el vector de pagos (0, 2) en la primera etapa y el vector de pagos (2, 0) en la segunda. En conclusión, el resultado del juego en términos de pagos es el vector de pagos globales $(2\delta, 2)$.

¿Es un EN el perfil estratégico σ? Se comprueba inmediatamente que no lo es para ningún valor de δ. En efecto, si $\delta > 0$, la estrategia σ_2 no es respuesta óptima del jugador 2 a σ_1, debido a que la estrategia incondicionada «*Buscar liebre* en cualquier etapa» habría implicado los resultados de etapa (*Cooperar* , *Buscar liebre*) y (*Buscar liebre*, *Buscar liebre*), que le habrían permitido obtener un pago global $2 + \delta > 2$. Por otra parte, si $\delta = 0$, la estrategia σ_1 no es respuesta óptima del jugador 1 a σ_2, debido a que la estrategia incondicionada «*Buscar liebre* en cualquier etapa» habría implicado los resultados de etapa (*Buscar liebre*, *Buscar liebre*) y (*Buscar liebre*, *Buscar liebre*), que le habrían permitido obtener un pago global $1 + \delta > 2\delta$.

Nos proponemos ahora estudiar las siguientes cuestiones referentes a los equilibrios de un juego repetido $G^T(\delta)$:

- ¿Requieren los ENPS del juego repetido que se juegue en cada etapa algún EN del juego de etapa G?
- ¿Depende la contestación a la pregunta anterior del valor de T o del valor de δ? ¿Depende del número de EN de G? ¿Depende de que el juego se repita finita o infinitamente?
- En aquellos juegos de etapa que, como el dilema del prisionero, tienen EN únicos Pareto-dominados por perfiles que podríamos llamar de «cooperación» que no son EN, ¿puede estar la cooperación soportada por equilibrios del juego repetido?, es decir, ¿existe algún ENPS del juego repetido que implique jugar en cada etapa el perfil de cooperación?

Merece la pena avanzar intuitivamente algunas de las respuestas. En los juegos repetidos finitamente, sean cuales sean los valores de T y de δ, sólo es posible realizar jugadas de etapa que forma parte de un equilibrio del juego repetido y que no sean de equilibrio de G si existen varios EN en G. Por tanto, la cooperación es inalcanzable en equilibrio para el dilema del prisionero repetido finitamente. Sin embargo, para juegos repetidos infinitamente (y en particular para el dilema del prisionero) sí es posible encontrar equilibrios que soporten la cooperación, siempre que δ tenga un valor suficientemente cercano a 1.

Cálculo de los ENPS de un juego finitamente repetido

Teorema 7.1

Sea G un juego en forma estratégica.

a) Si G tiene un único equilibrio de Nash, entonces para cualquier T finito y cualquier factor de descuento δ, el juego repetido $G^T(\delta)$ tiene un **único** ENPS, que consiste en que cada jugador juegue de manera incondicionada en cada etapa su única estrategia de equilibrio.

b) Si todos los equilibrios de Nash de G resultan en los mismos pagos, entonces para cualquier T finito y cualquier factor de descuento δ, cualquier ENPS del juego repetido $G^T(\delta)$ prescribe que en cada etapa se juegue un EN del juego de etapa G.

Demostración:

Basta con demostrar (b), pues (a) es un caso particular. Sea $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ un ENPS. Razonemos por inducción hacia atrás generalizada. En cualquier subjuego correspondiente a la última etapa, es decir, tras cualquier T-historia, σ ha de prescribir un EN del juego de etapa. Así pues, el pago de etapa que a cada jugador le va a corresponder en la última etapa es independiente (su pago en ese EN jugado en la última etapa) de la T-historia que ha conducido hasta esa etapa, y por tanto, la optimalidad de respuestas en el juego global será equivalente a la optimalidad en el juego que acaba en la penúltima etapa. Razonando de igual modo, puede concluirse que en la etapa penúltima ha de jugarse también un EN de etapa. Razonando repetidamente de modo análogo (inductivamente) se concluye que en la primera etapa ha de jugarse también un EN de etapa. En conclusión, σ ha de prescribir en cualquier etapa que se juegue un equilibrio de Nash de etapa.

Ejemplo 7.7

Sea el dilema del prisionero repetido 2 veces, con factor de descuento igual a 1. Según la inducción hacia atrás generalizada, en la segunda etapa se va a jugar el equilibrio de Nash único (*Confesar*, *Confesar*). En consecuencia, en la primera etapa los jugadores afrontan el juego siguiente:

		Preso 2	
		Callar	Confesar
Preso 1	Callar	5, 5	1, 6
	Confesar	6, 1	2, 2

Este juego es equivalente en pagos al dilema del prisionero (sólo se diferencian en el cambio de escala, por traslación, de las funciones de pagos, pues los pagos de este juego resultan de sumar una unidad a los del dilema del prisionero). Por tanto, su único EN es (*Confesar*, *Confesar*). En consecuencia, el único resultado perfecto en subjuegos es ((*Confesar*, *Confesar*), (*Confesar*, *Confesar*)). El único ENPS es aquel en que cada jugador usa la estrategia incondicional «*Confesar* en la primera etapa, y *Confesar* en la segunda, independientemente del resultado de la primera».

Expresemos lo anterior de otro modo (quizá más intuitivo): sabemos que este juego posee 4 subjuegos propios correspondiendo a cada resultado posible de la primera etapa y todos ellos consistentes en resolver el juego de etapa. Dado cualquier resultado de la primera etapa, en la segunda etapa no existe ninguna promesa ni amenaza que se pueda hacer y sostener dado que se termina el juego, con lo que cada jugador actuará de modo óptimo dadas las acciones del otro jugador, es decir, se jugará el EN del juego de etapa: (*Confesar*, *Confesar*). En la primera etapa, los jugadores pueden deducir que para cualquier resultado que en ésta se dé, en la segunda etapa jugarán el EN del juego de etapa. Sabiendo esto, no existe ninguna amenaza ni promesa creíble que se pueda hacer al comienzo del juego, pues los jugadores saben que las promesas o amenazas que pudieran hacerse no se van a cumplir en el futuro, ya que en la segunda etapa siempre se jugará (*Confesar*, *Confesar*). Por tanto, en la primera etapa, los jugadores jugarán del mismo modo que en la segunda, es decir, el EN del juego de etapa: (*Confesar*, *Confesar*). Así pues, el resultado perfecto en subjuegos (que es único) es aquel en el que cada jugador juega en cada etapa la estrategia que le corresponde en el EN del juego de etapa.

Por otra parte, el ENPS (que también es único) es aquel en que cada jugador ejecuta la estrategia o plan completo siguiente: «Jugar *Confesar* siempre».

Observación 7.4

a) Recuérdese que no es lo mismo resultado perfecto en subjuegos que equilibrio (de Nash) perfecto en subjuegos. El ENPS es un perfil estratégico mientras que el RPS es un desarrollo concreto del juego. Mientras que un perfil estratégico determina el desarrollo o trayectoria del juego desde el nodo inicial al nodo terminal, no se reduce a dicha trayectoria, pues también especifica que haría cada jugador si se encontrara en un nodo de decisión no incluido en dicha trayectoria. Puede ocurrir que dos perfiles distintos determinen la misma trayectoria. Veamos lo que ocurre, en el Ejemplo 7.7, con los dos perfiles siguientes:

$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ donde $\sigma_1 = \sigma_2 =$ «*Confesar* siempre»

$\sigma' = (\sigma'_1, \sigma'_2)$ donde $\sigma'_1 = \sigma'_2 =$ «*Confesar* en la primera etapa, y en la segunda etapa *Confesar* si el otro confesó en la primera y *Callar* si el otro calló en la primera»

Pues bien, ambos perfiles determinan el mismo resultado o trayectoria, el arriba descrito, como único RPS. Y sin embargo, el perfil σ es ENPS, mientras que el perfil σ' no lo es.

b) Recuérdese también que no es lo mismo un subjuego que un juego de etapa. Los juegos de etapa sólo tienen en cuenta lo que sucede en la etapa (indican aquella parte del juego que se repite), los subjuegos tienen en cuenta para cada etapa no sólo el juego de etapa sino también todo el desarrollo posterior del juego a partir de esa etapa (y si el juego de etapa es dinámico y tiene información perfecta, hay subjuegos que no comienzan al inicio de una etapa).

Cálculo de los ENPS en el caso general en que cada juego de etapa puede tener más de un EN

En el siguiente teorema se establecen algunas condiciones sencillas (necesarias en el primer apartado y suficientes en el segundo) para que un perfil estratégico sea ENPS en un juego repetido finitamente.

Teorema 7.2

Sea G un juego en forma estratégica, y sea el juego repetido $G^T(\delta)$ donde T es finito.

a) Cualquier ENPS del juego repetido tiene que dar lugar en la última etapa a un EN de G.

b) Cualquiera de los resultados $(\alpha^*(1), \alpha^*(2), ..., \alpha^*(T))$, donde cada $\alpha^*(k)$ es un perfil estratégico que es un EN de G, es un resultado perfecto en subjuegos de $G^T(\delta)$. Además, el perfil de estrategias $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ consistente en que cada jugador juegue de manera incondicionada en la etapa k-ésima la estrategia que le corresponde en $\alpha^*(k)$ es un ENPS.

Demostración:

a) Supongamos que el perfil estratégico $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ es un ENPS de $G^T(\delta)$. El perfil σ genera un EN en cualquiera de los subjuegos que comienzan en la última etapa, pero ese subjuego no es otro que el juego de etapa G, y por tanto σ ha de dar lugar en esa etapa a un EN de G.

b) Sea $(\alpha^*(1), \alpha^*(2), ..., \alpha^*(T))$ una secuencia de equilibrios de Nash (iguales o distintos) de G. Sea $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ el perfil de estrategias consistente en que cada jugador juegue de manera incondicionada en la etapa k-ésima la estrategia que le corresponde en el perfil k-ésimo, $\alpha^*(k)$, de la secuencia anterior.

Es fácil comprobar que, si los demás jugadores se conforman a ese perfil σ, es respuesta óptima de cualquier jugador i responder con la estrategia que le corresponde en dicho perfil, pues en cada etapa jugará una respuesta óptima a las jugadas que los demás realizan en esa etapa, obteniendo así un flujo de pagos cuyos pagos de etapa son máximos. Por tanto, σ es un EN de de $G^T(\delta)$.

Por otra parte, y dado un subjuego cualquiera de $G^T(\delta)$ comenzando en la etapa k, correspondiente a cualquier historia previa (incluso si se han producido desviaciones del equilibrio σ), puesto que a partir de ese momento los demás jugadores van a jugar de manera incondicionada en las etapas posteriores a k la estrategia que les corresponde en la secuencia de perfiles anterior, la respuesta óptima de i en esas etapas seguirá siendo la estrategia que a i le corresponde en dichos perfiles, tal como prescribe el equilibrio σ. Por tanto, σ es un EN de dicho subjuego, y en consecuencia un ENPS de $G^T(\delta)$.

Obsérvese que este teorema no impide que existan ENPS adicionales a los mencionados en (b). Por una parte, podrían construirse ENPS del tipo siguiente: «Fijados dos EN de etapa distintos llamados $\alpha^*(1)$ y $\alpha^*(2)$, jugar $\alpha^*(1)$ en la primera etapa, y en las siguientes jugar siempre $\alpha^*(1)$, salvo que estemos en una historia en que no se ha jugado siempre $\alpha^*(1)$, en cuyo caso se jugará $\alpha^*(2)$». Por otra parte, tal como se hace en el Ejemplo 7.9, pueden construirse también ENPS en los se juega en alguna etapa (distinta de la última) un perfil que no es EN de G.

Intuitivamente hablando, la exigencia de que todo ENPS determine un EN en la última etapa es una exigencia lógica derivada de la racionalidad de los jugadores. Todos los jugadores saben cuál es la última etapa. Este conocimiento hace que dejen de tener sentido todas las amenazas o promesas que se puedan hacer en dicha etapa, pues no hay turno para las represalias y castigos en caso de incumplimiento. No existiendo posibilidad de penalizaciones futuras, en la última etapa cada jugador se comportará tal y como se comportaría si el juego tuviese una única etapa, es decir, jugando una estrategia que determine para el conjunto de los jugadores un EN en dicha etapa.

Ejemplo 7.8

En el juego repetido G^T, donde G es la batalla de los sexos, cualquiera de los 2^T resultados $[(a_{1,1}, a_{2,1}), (a_{1,2}, a_{2,2}), ..., (a_{1,T}, a_{2,T})]$, donde $(a_{1,k}, a_{2,k})$ es (Cine, Cine) o (Fútbol, Fútbol), es perfecto en subjuegos, y cualquiera de los perfiles estratégicos que en cada etapa k-ésima $\forall\, k = 1, ..., T$, da lugar a alguno de dichos perfiles de acciones es un ENPS.

Ejemplo 7.9

Dado el juego G:

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	4, 4	1, 1
	B	3, 2	1, 2

en el juego repetido G^2, además de las combinaciones de estrategias que generan un EN en cada etapa, descritas en el apartado (b) del teorema anterior, un posible ENPS del juego es el siguiente:

Estrategia del Jugador 1 (σ_1): «jugar B en la primera etapa y jugar A en la segunda si el resultado de la primera etapa ha sido (B, I), jugando B en otro caso».

Estrategia del Jugador 2 (σ_2): «jugar I en la primera etapa y jugar I en la segunda si el resultado de la primera etapa ha sido (B, I), jugando D en otro caso».

Comprobemos que el perfil de estrategias $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ es un ENPS:

1. Como se puede ver, genera un EN en cada subjuego: si se juega (B, I) en la primera etapa se llega a un subjuego en el que se juega (A, I) en la segunda, que es uno de los EN del juego de etapa y por tanto del subjuego (pues en este caso, donde $T = 2$ los subjuegos coinciden con los juegos que comienzan en la segunda etapa). Y si por el contrario se juega otro perfil de acciones en la primera etapa, se llega a (B, D) que también es un EN de todos los subjuegos restantes (los 3 restantes).

2. Las estrategias propuestas son un EN del juego completo: dada la estrategia σ_1 de J1, J2 maximiza su pago jugando σ_2, ya que obtiene $2 + 4 = 6$, mientras que desviándose obtendría como máximo $1 + 2 = 3$ jugando D en la primera etapa y D en la segunda: $6 > 3$. Esto significa que σ_2 es la mejor respuesta a σ_1.

Del mismo modo, para J1 encontramos que σ_1 es su mejor respuesta a σ_2 de J2, ya que con σ_1 obtiene $3 + 4 = 7$ mientras que desviándose puede obtener como máximo $1 + 4 = 5$ jugando A en la primera etapa y B en la segunda: $7 > 5$.

En este juego el par de acciones (B, I) de la primera etapa se sostiene en dicho periodo por la **promesa** de coordinarse en (A, I) en el periodo siguiente y por la **amenaza creíble** de coordinarse en (B, D) si alguno de los jugadores se desvía.

Resumiendo, hemos encontrado que además de los perfiles de estrategias en los que siempre se juega un EN en cada etapa, el perfil (σ_1, σ_2) también constituye un ENPS, a pesar de no generar un EN en la primera etapa.

Observación 7.5

Como podemos observar el teorema anterior es bastante vago pues ni nos dice cuántos ENPS hay en un juego repetido de este tipo, ni tampoco nos da indicaciones sobre el modo de obtener todos los ENPS de un modo sistemático y simple. Este teorema pone de manifiesto un problema importante de los juegos repetidos: la complejidad de cálculo. Dicha complejidad se revela en el simple cálculo del número de estrategias puras de cada jugador. Por ejemplo, en juegos estáticos 2×2 repetidos 2 veces (como el dilema del prisionero o la batalla de los sexos) existen 4 subjuegos que comienzan en la segunda etapa con 2 acciones para cada jugador y una primera etapa en la que ambos jugadores tienen que tomar una acción. Por tanto, existen $2 \times 2^4 = 32$ estrategias puras para cada jugador, donde dichas estrategias pueden ser representadas por vectores con $1 + 4 = 5$ componentes. Si en lugar de 2 veces se repiten 3 veces tenemos $2 \times 2^4 \times (2^4)^4 = 2 \times 2^4 \times 2^{16} = 2.097.152$ estrategias para cada jugador, donde dichas estrategias pueden ser representadas por vectores con $1 + 4 + 16 = 21$ componentes.

7.3. JUEGOS REPETIDOS EN UN NÚMERO INFINITO DE ETAPAS

Hemos visto que en algunos juegos estáticos, como el dilema del prisionero o el duopolio de Cournot, la cooperación de todos es un resultado deseable desde el punto de vista del conjunto de los jugadores (es un óptimo de Pareto), pero no es previsible en general que se produzca, ya que el único EN (y además en estrategias estrictamente dominantes) es el comportamiento egoísta de todos. ¿Seguiría sucediendo lo mismo si el juego se repitiera?, o por el contrario ¿es posible que la contradicción entre el bienestar individual y el social desaparezca cuando el juego se repite? Dicho en términos más técnicos, ¿puede tener un juego repetido un resultado en equilibrio en el que todos cooperan en cada etapa, a pesar de que en el juego de etapa el interés individual (expresado en su EN) inclina a los jugadores a no cooperar?

Por lo visto en la sección anterior, la respuesta es *no* si se repite un número finito de veces un juego con un único EN de etapa donde no coopera nadie (aunque la cosa cambia, al menos en las etapas distintas de la última, si el juego de etapa tiene más de un EN).

Sin embargo, si el juego se repite infinitamente (o al menos los jugadores no saben si se va a acabar en la siguiente ronda), pueden existir muchos ENPS en los que todos los jugadores cooperan siempre. Esta afirmación tiene una importancia teórica tremenda, ya que nos dice que la repetición indefinida de un juego es capaz de reconciliar el interés puramente individual de cada jugador con el interés del grupo de jugadores en su conjunto.

Precisemos los conceptos necesarios para llegar a los resultados que acabamos de mencionar.

Definición 7.6

Sea un juego de etapa cualquiera $G = \{A_1, ..., A_n; g_1, ..., g_n\}$, donde los pagos están acotados (existe un valor $a \in R$, tal que $|g_i(a_1, ..., a_n)| < a \ \forall i, \forall (a_1, ..., a_n)$). Sea $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$ un vector de factores de descuento, donde $\delta_i < 1, \forall\ i$. Llamamos **juego repetido infinitamente** $G^{\infty}(\boldsymbol{\delta})$ al juego que cumple:

a) Antes de que empiece el juego es de dominio público:

a_1) Que el factor de descuento de cada jugador i es δ_i.
a_2) Que tras cualquier etapa k el juego puede proseguir en la etapa siguiente.
a_3) Que los pagos de $G^{\infty}(\boldsymbol{\delta})$ son, para cada jugador i, el valor presente (para el factor de descuento δ_i) de la sucesión infinita de sus pagos de etapa.

b) Antes de que empiece cualquier etapa, son de dominio público las jugadas realizadas en todas las etapas anteriores.

En lo que sigue se supondrá, como en el caso finito, que el mismo factor de descuento δ vale para todos los jugadores, denominándose $G^{\infty}(\delta)$ al juego repetido, y (mientras no se diga lo contrario) que el juego de etapa G es un juego en forma estratégica.

Historias, estrategias y subjuegos de un juego repetido infinitamente

Adaptemos al caso infinito los conceptos de historia, estrategia y subjuego ya estudiados en los juegos repetidos finitos. Dado el juego de etapa $G = \{A_1, ..., A_n; g_1, ..., g_n\}$ en forma estratégica,

- Las t-historias h_t del juego repetido $G^{\infty}(\delta)$ se definen de manera idéntica al caso finito. Por tanto, recogen el resultado o desarrollo efectivo del juego hasta ese momento, es decir, todas las decisiones tomadas por los n jugadores en las $t - 1$ etapas anteriores. Pueden describirse como $\{(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k)\}_{k=1,2,...,t-1}$, donde a_i^k, perteneciente a A_i, ha de interpretarse como la acción realizada por el jugador i en la etapa k.
- Las estrategias σ_i del jugador i en $G^{\infty}(\delta)$ son planes de acción que determinan qué acción realizará dicho jugador en cada etapa para cada posible historia hasta ese momento, y pueden describirse simbólicamente así: $\sigma_i = (a_i^1(h_1), a_i^2(h_2), ..., a_i^k(h_k), ...)$.
- Un perfil de estrategias puras o mixtas $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ del juego repetido $G^{\infty}(\delta)$ determina (a través de un proceso iterativo) la sucesión de combinaciones de acciones $\{(a_1^k(h_k(\sigma)), a_2^k(h_2(\sigma)), ..., a_n^k(h_k(\sigma)))\}_{k=1,2,...}$, una en cada etapa k, que se pondrán en práctica de manera efectiva y que constituye la trayectoria del juego

determinada por σ. Y los correspondientes pagos de etapa determinan, de acuerdo con el factor de descuento, los pagos globales para cada jugador del juego repetido infinitamente.
- Los subjuegos de $G^{\infty}(\delta)$ comienzan al iniciarse cada etapa (existen tantos que comiencen con la etapa t como t-historias sean posibles) y son idénticos en su estructura al juego global.

ENPS en el dilema del prisionero repetido infinitamente

El juego infinitamente repetido que es más conocido y estudiado es justamente el que tiene al Dilema del Prisionero (DP) como juego de etapa. Le llamaremos $DP^{\infty}(\delta)$, y veremos que su análisis da lugar a resultados muy diferentes de los que conocemos para el caso de repetición finita.

Algunos perfiles que no son EN del dilema del prisionero repetido infinitamente, son los siguientes:

- *Perfil de estrategias incondicionadas de cooperación ingenuas*. El perfil de cooperación (*Callar* siempre, *Callar* siempre) determinaría una trayectoria de cooperación completa del juego, consistente en (*Callar*, *Callar*) en cada etapa. Pero dicho perfil no es un EN, independientemente del valor de δ. En efecto, la mejor respuesta a «*Callar* siempre» de J1, por parte de J2, no es «*Callar* siempre», que le reporta un pago medio de 4, sino «*Confesar* siempre», que le reportaría un pago medio de 5.
- *Perfil de estrategias condicionadas, pero erróneas*. El perfil $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ en el que $\sigma_1 = \sigma_2 =$ «jugar en la etapa $t > 1$ la acción que el contrario jugó en la etapa $t - 1$, y en la primera etapa *Confesar*», no es un EN, siempre que el valor de δ sea suficientemente alto. En efecto, la mejor respuesta a σ_1 de J1 no es σ_2 pues le reporta un flujo de pagos (1, 1, ..., 1, ...), con valor presente $1/(1 - \delta)$, a J2, mientras que $\sigma'_2 =$ «*Callar* siempre» le reportaría un flujo de pagos (0, 4, 4, ..., 4, ...), con valor presente $4\delta/(1 - \delta)$, que es estrictamente mayor que $1/(1 - \delta)$ siempre que $\sigma > 1/4$.

Analicemos ahora un perfil que, para valores suficientemente altos de δ, es EN, pero no ENPS:

Perfil de estrategias ***Ojo por Ojo***

Considérese la estrategia $OpO =$ «jugar en la etapa $t > 1$ la acción que el contrario jugó en la etapa $t - 1$, y en la primera etapa *Callar*». Se trata de una conocida estrategia llamada Ojo por Ojo (*tit for tat*). El perfil $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ en el que $\sigma_1 = \sigma_2 = OpO$, determinaría una trayectoria de cooperación completa del juego, consistente en (*Callar*, *Callar*) en cada etapa, pues ambos jugadores comienzan callando, lo que implica que sigan callando en cada etapa posterior. Por otra parte, el perfil σ sí es un EN, siempre que el valor de δ sea suficientemente alto, pero no es un ENPS. Demostrémoslo:

- σ es un EN. En efecto, $\sigma_1 = OpO$ es respuesta óptima por parte de J1 a $\sigma_2 = OpO$ de J2 (y viceversa), ya que seguir σ_1 asegura un pago de 4 en cada etapa, debido a un resultado (*Callar*, *Callar*) en cada etapa, mientras que cualquier desviación de σ_1 le perjudicará. Veamos: si se desvía de la acción *Callar* en alguna etapa consigue en ella un pago de 5, pero a costa de ser castigado y no ser perdonado hasta que elija de nuevo la acción *Callar*. Supongamos que la tanda de desviación dura 2 etapas (que podríamos denominar de traición y de arrepentimiento y perdón). J1 conseguiría los pagos:

5,	0
Traición	Arrepentimiento

El valor presente de este intervalo es:

Con desviación (σ'_1) $\quad v' = 5 + \delta \cdot 0 = 5$

Sin desviación (σ_1) $\quad v = 4 + \delta \cdot 4$

Así pues, es mejor σ_1 siempre que $4 + \delta \cdot 4 \geqslant 5$, lo que ocurre si $\delta \geqslant 1/4$.

Supongamos ahora que la tanda de desviación dura $n + 2$ etapas (una de traición, n de castigo, y una de arrepentimiento y perdón). J1 conseguiría los pagos:

5,	1,	1, ...	1,	0
Traic.	Cast.	Cast.	Cast.	Arrep.

El valor presente de este intervalo es:

Con desviación (σ'_1) $\quad v' = 5 + \delta \cdot 1 + \cdots + \delta^n \cdot 1 + 0 = 5 + \delta(\delta^n - 1)/(\delta - 1)$

Sin desviación (σ_1) $\quad v = 4 + \delta \cdot 4 + \cdots + \delta^n \cdot 4 + \delta^{n+1} \cdot 4 = 4(\delta^{n+2} - 1)/(\delta - 1)$

Así pues, es mejor σ_1 siempre que $4(\delta^{n+2} - 1)/(\delta - 1) \geqslant 5 + \delta(\delta^n - 1)/(\delta - 1)$;

$$4\delta^{n+2} - 4 \leqslant 4\delta - 5 + \delta^{n+1};$$

$$4\delta(\delta^{n+1} - 1) \leqslant \delta^{n+1} - 1;\ \delta \geqslant 1/4$$

Supongamos, por último, que la tanda de desviación es para siempre (una de traición, en adelante castigo). J1 conseguiría los pagos:

5,	1,	1, ...	1, ...
Traic.	Cast.	Cast.	Cast.

El valor presente de esta sucesión infinita de pagos es:

Con desviación (σ'_1) $\quad v' = 5 + \delta \cdot 1 + \cdots + \delta^n \cdot 1 + \cdots = 5 + \delta/(1 - \delta)$

Sin desviación (σ_1) $\quad v = 4 + \delta \cdot 4 + \cdots + \delta^n \cdot 4 + \cdots = 4/(1 - \delta)$

Así pues, es mejor σ_1 siempre que $4/(1 - \delta) \geqslant 5 + \delta/(1 - \delta)$;

$$4 \geqslant 5(1 - \delta) + \delta;\ 4\delta \geqslant 1;\ \delta \geqslant 1/4$$

En conclusión, el perfil de estrategias **ojo por ojo** (*tit for tat*) es un EN si $\delta \geqslant 1/4$.

- σ no es un ENPS. En efecto, en el subjuego cuyo resultado de etapa anterior es (*Callar*, *Confesar*) a J1 le conviene desviarse de σ_1 si J2 va a seguir σ_2. En efecto, si no se desviara se produciría una cadena infinita (*Confesar*, *Callar*), (*Callar*, *Confesar*), (*Confesar*, *Callar*), (*Callar*, *Confesar*), ..., con pagos

$$5 + 0 \cdot \sigma + 5 \cdot \sigma^2 + 0 \cdot \sigma^3 + 5 \cdot \sigma^4 + \cdots = 5(1 + \delta^2 + \delta^4 + ...) = 5/(1 - \delta^2)$$

Le interesaría más *Callar* en adelante, lo que conduciría a la cadena infinita (*Callar*, *Callar*), (*Callar*, *Callar*), (*Callar*, *Callar*), ..., con pagos $4 + 4\delta + 4\delta^2 + \cdots = 4/(1 - \delta)$, que es mayor o igual siempre que $4 \geqslant 5/(1+\delta)$, cosa que ocurre para todo $\delta \geqslant 1/4$. En definitiva,

Si $\delta \geqslant 1/4$ el perfil «Ojo por Ojo» (*OpO*, *OpO*) es un EN pero no un ENPS.
Si $\delta < 1/4$ el perfil «Ojo por Ojo» (*OpO*, *OpO*) no es un EN.

Merece la pena observar que se ha conseguido, por primera vez, sustentar la cooperación indefinida en el dilema del prisionero mediante un EN (aunque no ENPS), que utiliza, digámoslo así, la amenaza del castigo mediante confesión para sostener la zanahoria de la cooperación.

Veamos ahora algunos ENPS del dilema del prisionero repetido infinitamente.

1. *Perfil de estrategias incrédulas*. El perfil $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ en el que $\sigma_1 = \sigma_2 =$ «*Confesar* siempre», que determinaría obviamente una trayectoria de nula cooperación del juego, consistente en (*Confesar*, *Confesar*) en cada etapa, sí es un ENPS. Demostrémoslo:

- σ es un EN. En efecto, es evidente que σ_1 es respuesta óptima por parte de J1 a σ_2 de J2 (y viceversa).
- Además, la restricción del perfil σ a cualquier subjuego vuelve a ser este mismo perfil, luego es EN en cualquier subjuego. En definitiva, es ENPS.

2. *Perfil de* ***estrategias de disparador***. Considérese la estrategia ED = «*Callar* en la primera etapa, y además *Callar* en la etapa t si la historia del juego hasta ese momento ha sido siempre *Callar* por parte de ambos jugadores, y *Confesar* en caso contrario». Dicho de otro modo: «empezar cooperando, y continuar así hasta que la cooperación se rompa. A partir de ese momento, no cooperar nunca más». Esta conocida estrategia, que incorpora una amenaza de penalización permanente ante cualquier desviación de la conducta cooperadora *Callar*, recibe el nombre de estrategia de disparador (*trigger strategy* o *grim strategy*). El perfil $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ en el que $\sigma_1 = \sigma_2 =$ ED son las estrategias de disparador de cada jugador, determinaría una trayectoria de completa cooperación del juego (ambos jugadores comienzan cooperando, y después siguen cooperando ya que la cooperación no se rompe si se siguen esas estrategias). Pues bien, el perfil $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ es un ENPS si el factor de descuento δ es suficientemente alto. Demostrémoslo:

- σ es un EN. Veamos si la estrategia $\sigma_i =$ ED es respuesta óptima del jugador i a la estrategia $\sigma_j =$ ED del jugador j.

  Respondiendo con $\sigma_i =$ ED, el jugador i obtiene los siguientes pagos correspondientes a los siguientes juegos de etapa:

Etapa	t	$t+1$	$t+2$	$\cdots$
Perfil jugado	(*Callar*, *Callar*)	(*Callar*, *Callar*)	(*Callar*, *Callar*)	$\cdots$
Pagos de i:	4	4	4	$\cdots$

  y actualizando los pagos al momento t, el jugador i obtiene

$$\mathrm{VP}_i(\sigma_i, \sigma_j) = 4 + 4\delta + 4\delta^2 + 4\delta^3 + \cdots = 4/(1-\delta)$$

  Si por el contrario i respondiera con cualquier otra estrategia σ_i', los pagos que obtendría a partir del momento en que se desviase jugando *Confesar* serían:

Etapa	t	$t + 1$	$t + 2$	$\cdots$
Perfil jugado	(*Confesar*, *Callar*)	(*Confesar*, *Confesar*)	(*Confesar*, *Confesar*)	$\cdots$
Pagos de i:	5	1	1	$\cdots$

(Una vez que i ha decidido no cooperar, j dispara la penalización y a partir de ese momento a i siempre le convendrá no cooperar (*Confesar*), porque j siempre va a jugar a partir de ese momento *Confesar*).

Y actualizando los pagos al momento t (momento en que i decide no cooperar), i obtiene

$$\text{VP}_i(\sigma'_i, \sigma_j) = 5 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + ... = 5 + \delta/(1 - \delta) = (5 - 4\delta)/(1 - \delta)$$

¿Para qué valores de δ es la estrategia $\sigma_i = \text{ED}$ del jugador i respuesta óptima a la estrategia $\sigma_j = \text{ED}$ del jugador j? Lo será si $4/(1 - \delta) \geqslant (5 - 4\delta)/(1 - \delta)$, es decir, si $\delta \geqslant 1/4$.

En conclusión: si el factor de descuento es igual o mayor que 1/4, el perfil de estrategias de disparador es un EN.

- σ es un ENPS. Veamos para qué valores de δ el perfil σ determina un EN en cada subjuego. Para poder responder a esta cuestión hace falta considerar todos los posibles subjuegos que presenta el juego repetido infinitamente. Desde el punto de vista de las estrategias de disparador, dichos subjuegos pueden clasificarse en dos tipos:
  - Subjuegos para los que la historia pasada ha sido siempre de cooperación, es decir, aquellos en los que con anterioridad siempre se ha jugado (*Callar*, *Callar*) en cada juego de etapa. Estos subjuegos son equivalentes al juego original, tienen estructura $\text{DP}^{\infty}(\delta)$ y comienzan en las mismas circunstancias que en la primera etapa del juego original sobre el que se aplica el perfil de estrategias de disparador. De modo que en estos subjuegos el perfil σ de estrategias de disparador genera un EN si y sólo si $\delta \geqslant 1/4$, como acabamos de analizar.
  - Subjuegos en los que en algún momento de la historia pasada no se ha cooperado (algún jugador ha decidido jugar *Confesar* en alguna etapa previa). En estos subjuegos se exhibe un comportamiento no cooperativo por parte de ambos jugadores como mejor respuesta en cada etapa, pues la respuesta óptima a la estrategia de disparador (cuando la penalización se está ejecutando) es seguir la estrategia de disparador o la estrategia incondicionada que hemos llamado incrédula, consistente en *Confesar* siempre (ambas estrategias son equivalentes si en alguna etapa previa algún jugador no ha cooperado). Así pues, también en este tipo de subjuegos σ genera un EN para todo δ.

En conclusión:

En el dilema del prisionero repetido infinitamente, el perfil de estrategias de disparador es un ENPS si y sólo si $\delta \geqslant 1/4$.

Teorema de Friedman

Hemos visto que cuando se repite infinitamente un juego como el dilema del prisionero aparecen nuevos EN y nuevos ENPS, incluso algunos que sustentan de modo permanente la cooperación. Cabe pensar que si eso ocurre con un juego de etapa tan especial como el dilema del prisionero, donde el único EN es un equilibrio en estrategias estrictamente dominantes, algo parecido debería ocurrir con juegos en los que la cooperación no es tan difícil como en éste.

Por otra parte, parece estar emergiendo un aspecto negativo de la repetición infinita, la posibilidad de que existan muchos ENPS del juego repetido, hasta el punto de poder hacer problemática la selección de uno de ellos.

Merece la pena, en consecuencia, averiguar qué resultados (en términos de vectores de pagos) son alcanzables por medio de equilibrios de Nash perfectos en subjuegos, pues ello nos indicará qué posibilidades hay de mejora en el sentido de Pareto, y si hay muchas o pocas posibilidades.

El teorema de Friedman, que éste estableció en 1971 y se enuncia a continuación, es uno de los llamados teoremas de tradición popular (*folk theorems*) y nos da una respuesta precisa a la cuestión anterior.

Teorema 7.3

Sea G un juego finito, estático y con información completa, sea el perfil $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_n^*)$ un EN del juego G y sea $g(\alpha^*) = (g_1(\alpha^*), g_2(\alpha^*), ..., g_n(\alpha^*))$ el vector de pagos correspondiente a α^*. Si $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ es un vector de pagos factible de G que cumple $v_i > g_i(\alpha^*)$ para cualquier jugador i, entonces existe un factor de descuento δ_0 tal que para todo $\delta > \delta_0$ existe un ENPS de $G^\infty(\delta)$, que alcanza v como vector de pagos medios (es decir, v_i es el pago medio del jugador i para el resultado del juego cuando se ejecuta dicho perfil de equilibrio).

Demostración:

Sólo consideraremos el caso en que existe un perfil $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ de estrategias (puras o mixtas) del juego de etapa G que produce el vector de pagos $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$. Para el caso de que tal perfil no exista, como ocurre en la batalla de los sexos con el vector de pagos factible (3/2, 3/2), *véase* Fudenberg y Tirole (1991, Sección 5.1).

Considérese ahora el perfil estratégico $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ en $G^\infty(\delta)$, en el que σ_i es la estrategia siguiente del jugador i:

«En la primera etapa jugar α_i. En cualquier etapa posterior jugar α_i si hasta el momento se ha jugado el perfil de etapa $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ en todas las etapas, y jugar α_i^* en caso contrario».

El perfil estratégico σ es un perfil en estrategias de disparador, ya que cada jugador i comienza jugando la estrategia cooperadora α_i, pero amenaza con jugar para siempre la estrategia penalizadora α_i^*.

Veamos que σ es un EN de $G^\infty(\delta)$ si δ es suficientemente grande.

- Supongamos que todos los jugadores excepto i se conforman al perfil σ. Si en alguna etapa ha habido desviación respecto al perfil de etapa α, es claro que jugar σ_i en adelante es respuesta óptima de i a σ_{-i} (pues prescribe responder en adelante con α_i^* en cada etapa a α_{-i}^*).

• Supongamos ahora que estamos en la primera etapa, o en una etapa tal que no ha habido desviación previa respecto al perfil de etapa α, y vamos a comprobar que también σ_i es respuesta óptima a σ_{-i}.

Sea α_i' la desviación óptima que podría adoptar i en una etapa t sin desviaciones previas respecto a α. Dicha desviación le proporcionará a i un beneficio adicional en la etapa de d_i, es decir, un pago de etapa igual a $v_i + d_i$, pero ocasionaría el desencadenamiento de las penalizaciones de los demás, que a partir de esa etapa jugarían sus estrategias de castigo en α^*, obligando a i a defenderse (óptimamente) con su propia estrategia α_i^* en cualquier etapa posterior. Por tanto, el flujo de pagos óptimo que obtendría i en caso de desviarse sería:

Etapa	t	$t+1$	$t+2$	$\cdots$
Perfil jugado:	(α_i', α_{-i})	α^*	α^*	$\cdots$
Pagos de i:	$v_i + d_i$	$g_i(\alpha^*)$	$g_i(\alpha^*)$	$\cdots$

cuyo valor presente es $VP' = v_i + d_i + \delta g_i(\alpha^*) + \delta^2 g_i(\alpha^*) + \cdots = v_i + d_i + \delta g_i(\alpha^*)/(1-\sigma)$

Mientras que si i se conformase al perfil σ obtendría el flujo de pagos:

Etapa	t	$t+1$	$t+2$	$\cdots$
Perfil jugado:	$\alpha = (\alpha_i, \alpha_{-i})$	α	α	$\cdots$
Pagos de i:	v_i	v_i	v_i	$\cdots$

cuyo valor presente es $VP = v_i + \delta v_i + \delta^2 v_i + \cdots = v_i/(1-\delta)$.

Pues bien, σ_i es respuesta óptima de i a σ_{-i} si $VP \geqslant VP'$, es decir, si

$$v_i/(1-\delta) \geqslant v_i + d_i + \delta g_i(\sigma^*)/(1-\delta);$$
$$v_i \geqslant (1-\delta)(v_i + d_i) + \delta g_i(\alpha^*);$$
$$0 \geqslant -\delta v_i + d_i - \delta d_i + \delta g_i(\alpha^*);$$
$$\delta \geqslant d_i/(v_i + d_i - g_i(\alpha^*))$$

En conclusión, si $\boldsymbol{\delta \geqslant \max\{d_i/(v_i + d_i - g_i(\alpha^*))\}_{i=1,2,\dots,n}}$, $\boldsymbol{\sigma}$ es un EN de $\mathbf{G^\infty(\delta)}$.

Veamos ahora que σ es un EN para cualquier subjuego de $G^\infty(\delta)$, y ello para esos mismos valores de δ. Tal como razonamos en el caso del dilema del prisionero, desde el punto de vista de las estrategias de disparador de σ, los subjuegos de $G^\infty(\delta)$, todos ellos iguales a $G^\infty(\delta)$, pueden clasificarse en dos tipos:

— Subjuegos para los que la historia pasada ha sido siempre de cooperación, jugando el perfil α en cada etapa. Estos subjuegos comienzan en las mismas circunstancias que en la primera etapa del juego original sobre el que se aplica el perfil σ. De modo que en estos subjuegos el perfil σ genera un EN si y sólo si $\delta \geqslant \max\{d_i/(v_i + d_i - g_i(\alpha^*))\}_{i=1,2,\dots,n}$.

— Subjuegos en los que en algún momento de la historia pasada no se ha cooperado (algún jugador i ha decidido desviarse de σ_i en alguna etapa previa). En estos subjuegos σ genera el EN consistente en jugar α^* en cada etapa.

En conclusión, si $\boldsymbol{\delta \geqslant \max\{d_i/(v_i + d_i - g_i(\alpha^*))\}_{i=1,2,\dots,n}}$, $\boldsymbol{\sigma}$ es un ENPS de $\boldsymbol{G^\infty(\delta)}$.

El teorema anterior puede describirse diciendo que si un vector de pagos factible v Pareto-domina estrictamente al vector de pagos $g(\alpha^*)$ de un EN de G, todo factor de descuento δ suficientemente cercano a 1 permite alcanzar v como vector de pagos medios de un ENPS del juego repetido infinitamente $G^{\infty}(\delta)$.

Observación 7.6

Como en capítulos anteriores, aunque este teorema se enuncia para juegos de etapa finitos, también es válido en muchas situaciones con juegos de etapa infinitos, como el oligopolio de Cournot y otros juegos importantes en economía.

Para apreciar visualmente el significado del teorema de Friedman, representemos las regiones de pagos factibles correspondientes al dilema del prisionero y a la batalla de los sexos, y los pagos de equilibrio correspondientes al único EN del primero y al EN en estrategias mixtas [(1/3, 2/3), (2/3, 1/3)] del segundo.

El teorema de Friedman nos dice, en cuanto al dilema del prisionero (DP), que cualquier vector de pagos factible que se encuentre por encima y a la derecha del punto (1, 1) es alcanzable como vector de pagos medios por algún ENPS de $DP^{\infty}(\delta)$ siempre que δ sea suficientemente grande, y en cuanto a la batalla de los sexos (BS), que cualquier vector de pagos factible que se encuentre por encima y a la derecha del punto (2/3, 2/3) es alcanzable como vector de pagos medios por algún ENPS de $BS^{\infty}(\delta)$ siempre que δ sea suficientemente grande. Las regiones alcanzables en la Figura 7.4 son los polígonos de trazo grueso.

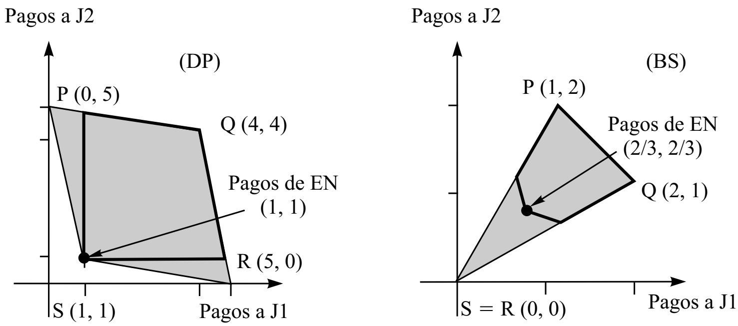


Figura 7.4 Vectores de pagos factibles y EN.

Obsérvese, por otra parte, que si $v_i < g_i(\alpha^*)$, v no puede alcanzarse con un ENPS ni con un EN de $G^{\infty}(\delta)$. En efecto, le bastaría al jugador i con jugar siempre su estrategia en el perfil de etapa α^* para conseguir $g_i(\alpha^*)$ de pago medio.

7.4. APLICACIONES: COLUSIÓN EN EL MODELO DE COURNOT REPETIDO INFINITAMENTE

Una de las primeras aplicaciones en las que se mostró que la repetición infinita o indeterminada de una situación (o juego) podía generar un comportamiento colusivo, en el que las empresas se comportan como si hubiesen firmado un acuerdo, es el oligopolio. En esta sección analizaremos cómo la repetición infinita de la competencia en el modelo de Cournot puede dar lugar a una situación de cooperación tácita, en la que las empresas condicionan su comportamiento presente a la posibilidad de ser recompensados o castigados en el futuro, sobre la base de unas expectativas generadas a la vista del comportamiento pasado.

Duopolio de Cournot repetido infinitamente. Modelo simplificado

Consideremos un mercado en el que en cada etapa se juega el modelo simplificado de duopolio de Cournot de la Sección 2.5 del Capítulo 2. Sea un mercado en el que sólo hay dos empresas, E_1 y E_2, que fabrican un determinado producto homogéneo y que en cada etapa o periodo deben competir en cantidades. Sean $q_{1,t}$ y $q_{2,t}$ las cantidades que en cada etapa t y de un modo simultáneo deciden producir y poner a la venta en el mercado E_1 y E_2, respectivamente. Supongamos que se enfrentan a una demanda temporalmente constante, caracterizada en cada periodo t mediante una función de demanda inversa decreciente y lineal en el intervalo $[0, a/b]$, y que asimismo, comparten una misma estructura de costes, invariante en el tiempo (sin alteraciones debidas a ningún tipo de efecto experiencia, aprendizaje, etc.), donde los costes marginales de cada empresa son constantes, idénticos para ambas empresas, fijos en el tiempo, y menores que a, junto a unos costes fijos nulos. Además, supondremos que dicho mercado se vacía en cada etapa t, es decir, en cada periodo se vende toda la cantidad producida (no se generan *stocks*). Concretando, sea la función de demanda inversa:

$$P_t(Q_t) = \begin{cases} a - bQ_t & \text{si} \quad bQ_t < a \\ 0 & \text{si} \quad bQ_t \geqslant a \end{cases} \text{(donde } b > 0 \text{ y } Q_t = q_{1,t} + q_{2,t}, \forall\, t = 1, 2, ...)$$

y las funciones de costes:

$$C_{1,t}(q_{1,t}) = cq_{1,t},\ C_{2,t}(q_{2,t}) = cq_{2,t}, \text{ donde } c < a$$

Los beneficios en cada periodo t serán:

$$u_{1,t}(q_{1,t}, q_{2,t}) = q_{1,t}(a - bq_{1,t} - bq_{2,t}) - cq_{1,t} = q_{1,t}(a - bq_{1,t} - bq_{2,t} - c)$$
$$u_{2,t}(q_{1,t}, q_{2,t}) = q_{2,t}(a - bq_{1,t} - bq_{2,t}) - cq_{2,t} = q_{2,t}(a - bq_{1,t} - bq_{2,t} - c)$$

Resumiendo, en este juego repetido infinitamente con dos jugadores, E_1 y E_2, el juego de etapa viene definido por unos espacios de acciones $A_1 = A_2 = [0, a/b]$, y unas funciones de pagos o ganancias, suponiendo que las utilidades coincidan con los beneficios:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c)$$
$$u_2(q_1, q_2) = q_2(a - bq_1 - bq_2 - c)$$

Algunos resultados en el juego de etapa y en el juego repetido finitamente

Como ya analizamos en el Capítulo 2, el juego de etapa contiene un único equilibrio de Nash, consistente en que cada empresa E_i produce una cantidad $q_i^C = \dfrac{a - c}{3b}$, dando lugar a unos beneficios de equilibrio $u_i^C = \frac{(a-c)^2}{9b}$, inferiores a $u_i^{m/2} = \frac{(a-c)^2}{8b}$ que podría obtener si ambas empresas se pusiesen de acuerdo y se repartieran el mercado, produciendo cada una de ellas la mitad de la cantidad de monopolio, $q_i^{m/2} = \frac{a-c}{4b}$. Este resultado de equilibrio, como vimos, se produce por la imposibilidad de poder establecer un acuerdo sostenible entre las empresas, ya que si una de ellas supiese que la otra iba a producir la mitad de la cantidad de monopolio, tendría un incentivo para producir una cantidad mayor, $q_i^r = \frac{3}{2}\left(\frac{a-c}{4b}\right)$, con la que consigue un beneficio mayor $u_i^r = \frac{9(a-c)^2}{64b}$, respondiendo óptimamente a $q_j^{m/2} = \frac{a-c}{4b}$, es decir, eligiendo la cantidad q_i que maximiza $u_i(q_i, q_j^{m/2})$.

Este resultado se repite incluso cuando el juego de etapa se repite un número finito y conocido de veces, pues, como ya hemos indicado en la Sección 7.2, la existencia de un único EN en el juego de etapa implica la existencia de un único ENPS consistente en que cada empresa decida en cada etapa producir la cantidad del equilibrio de etapa $q_{i,t}^C = \frac{a-c}{3b}$ $\forall\, t = 1, 2, ..., T$, consiguiendo por tanto un beneficio de etapa $u_{i,t}^C = \frac{(a-c)^2}{9b}$, que podemos evaluar, cuando $\delta_i < 1$ representa el factor de descuento de la empresa E_i, a través del siguiente valor presente,

$$VP_i((\{q_{i,t}^C\}_{t=1,2,...,T}, \{q_{j,t}^C\}_{t=1,2,...,T})) = \sum_{t=1}^{T} \sigma_i^{t-1} u_{i,t}^C = \frac{1-\delta_i^T}{1-\delta_i}\frac{(a-c)^2}{9b}$$

Equilibrios cooperativos, mediante estrategias de disparador, del juego repetido infinitamente

No obstante, cuando el horizonte temporal es infinito o indeterminado, puede sostenerse como ENPS un comportamiento en el que cada empresa decide producir $q_{i,t}^{m/2} = \frac{a-c}{4b}$ $\forall\, t = 1, 2, ...$, generándose una sucesión de beneficios iguales a $u_{i,t}^{m/2} = \frac{(a-c)^2}{8b}$.

Este resultado se consigue cuando ambas empresas siguen la denominada Estrategia de Disparador (ED), ya estudiada en el dilema del prisionero y en el caso más general del teorema de Friedman. En el caso del duopolio de Cournot podemos definir ED del siguiente modo:

«Empezar en $t = 1$ produciendo la mitad de la cantidad de monopolio $q_{t=1}^{m/2} = \frac{a-c}{4b}$.

En cada etapa $t > 1$, producir $q_t^{m/2} = \frac{a-c}{4b}$ si la historia pasada h_t ha dado lugar al perfil de acciones $(q_k^{m/2}, q_k^{m/2})\ \forall\, k < t$, produciendo la cantidad del equilibrio de Cournot, $q_t^C = \dfrac{a-c}{3b}$, en caso contrario».

Como en el caso del dilema del prisionero analizado en la Sección 7.3, para determinar si el perfil de estrategias de disparador (ED_1, ED_2) constituye un ENPS, deberemos probar que constituye un EN del juego repetido y que genera un EN en cada subjuego, es decir, ante cualquier historia pasada o desarrollo del juego, $h_t \in H_t$.

Demostremos en primer lugar que dicho perfil es un equilibrio de Nash del duopolio de Cournot repetido infinitamente: supongamos que la empresa E_j adopta la estrategia del disparador. Vamos a determinar bajo qué condiciones la empresa E_i tiene también dicha estrategia como respuesta óptima. Para ello, podemos ayudarnos del hecho siguiente: si la empresa E_j sigue la estrategia del disparador, dada una etapa k cualquiera, podemos clasificar las historias h_k en dos tipos o clases:

1. Historias de no cooperación. Aquellas en las que o bien la empresa E_i o bien la empresa E_j o bien ambas, decidieron en una etapa $t < k$ no producir la cantidad correspondiente a la mitad del monopolio. En estas historias sabemos que si la empresa E_j sigue la estrategia ED, producirá la cantidad de equilibrio de Cournot q_t^C en todas las etapas $t \geqslant k$. Por tanto, el comportamiento de la empresa E_i debe ser producir una cantidad q_t^C en toda etapa $t \geqslant k$. La mejor respuesta de E_i consiste en maximizar la suma descontada de sus beneficios presentes y futuros a partir de la etapa k considerada, lo que significa producir q_t^C en todo $t \geqslant k$, pues con ello se maximiza la función $u_{i,t}(q_{i,t}, q_{j,t}^C)$ en cualquier etapa $t \geqslant k$. Así pues, la estrategia óptima de E_i es seguir la propia estrategia ED (o cualquier estrategia que suponga producir la cantidad q_t^C en todo $t \geqslant k$, como por ejemplo, producir q_t^C de un modo incondicional).
2. Historias de cooperación. Si por el contrario h_k es la secuencia consistente en repetir el perfil de acciones $(q_t^{m/2}, q_t^{m/2})$, la empresa E_j determinará, según la estrategia ED, una producción $q_{j,t=k} = q_{j,t=k}^{m/2}$ en $t = k$ y una producción dependiente de la decisión de E_i en $t > k$. Así, el comportamiento óptimo de la empresa E_i en $t \geqslant k$ dependerá de cuál sea el flujo máximo de beneficios que puede conseguir.

   Dada la estrategia ED_j de la empresa E_j, si E_i sigue la ED_i,

Etapa	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$\cdots$
Acción de E_i	$q_i^{m/2}$	$q_i^{m/2}$	$q_i^{m/2}$	$q_i^{m/2}$	$\cdots$
Perfil de la etapa	$(q_i^{m/2}, q_j^{m/2})$	$(q_i^{m/2}, q_j^{m/2})$	$(q_i^{m/2}, q_j^{m/2})$	$(q_i^{m/2}, q_j^{m/2})$	$\cdots$
Pagos de E_i	$u_i^{m/2}$	$u_i^{m/2}$	$u_i^{m/2}$	$u_i^{m/2}$	$\cdots$

   el flujo presente y futuro de beneficios en $t = k$, con un factor de descuento $\delta_i < 1$, determina el siguiente valor actualizado:

$$VP_i(ED_i, \delta_i) = \sum_{t=k}^{\infty} \delta_i^{t-k} u_{i,t}^{m/2} = \left(\sum_{t=k}^{\infty} \delta_i^{t-k}\right) u_i^{m/2} = \frac{1}{1-\delta_i}\,\frac{(a-c)^2}{8b}$$

mientras que si en la etapa $t = k$ decide seguir una estrategia distinta a ED_i, el máximo beneficio que puede conseguir consiste en producir la cantidad $q^r_{i,k}$ que maximiza la función $u_{i,k}(q_{i,k}, q^{m/2}_{j,k})$ (es decir, la mejor respuesta a $q^{m/2}_{j,t}$ de E_j en $t = k$,), sabiendo que en el futuro la empresa E_j se comportará como en cualquier historia de no cooperación, produciendo $q^C_{j,t}$ en $t > k$. Por tanto, la decisión $q^r_{i,k} = \dfrac{3(a-c)}{8b}$ de E_i conlleva implícitamente la decisión de producir $q^C_{i,t}$ en $t > k$. Así pues, dada la estrategia ED_j de la empresa E_j, si E_i sigue la estrategia NED_i, consistente en desviarse óptimamente en $t = k$ y producir según el equilibrio de Nash-Cournot en $t > k$,

Etapa	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$\cdots$
Acción de E_i	q^r_i	q^C_i	q^C_i	q^C_i	$\cdots$
Perfil de la etapa	$(q^r_i, q^{m/2}_j)$	(q^c_i, q^c_j)	(q^c_i, q^c_j)	(q^c_i, q^c_j)	$\cdots$
Pagos de E_i	u^r_i	u^C_i	u^C_i	u^C_i	$\cdots$

el flujo presente y futuro de beneficios en $t = k$, con un factor de descuento $\delta_i < 1$, tiene un valor presente descontado de:

$$VP_i(NED_i, \delta_i) = u^r_{i,k} + \sum_{t=k+1}^{\infty} \delta_i^{t-k} u^C_{i,t} = u^r_{i,k} + u^C_i \left(\sum_{t=k+1}^{\infty} \delta_i^{t-k} \right) =$$

$$= \frac{9(a-c)^2}{64b} + \frac{\delta_i}{1-\delta_i} \frac{(a-c)^2}{9b}$$

Esto significa que la estrategia ED_i de E_i es una respuesta óptima a ED_j de E_i si y sólo si

$$VP_i(ED_i, \delta_i) \geqslant VP_i(NED_i, \delta_i)$$

$$\frac{1}{1-\delta_i} \frac{(a-c)^2}{8b} \geqslant \frac{9(a-c)^2}{64b} + \frac{\delta_i}{1-\delta_i} \frac{(a-c)^2}{9b}$$

$$\delta_i \geqslant 9/17$$

En la Figura 7.5 aparece la secuencia de beneficios de la empresa E_i cuando se enfrenta a una empresa $\mathrm{E_j}$ que produce en cada periodo según la estrategia del disparador, y tiene un factor de descuento $\delta_i \geqslant 9/17$.

Esto significa que el perfil de estrategias $(\mathrm{ED}_1, \mathrm{ED}_2)$ será un EN del juego repetido si y sólo si $VP_i(ED_i, \delta_i) \geqslant VP_i(NED_i, \delta_i)$, $\forall\, i = 1, 2$, lo cual ocurre si $\delta_1, \delta_2 \geqslant 9/17$.

Intuitivamente, esto significa que únicamente cuando el peso del futuro es lo suficientemente alto, a ninguna de las empresas le interesa desviarse unilateralmente de la estrategia del disparador si saben que la otra empresa la está aplicando. Sólo cuando el futuro es suficientemente importante la ganancia de ser tácitamente desleal no se ve compensada por el castigo futuro.

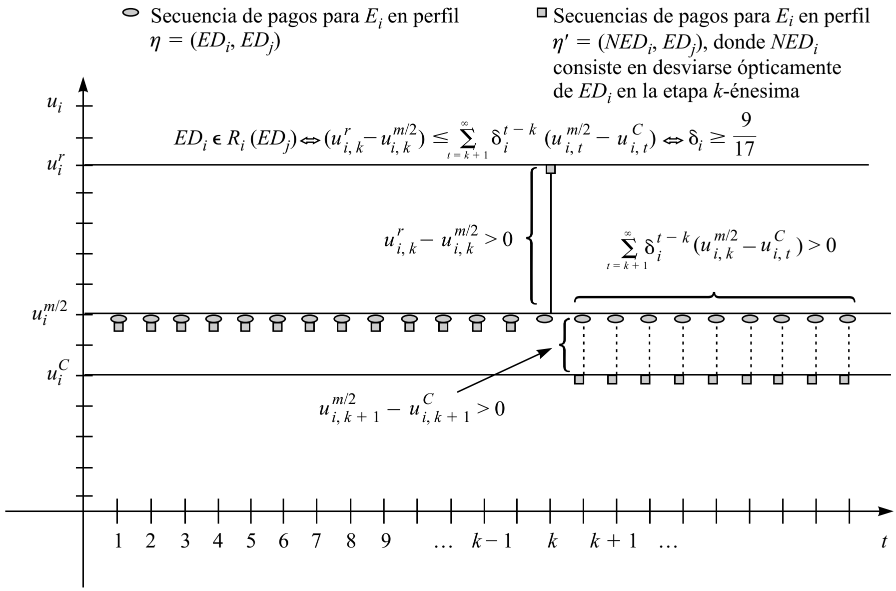


Figura 7.5 Secuencias de pagos de etapa en estrategias de disparador.

Falta demostrar que este perfil estratégico (ED_1, ED_2) determina un EN en cada subjuego para concluir así que es un ENPS. Para ello, podemos tener de nuevo en cuenta que dada una etapa k cualquiera, si una de las empresas E_j sigue la estrategia del disparador, podemos clasificar las historias $h_k \in H_k$ en dos tipos (de cooperación y no cooperación), y en consecuencia podemos inducir la misma clasificación para los subjuegos que comienzan en k tras cada historia h_k:

1. Subjuegos sin historia de cooperación previa. En este caso si E_j sigue la estrategia ED_j decidirá producir $q^C_{j,t}$ en todo $t \geqslant k$, y por tanto una respuesta óptima de E_i es seguir ED_i, produciendo también $q^C_{i,t}$. El comportamiento de E_j es idéntico por simetría, por lo que en este tipo de subjuegos el perfil (ED_i, ED_j) es un EN.
2. Subjuegos con historia de cooperación previa. En este caso, si E_j sigue la estrategia ED_j el mejor resultado de E_i es seguir la estrategia ED_i siempre que $\delta_i \geqslant 9/17$, como acabamos de ver. Así pues, en este tipo de subjuegos el perfil (ED_i, ED_j) es un EN si y sólo si δ_i, $\delta_j \geqslant 9/17$.

En conclusión, el perfil de estrategias de disparador (ED_1, ED_2) es ENPS del juego repetido infinitamente si y sólo si $VP_i(ED_i, \delta_i) \geqslant VP_i(NED_i, \delta_i)$, $\forall\, i = 1, 2$, es decir, si sólo si δ_i, $\delta_j \geqslant 9/17$.

Esto nos permite afirmar que, si el factor de descuento es lo suficientemente alto, es posible encontrar ENPS en el duopolio de Cournot repetido infinitamente donde la colusión se produce tácitamente, es decir, sin necesidad de acuerdo entre las partes.

Obsérvese que si existe algún $\delta_i < 9/17$ para $i = 1, 2$, el perfil de estrategias de disparador no es ENPS y tampoco EN en el modelo simplificado de duopolio de Cournot repetido infinitamente.

Equilibrios cooperativos, mediante estrategias de disparador, para un factor de descuento bajo

En la búsqueda de estrategias sustentadoras de la cooperación en equilibrio, hasta ahora hemos estudiado de manera preferente, tanto en el dilema del prisionero como en el duopolio de Cournot, estrategias de disparador que tienen una pauta común, según la cual todos los jugadores se proponen un perfil σ de acciones cooperadoras que es un óptimo de Pareto, y una amenaza de penalización ante desviaciones consistente en volver para siempre al equilibrio de Nash σ^* (que es Pareto dominado por σ). En estos casos siempre hemos encontrado un valor de umbral para el factor de descuento, tal que la estrategia de disparador descrita sólo era capaz de sustentar la cooperación por medio de un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, en el caso de que el factor de descuento de todos los jugadores fuese superior a dicho valor de umbral. Ese valor de umbral ha sido $\delta = 1/4$ en el caso del dilema del prisionero y $\delta = 9/17$ en el caso del duopolio de Cournot.

¿Qué hacer si el factor de descuento de alguno de los jugadores es inferior al correspondiente valor de umbral? Vamos a plantear una de las posibilidades que explora Gibbons (1992, Sección 2.3.C). Puesto que el perfil de acciones cooperadoras es muy deseable para el conjunto (y en particular es un óptimo de Pareto), los beneficios inmediatos de la traición son muy altos en comparación con los perjuicios de una penalización permanente pero diferida, hasta el punto de que sólo serán compensados mediante la penalización si el factor de descuento (es decir, la valoración del futuro) es suficientemente alto. En consecuencia, acordar un perfil de acciones de cooperación menos deseable para el conjunto puede rebajar los beneficios de la traición y hacer ésta menos tentadora.

Sigamos esta idea, suponiendo que el factor de descuento tiene un valor fijo δ menor que 9/17, y preguntándonos qué es lo máximo que podrían conseguir las dos empresas en estas condiciones, es decir, cuál sería el perfil (q_δ, q_δ), donde la cantidad q_δ es la mínima posible (y por tanto el beneficio el máximo posible) capaz de sustentarse en equilibrio con la penalización proporcionada por el equilibrio de Cournot.

Definamos la estrategia de disparador correspondiente, ED(δ), del siguiente modo, ya familiar:

«Empezar en $t = 1$ produciendo la cantidad cooperadora q_δ (que le produce, si la otra también lo hace, unos pagos de etapa $u(q_\delta, q_\delta) = q_\delta(a - c - 2bq_\delta)$). En cada etapa $t > 1$, producir q_δ si la historia pasada h_t ha dado lugar al perfil de acciones (q_δ, q_δ) $\forall k < t$, produciendo la cantidad del equilibrio de Cournot, $q_t^C = \dfrac{a-c}{3b}$ (que le produce, si la otra también lo hace, unos pagos de etapa $u(q_t^C, q_t^C) = \dfrac{(a-c)^2}{9b}$), en caso contrario».

Repitamos para el perfil $(\text{ED}(\delta)_1, \text{ED}(\delta)_2)$, pero de manera abreviada, la argumentación hecha anteriormente para $(\text{ED}_1, \text{ED}_2)$.

Supongamos que la empresa E_j adopta la estrategia del disparador. Vamos a determinar bajo qué condiciones la empresa E_i tiene también dicha estrategia como respuesta óptima. Dada una etapa k cualquiera, clasifiquemos las historias h_k en dos tipos o clases:

- Historias de no cooperación. La empresa E_j producirá la cantidad de penalización q_t^C en todas las etapas $t \geqslant k$. Por tanto, E_i debe también producir q_t^C en toda etapa $t \geqslant k$.

- Historias de cooperación. La empresa E_j producirá una cantidad q_δ en $t = k$ y una cantidad dependiente de la decisión de E_i en $t > k$. El comportamiento óptimo de la empresa E_i en $t \geqslant k$ dependerá de cuál sea el flujo máximo de beneficios que puede conseguir.

  Si E_i sigue la estrategia $ED(\delta)_i$, obtiene

Etapa	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$\cdots$
Acción de E_i	q_δ	q_δ	q_δ	q_δ	$\cdots$
Perfil de la etapa	(q_δ, q_δ)	(q_δ, q_δ)	(q_δ, q_δ)	(q_δ, q_δ)	$\cdots$
Pagos de E_i	$q_\delta(a-c-2bq_\delta)$	$q_\delta(a-c-2bq_\delta)$	$q_\delta(a-c-2bq_\delta)$	$q_\delta(a-c-2bq_\delta))$	$\cdots$

El valor actualizado de ese flujo de pagos es

$$VP_i(ED(\delta)_i, \delta) = \left(\sum_{t=k}^{\infty} \delta^{t-k}\right) q_\delta(a - c - 2bq_\delta) = \frac{q_\delta(a - c - 2bq_\delta)}{1 - \delta}$$

mientras que si E_i sigue una estrategia distinta de $ED(\delta)_i$, a la que llamaremos $NED(\delta)_i$, y quiere que sea respuesta óptima a $ED(\delta)_j$, habrá de producir la cantidad q_i^r que maximiza la función $u_{i,k}(q_i, q_\delta) = q_i(a - c - bq_i - bq_\delta)$, y sabiendo que en el futuro E_j penalizará produciendo $q_{j,t}^C$ en $t > k$, lo que obligará a E_i a defenderse produciendo también $q_{i,t}^C$ en $t > k$.

Hagamos el cálculo:

Las condiciones de primer y segundo orden son:

$$\frac{\partial u_i}{\partial q_i} = q_i(-b) + [a - c - bq_i - bq_\delta] = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial q_i^2} = -2b < 0 \text{ (máximo)}$$

y de ellas se deduce el siguiente resultado: $q_i^r = \dfrac{a - c - bq_\delta}{2b}$, que proporciona a la empresa que se desvía un beneficio

$$u_i^r = \frac{a - c - bq_\delta}{2b}\left(a - c - b\,\frac{a - c - bq_\delta}{2b} - bq_\delta\right) = \frac{(a - c - bq_\delta)^2}{4b}$$

Así pues, si E_i sigue la estrategia de desviación $NED(\delta)_i$, obtiene

Etapa	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$\cdots$
Acción de E_i	q_i^r	q_i^C	q_i^C	q_i^C	$\cdots$
Perfil de la etapa	(q_i^r, q_δ)	(q_i^C, q_j^C)	(q_i^C, q_j^C)	(q_i^C, q_j^C)	$\cdots$
Pagos de E_i	u_i^r	u_i^C	u_i^C	u_i^C	$\cdots$

El valor actualizado de ese flujo de pagos es

$$VP_i(NED)(\delta)_i,\ \delta) = u_i^r + u_i^C \left(\sum_{t=k+1}^{\infty} \sigma^{t-k} \right) = \frac{(a-c-bq_\delta)^2}{4b} + \frac{\delta(a-c)^2}{9b(1-\delta)}$$

Por tanto, y como se ha visto en razonamientos anteriores, el perfil $(\mathrm{ED}(\delta)_1, \mathrm{ED}(\delta)_2)$ es un ENPS si y sólo si $VP_i(ED(\delta)_i, \delta) \geqslant VP_i(NED(\delta)_i, \delta)$, $i = 1, 2$.

Recordemos la pregunta que estamos intentando contestar: ¿cuál es la mínima cantidad q_δ tal que $(\mathrm{ED}(\delta)_1, \mathrm{ED}(\delta)_2)$ es un ENPS? Calculémosla:
de la desigualdad $VP_i(ED(\delta)_i, \delta) \geqslant VP_i(NED(\delta)_i, \delta)$, es decir, de la desigualdad

$$\frac{(a-c-bq_\delta)^2}{4b} + \frac{\delta(a-c)^2}{9b(1-\delta)} \leqslant \frac{q_\delta(a-c-2bq_\delta)}{(1-\delta)}$$

se deduce

$$q_\delta \geqslant \frac{(a-c)(9-5\delta)}{3b(9-\delta)}$$

por tanto, la mínima cantidad q_δ buscada es

$$q_\delta^* = \frac{(a-c)(9-5\delta)}{3b(9-\delta)}$$

Obsérvese que q_δ^* decrece con δ, y que además cumple

- $\lim\limits_{\delta \to 9/17} q_\delta^* = q_i^{m/2} = \dfrac{(a-c)}{4b}$

- $\lim\limits_{\delta \to 0} q_\delta^* = q_i^C = \dfrac{(a-c)}{3b}$

En consecuencia, podemos concluir así:

Si $0 < \delta < 9/17$, existe una cantidad mínima a producir por ambas empresas,

$$q_\delta^* = \frac{(a-c)(9-5\delta)}{3b(9-\delta)}$$

situada entre las cantidades de Cournot $\dfrac{(a-c)}{3b}$ y de colusión monopolística $\dfrac{(a-c)}{4b}$, tal que el perfil de estrategias de disparador $(\mathrm{ED}(\delta)_1, \mathrm{ED}(\delta)_2)$ sostiene en equilibrio el perfil de acciones de cooperación (q_δ^*, q_δ^*) bajo la amenaza de vuelta permanente al equilibrio de Cournot.

En la Figura 7.6 se han señalado (en el triángulo rectángulo en trama oscura) los vectores de cantidades alcanzables como perfiles de acciones cooperativas sustentadas en equilibrio por estas estrategias de disparador.

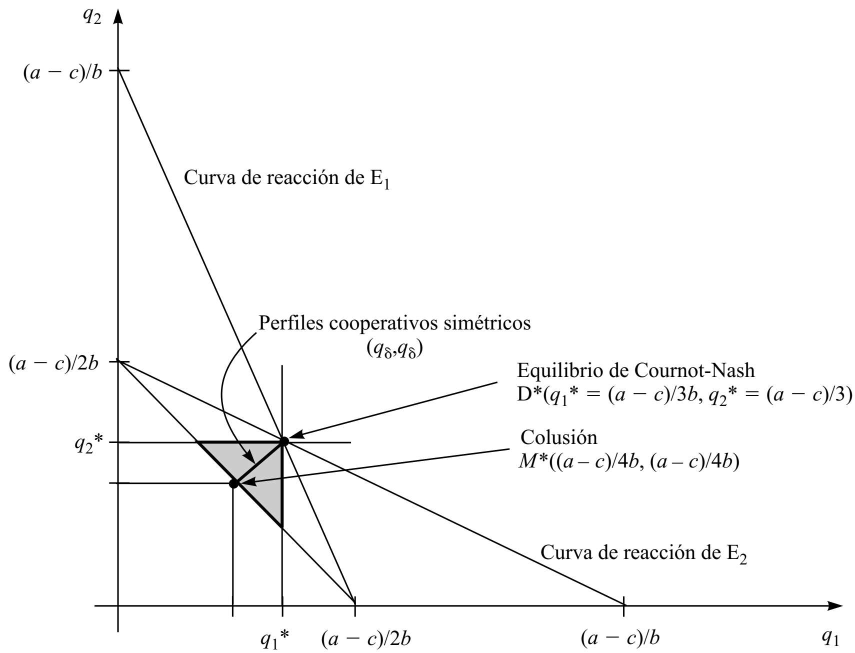


Figura 7.6 Perfiles de cooperación alcanzables cuando $0 < \delta < 9/17$.

Oligopolio de Cournot repetido infinitamente. Modelo simplificado

Extendamos al caso de n empresas $E_1, E_2, ..., E_n$, el modelo simplificado anterior. Sea $q_{i,t}$ la cantidad que produce la empresa E_i en la etapa t, para $i = 1, 2, ..., n$. Supongamos ahora que en cada periodo t las empresas se enfrentan a la función de demanda inversa

$$P_t(Q_t) = \begin{cases} a - bQ_t & \text{si} \quad bQ_t < a \\ 0 & \text{si} \quad bQ_t \geqslant a \end{cases} \text{(donde } b > 0 \text{ y } Q_t = q_{1,t} + q_{2,t} + \cdots + q_{n,t} \ \forall\, t = 1, 2, ...)$$

y que las funciones de costes son

$$C_{i,t}(q_{i,t}) = cq_{i,t}, \text{ donde } c < a, \ \forall\, i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ y } \forall\, t = 1, 2, ...$$

Por tanto, las funciones de ganancias serán:

$$u_{i,t}(q_{1,t}, q_{2,t}, ..., q_{n,t}) = q_{i,t} \cdot P(q_{i,t} + Q_{-i,t}) - C_{i,t}(q_{i,t}) = q_{i,t}(a - b(q_{i,t} + Q_{-i,t}) - c)$$

donde $Q_{-i,t} = q_{1,t} + \cdots + q_{i-1,t} + q_{i+1,t} + \cdots + q_{n,t}$, $\forall\, i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\forall\, t = 1, 2, ...$

Recordemos que el juego de etapa posee un único equilibrio de Nash consistente en que cada empresa E_i produzca una cantidad $q_i^C = \dfrac{a-c}{(n+1)b}$, lo que genera un beneficio de $u_i^C = \dfrac{(a-c)^2}{(n+1)^2 b}$.

Veamos que, como en el caso del duopolio, el perfil cooperativo en el que cada empresa produce la $n-$ésima parte de la cantidad de monopolio $q_i^{m/n} = \dfrac{a-c}{2nb}$ con el fin de conseguir un reparto equitativo de los beneficio del monopolio $u_i^{m/n} = \dfrac{(a-c)^2}{4nb}$, no es un EN, pues cualquier empresa E_i tiene incentivos para incumplir el acuerdo. En efecto, la respuesta óptima de E_i ante ese supuesto equilibrio se obtiene resolviendo el problema

$$\max_{q_i} u_i(q_i, q_{-i}^{m/n}) = [a - bq_i - (n-1)bq^{m/n}]q_i - cq_i = q_i[a - c - bq_i - (n-1)bq^{m/n}]$$

y obteniendo, a través de la condiciones de primer y segundo orden

$$\frac{\partial u_i}{\partial q_i} = q_i(-b) + [a - c - bq_i - (n-1)bq^{m/n}] = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial q_i^2} = -2b < 0 \text{ (máximo)}$$

el siguiente resultado:

$$q_i^r = \frac{(a-c)(n+1)}{4nb}$$

que proporciona a la empresa que se desvía un beneficio

$$u_i^r = \frac{(a-c)^2(n+1)^2}{16n^2b} > \frac{(a-c)^2}{4nb} = u_i^{m/n}, \ \forall\, n > 1$$

Analicemos qué se requiere en este caso para que el perfil (ED_1, ED_2, ..., ED_n) constituya un ENPS del juego repetido infinitamente. La estrategia de disparador ED en presencia de n empresas es:

«Empezar en $t = 1$ eligiendo $q_{t=1}^{m/n} = \dfrac{a-c}{2nb}$, enésima parte de la cantidad de monopolio. En cada etapa $t > 1$ producir $q_t^{m/n} = \dfrac{a-c}{2nb}$ si la historia pasada h_t ha dado lugar al perfil de acciones $(q_{1,k}^{m/n}, q_{2,k}^{m/n}, ..., q_{n,k}^{m/n})$, $\forall\, k > t$, produciendo la cantidad del equilibrio de Cournot, $q_t^C = \dfrac{a-c}{(n+1)b}$, en caso contrario».

Como la argumentación hecha anteriormente para dos empresas en el modelo de duopolio de Cournot sigue siendo válida ahora para n empresas, nos limitaremos a estudiar para qué factores de descuento el perfil propuesto (ED_1, ED_2, ..., ED_n) es un EN, y por tanto un ENPS. Sin pérdida de generalidad asumiremos que todas las empresas presentan el mismo factor de descuento, es decir, $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_n = \delta < 1$.

Como en el caso del duopolio será suficiente con analizar cuándo ED_i es una respuesta óptima a ED_{-i}. Supongamos que todas las empresas, salvo E_i, adoptan la estrategia del disparador. Dada una etapa k cualquiera, podemos encontrar las siguientes respuestas óptimas dependiendo del desarrollo o historia previa a la etapa k, h_k:

1. Historias de no cooperación. En ese caso todas las empresas, siguiendo su estrategia del disparador decidirán producir el vector $q^C_{-i,t} = (q^C_{1,t}, q^C_{2,t}, ..., q^C_{i-1,t}, q^C_{i+1,t}, ..., q^C_{n,t})$, en todo $t \geqslant k$. En consecuencia, la empresa E_i producirá la cantidad del equilibrio de Cournot $q^C_{i,t}$ en todas las etapas $t \geqslant k$, pues con ello maximiza los beneficios de cada etapa, y por tanto también la suma descontada de sus beneficios presentes.
2. Historias de cooperación. Si por el contrario en la primera etapa y en toda etapa $t < k$ se ha conseguido el perfil de acciones $(q^{m/n}_{1,k}, q^{m/n}_{2,k}, ..., q^{m/n}_{n,k})$, las empresas determinarán, según la estrategia ED, una producción $q_{j,t=k} = q^{m/n}_{j,t=k}$, $\forall j \neq i$, en $t = k$ y una producción dependiente de la decisión de E_i en $t > k$. Así, el comportamiento óptimo de la empresa E_i en $t \geqslant k$ dependerá de cuál sea el flujo máximo de beneficios que puede conseguir.

Dada la estrategia ED_j $\forall j \neq i$ si E_i sigue la ED_i, conseguirá un flujo de beneficios

Etapa	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$\cdots$
Pagos de E_i	$u_i^{m/n}$	$u_i^{m/n}$	$u_i^{m/n}$	$u_i^{m/n}$	$\cdots$

que le proporciona el siguiente valor presente actualizado en $t = k$

$$VP_i(ED_i, \delta) = \sum_{t=k}^{\infty} \delta^{t-k} u^{m/n}_{i,t} = \left(\sum_{t=k}^{\infty} \delta^{t-k}\right) u_i^{m/n} = \frac{1}{1-\delta} \frac{(a-c)^2}{4nb}$$

Por el contrario, si en la etapa $t = k$ decide una cantidad distinta $q_{i,t=k} \neq q^{m/n}_{i,t=k}$, provocará que el resto de empresas en las siguientes etapas decidan una cantidad $q_{j,t} = q^C_{j,t}$ ante la que la única respuesta óptima es $q_{i,t} = q^C_{i,t}$ $\forall t > k$, de modo que para maximizar el flujo de beneficios presentes y futuros deberá decidir en $t = k$ la cantidad $q^r_{i,k} = \dfrac{(a-c)(n+1)}{4nb}$, que hemos visto que maximiza el beneficio de la etapa dada la decisión del resto de empresas de producir $q^{m/n}_{-i,k} = (q^{m/n}_{1,k}, q^{m/n}_{2,k}, ..., q^{m/n}_{i-1,k}, q^{m/n}_{i+1,k}, ..., q^{m/n}_{n,k})$.

Así, dado el perfil ED_{-i}, si E_i se desvía del modo indicado en $t = k$ (llamemos NED_i a la estrategia resultante), conseguirá el siguiente flujo de beneficios

Etapa	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$\cdots$
Pagos de E_i	u_i^r	u_i^C	u_i^C	u_i^C	$\cdots$

Y dado el factor de descuento $\delta < 1$, obtendrá el valor presente actualizado en $t = k$

$$VP_i(NED_i, \delta) = u^r_{i,k} + \sum_{t=k+1}^{\infty} \delta^{t-k} u^C_{i,t} = u^r_{i,k} + u_i^C \left(\sum_{t=k+1}^{\infty} \delta^{t-k}\right) =$$

$$= \frac{(a-c)^2(n+1)^2}{16n^2 b} + \frac{\delta}{1-\delta} \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2 b}$$

Así pues, la estrategia del disparador será la respuesta óptima de E_i en toda etapa que siga a una historia de cooperación si y sólo si

$$VP_i(ED_i, \delta) \geqslant VP_i(NED_i, \delta)$$

$$\frac{1}{1-\delta}\frac{(a-c)^2}{4nb} \geqslant \frac{(a-c)^2(n+1)^2}{16n^2b} + \frac{\delta}{1-\delta}\frac{(a-c)^2}{(n+1)^2b}$$

$$\delta \geqslant \frac{(n+1)^2[(n+1)^2-4n]}{(n+1)^4-16n^2}$$

Esto significa que el perfil en estrategias de disparador (ED_1, ED_2, ..., ED_n) es un EN, y también un ENPS, del oligopolio de Cournot repetido infinitamente si y sólo si

$$\delta \geqslant \frac{(n+1)^2[(n+1)^2-4n]}{(n+1)^4-16n^2}$$

Se puede comprobar fácilmente que conforme aumenta el número de empresas, el perfil de estrategias del disparador requiere un mayor factor de descuento ($\lim_{n\to\infty} \delta = 1$) para inducir la cooperación. Obsérvese que el valor de umbral de δ se convierte en 9/17 si $n = 2$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

7.1 Dos cerdos, uno dominante y otro subordinado, están encerrados en un corral. En un extremo del corral hay una palanca que cuando se presiona dispensa 6 unidades de pienso en el comedero que está al otro extremo del corral. El cerdo que presiona la palanca tiene que correr al otro extremo para poder comer. El esfuerzo de presionar la palanca y correr le genera una desutilidad equivalente a 1/2 unidades de pienso. Cuando llega al comedero, el otro se ha comido gran parte de la comida. Concretamente, si el cerdo dominante es el que presiona la palanca, el subordinado se come 5 de las 6 unidades antes de que llegue el dominante. Pero el cerdo dominante es capaz de impedir que el cerdo subordinado coma cuando ambos están en el comedero. Si ambos cerdos presionan la palanca a la vez, como el subordinado corre más, se come 2 unidades antes de que llegue el dominante.

a) Represente el juego en forma estratégica.
b) Suponga que el juego dura un período. Suponiendo que los cerdos pueden razonar como los teóricos de juegos, determine qué cerdo presiona la palanca. (Explique el concepto de equilibrio que usa y por qué.)

Suponga que el juego se repite infinitos períodos y que el cerdo dominante le propone la siguiente estrategia al subordinado:

«Como a ninguno de los dos nos gusta correr, lo mejor es que nos turnemos en apretar la palanca. Para que veas que no me aprovecho de ti, yo apretaré hoy la palanca y en todos los períodos impares pero mañana te toca a ti, así como en todos los períodos pares. Si haces lo que te digo, yo también haré lo que te prometo, pero como hagas cualquier otra cosa (o yo la haga), ya nunca presionaré la palanca.»

Suponga también que al cerdo subordinado le convence la historia y le dice al cerdo dominante lo siguiente:

«De acuerdo; a partir de hoy, nos turnaremos apretando la palanca y hoy empiezas tú. Pero si pasa algo distinto de que ambos nos turnemos apretando la palanca, ya nunca apretaré la palanca.»

c) Determine para qué valores del factor de descuento constituyen estas estrategias un equilibrio de Nash del juego repetido.
d) Determine si las estrategias propuestas forman un equilibrio perfecto en subjuegos, explicando detalladamente su respuesta.

7.2 Considérese el juego de la caza del ciervo repetido. Supóngase que los dos jugadores tienen el mismo factor de descuento. Se pide:

a) Para el juego repetido dos veces, calcular todos los equilibrios de Nash en estrategias puras.
b) Para el juego repetido infinitas veces, calcular todos los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos simétricos con estrategias de disparador.

7.3 Considérese el juego de la batalla de los sexos repetido. Supóngase que los dos jugadores tienen el mismo factor de descuento. Se pide:

a) Para el juego repetido dos veces, calcular todos los equilibrios de Nash en estrategias puras.
b) Para el juego repetido infinitas veces, calcular todos los vectores de pagos que son eficientes en el sentido de Pareto y alcanzables mediante equilibrios de Nash perfectos en subjuegos. Para el vector de pagos (3/2, 3/2), indicar un equilibrio que permita alcanzarlo.

7.4 Considere el siguiente juego en forma normal

		Jugador 2	
		t_1	t_2
Jugador 1	s_1	15, 15	8, 20
	s_2	20, 8	10, 10

Suponga que el juego se repite infinitos períodos.

a) Defina unas estrategias que permitan mantener beneficios de 15 para cada jugador en cada período, y determine para qué valores del parámetro de descuento las estrategias propuestas forman un equilibrio de Nash del juego repetido.
b) Determine si el equilibrio de Nash que halló en a) es perfecto en subjuegos, y explique detalladamente su respuesta.

7.5 Considere el siguiente juego de dos jugadores y dos etapas. En la primera etapa, cada jugador i, para $i = 1, 2$, elige una cantidad a gastar, a_i, perteneciente al conjunto $S = \{0, 3, 5\}$. La elección de ambos jugadores en la primera etapa es simultánea. En la segunda etapa, cada jugador i, tras observar la elección de su rival en la primera etapa, elige una acción del conjunto $T = \{L, H\}$. De nuevo, la elección en esta segunda etapa es simultánea. Los pagos de ambos jugadores para la segunda etapa vienen dados por la siguiente matriz:

		Jugador 2	
		L	H
Jugador 1	L	12, 12	0, 13-a_2
	H	13-a_1, 0	1, 1

Los pagos de cada jugador del juego son el pago que recibe en la segunda etapa menos la cantidad gastada en la primera etapa (no hay descuento).

a) Determine las estrategias de ambos jugadores para el juego.
b) Determine el número de subjuegos del juego.
c) Determine el/los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos. Como supuesto simplificador, suponga que si en la segunda etapa hay más de un equilibrio de Nash, se juega el más favorable para ambos jugadores.

7.6 Considere el siguiente juego en forma estratégica

		Jugador 2		
		A	B	C
Jugador 1	A	0, 0	7, −2	3, −1
	B	−2, 7	5, 5	0, 6
	C	−1, 3	6, 0	3, 3

a) Halle el/los equilibrios de Nash del juego en estrategias puras.

b) Suponga que el juego se repite 4 períodos. En cada uno de esos períodos, los jugadores eligen simultáneamente entre las acciones A, B o C. Al final de cada período, observan la elección de su rival, de manera que eligen en el siguiente período conociendo lo que su rival hizo en todos los períodos anteriores. Los pagos del juego son la suma de los pagos en cada uno de los períodos (el factor de descuento es igual a 1).

Suponga también que cada jugador sigue la siguiente estrategia: «En $t = 1$, elegiré B. Si tanto yo como mi rival elegimos B en todos los períodos anteriores, elegiré B en $t = 2$ y $t = 3$, y elegiré C en $t = 4$. En caso contrario, elegiré A en todos los períodos».

Determine si las estrategias propuestas son un equilibrio de Nash del juego repetido 4 períodos.

c) Suponga ahora que cada jugador sigue la siguiente estrategia: «Elegiré A en todo t, haga lo que haga mi rival».

Determine si las estrategias propuestas son un equilibrio de Nash del juego repetido 4 períodos.

7.7 Considere el siguiente juego en forma estratégica:

		Jugador 2	
		P	H
Jugador 1	P	3, 3	0, 6
	H	6, 0	1, 1

a) Suponga que el juego se repite infinitos períodos. Proponga un perfil de estrategias que permita mantener la cooperación en cada período, (P, P), como resultado de un equilibrio de Nash. Determine los valores del factor de descuento δ para los que las estrategias propuestas son un equilibrio de Nash.

b) Suponga que en el juego repetido infinitos períodos, cada jugador sigue la siguiente estrategia: comienza eligiendo P, y lo sigue haciendo mientras que el otro jugador también elija P; pero si su rival elige H, elegirá H durante 2 períodos, y a continuación elegirá P; mantendrá este comportamiento a lo largo del juego (es decir, que elegirá P mientras que el otro lo haga, y si su rival se desvía «lo castigará» durante dos períodos y luego volverá a elegir P). Determine para qué valores del factor de descuento σ las estrategias propuestas son un equilibrio de Nash.

c) Suponga que el juego se repite 5 períodos. Considere las estrategias propuestas en el apartado anterior, «adaptadas» al juego repetido 5 períodos. Es decir, que si su rival se desvía de P en $t = 5$ no hay castigo, y si lo hace en $t = 4$, el castigo sólo dura un período. ¿Son las estrategias propuestas un equilibrio de Nash?

7.8 Considere el siguiente juego en forma estratégica:

		Jugador 2	
		t_1	t_2
Jugador 1	s_1	2, 2	−1, 4
	s_2	4, −1	0, 0

Suponga que el juego se repite infinitos períodos.

a) Proponga estrategias para ambos jugadores que les permitan mantener beneficios de 2 durante cada período, como resultado de un equilibrio de Nash del juego repetido, y determine para qué valores del factor de descuento se mantienen. Defina formalmente las estrategias.

b) Determine si las estrategias propuestas son un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Razone su respuesta.

c) Suponga que el juego se repite un número finito y conocido de veces. ¿Es posible mantener beneficios de 2 en cada período como resultado de un equilibrio de Nash del juego repetido? Justifique su respuesta.

7.9 Cada una de las empresas 1 y 2 tiene dos oportunidades de mercado A y B. Si ambas se aprovechan de la oportunidad de mercado A, obtienen una ganancia de 3 cada una de ellas. Sin embargo, si cualquiera de ellas abandona la oportunidad A y aprovecha la B obtiene una ganancia de 4, teniendo una ganancia de la que se queda en A. Finalmente, en la oportunidad de mercado B sólo hay sitio para una empresa; si ambas empresas entran en B, ambas obtienen 0. Supongamos que el juego se repite infinitas veces. Calcule el valor de la tasa de descuento a partir de la cual se pueden obtener los pagos (3,3) en cada repetición, definiendo formalmente las estrategias que hacen posible obtener tal equilibrio.

7.10 Considere el siguiente modelo de Bertrand discreto. Dos empresas idénticas E_1 y E_2 compiten en precios, ambas con costes marginales constantes e idénticos $c = 2$ y sin costes fijos. La demanda de mercado para el bien que producen viene dada por: $Q(p) = 12 - 2p$, y los precios de mercado están regulados por ley, siendo $p_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \forall i = 1, 2$. Por tratarse de un producto homogéneo, los consumidores lo comprarán de aquella que lo venda al precio más bajo, y si las dos empresas ofrecen el mismo precio la demanda se distribuye en partes iguales.

Suponga que la economía dura un total de $T = 2$ períodos, y que las empresas tienen un factor de descuento $\delta = 1$:

a) Determine algún perfil de estrategias que sea ENPS y permita a las empresas poner un precio igual a 4 en la primera etapa, $(p_{1,1}, p_{2,1}) = (4, 4)$. ¿Existe algún perfil ENPS que consiga $(p_{1,1}, p_{2,1}) = (5, 5)$?

b) Suponga que los costes marginales de las empresas son diferentes, de tal manera que $c_1 = 1$ y $c_2 = 2$. ¿Existe algún ENPS que permita a la empresa E_2 conseguir una ganancia total mayor que 0? ¿Y mayor que 4?

c) Considere que el juego se repite infinitamente y que $\delta < 1$. Determine el mínimo valor de δ que permita una estrategia del disparador que jugada conjuntamente por ambas empresas sea ENPS y obtenga una ganancia media de 4 a cada una de ellas.

7.11 Considere un oligopolio de Bertrand con n empresas idénticas, que compiten en precios, todas ellas con costes marginales constantes e iguales a $c > 0$, y sin costes fijos. La demanda de mercado para el bien que producen viene dada por:

$$q_i(p) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \exists\, p_j \text{ tal que } p_i > p_j \\ q(p_i) & \text{si} \quad \forall\, p_j, \text{ es } p_i < p_j \\ \dfrac{q(p_i)}{k} & \text{si} \quad \forall\, p_j, \text{ es } p_i \leqslant p_j, \text{ y para } k \text{ empresas } p_i = p_h \end{cases}$$

donde $q(p_i) = a - bp_i$, $a, b > 0$, $a > c$, y $p_i \in R_+$, $\forall\, i$.

Suponga que la economía dura T períodos, $T < \infty$, y que las empresas aplican un factor de descuento δ, $0 < \delta < 1$ para obtener el valor presente de sus beneficios:

a) Determine el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos razonando la respuesta.

Suponga ahora que la economía dura un número infinito de períodos:

b) Proporcione un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos en que todas las empresas tienen beneficios nulos.

c) ¿Sería posible que las empresas obtuviesen beneficios positivos como resultado de un equilibrio de Nash perfecto? Si es así, describa rigurosamente las estrategias y halle los valores de δ para los que dichas estrategias constituyen un equilibrio de Bertrand.

7.12 Considere el modelo de duopolio de Bertrand con dos empresas y productos diferenciados desarrollado en la Sección 2.6 del Capítulo 2, en el que ambas empresas deben determinar un precio p_1 y p_2 que pertenece al intervalo $[0, \infty)$, donde las funciones de demanda de ambos productos dependen del vector de precios (p_1, p_2) del siguiente modo:

$$q_1(p_1, p_2) = a - p_1 + bp_2 \quad \text{y} \quad q_2(p_1, p_2) = a - p_2 + bp_1$$

y las funciones de costes son $C_1(q_1) = cq_1$ y $C_2(q_2) = cq_2$, tal que $0 < c < a$ y $0 < b < 2$.

Suponiendo que el juego se repite un número infinito de veces, determine el valor del factor de descuento δ que permite a las empresas mantener el precio de monopolio a través de la estrategia del disparador.

7.13 Considere el siguiente juego repetido $T = 2$ veces y con factor de descuento $\delta = 1$:

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	3, 1	2, 0	3, 2
	M	6, x	3, 8	1, 2
	B	2, 2	4, 5	1, 1

Suponiendo $x < 8$, determine para qué valores de x es posible encontrar un perfil de estrategias puras que sea ENPS y permita a J1 obtener una ganancia de 6 en la primera etapa.

7.14 Considere el siguiente juego de etapa G con dos jugadores:

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	7, 3	2, 4	2, 4
	M	3, 2	0, 3	2, 2
	B	1, 1	1, 0	3, 2

Suponiendo que el juego G se repite $T = 2$ veces y que los jugadores tienen un factor de descuento $\delta = 1$, determine un perfil de estrategias ENPS en el que la estrategia de J1 conlleve una amenaza creíble que le permita conseguir un flujo total de pagos mayor o igual que 9. ¿Ocurriría lo mismo si el pago de J2 en el perfil (A, C) del juego G pasa de 4 a 6?

CAPÍTULO 8

Juegos cooperativos

Este capítulo trata sobre juegos cooperativos, que ya fueron introducidos en el Capítulo 1. Se trata de estudiar cómo pueden actuar grupos de jugadores, sin detenernos en la acciones individuales de los mismos. El problema fundamental que vamos a estudiar es el de cómo puede hacerse una distribución de pagos entre los jugadores que forman una coalición y han obtenido una ganancia actuando coordinadamente, de manera cooperativa. Para resolver dicho problema, y al igual que en el caso de los juegos no cooperativos, se han propuesto diversos conceptos de solución. En este capítulo se estudian tres de ellos: el core, el *nucleolus* y el valor de Shapley.

8.1. INTRODUCCIÓN

En el Capítulo 1 del libro ya hicimos una breve introducción a los juegos cooperativos, definiendo la forma coalicional o forma función característica de un juego con utilidades transferibles y presentando tres ejemplos.

Como se decía en el Capítulo 1, en los juegos cooperativos se parte de que es posible que algunos jugadores puedan llegar a acuerdos vinculantes (a los que quedarían obligados de manera ineludible), por lo que se trata de estudiar los resultados que puede obtener cada una de las coaliciones de jugadores que se pueda formar. Se trata, por tanto de estudiar cómo pueden actuar grupos de jugadores, interesándonos los comportamientos colectivos y sin que haga falta detenerse en las acciones individuales de cada uno de los miembros de una coalición.

A continuación, tras recordar la definición de juego en forma coalicional (o juego en forma de función característica), se introducen otras definiciones que se van a utilizar a lo largo del capítulo.

Definición 8.1

Un juego en forma coalicional o en forma de función característica con utilidades transferibles consiste en:

- Un conjunto finito de jugadores $J = \{1, 2, ..., n\}$.
- Una función característica, que asocia a cada subconjunto S de J (o coalición) un número real $v(S)$ (valor de la coalición), siendo $v(\emptyset) = 0$.

Por tanto, $G = (J, v)$ es un juego en forma coalicional o en forma función característica con utilidades transferibles si J y v están especificados.

Si al crecer el número de jugadores que forman una coalición se cumple que el beneficio o ganancia que obtiene la coalición no disminuye estamos ante un juego cooperativo monótono, tal como se define formalmente a continuación.

Definición 8.2

Se dice que un juego $G = (J, v)$ es **monótono** si $\forall\, S, T \subset J$, con $S \subset T$, se verifica que

$$v(S) \leqslant v(T)$$

A simple vista se comprueba que los tres ejemplos de juegos cooperativos introducidos en el Capítulo 1 (Ejemplos 1.22, 1.23 y 1.24) son juegos monótonos.

A continuación se define el concepto de juego superaditivo, en el cual cuando dos coaliciones con intersección vacía se unen el beneficio o ganancia de la nueva coalición es al menos igual a la suma de los beneficios de las coaliciones que se unen.

Definición 8.3

Se dice que un juego $G = (J, v)$ es **superaditivo** si $\forall\, S, T \subset J$, con $S \cap T = \emptyset$, se verifica que

$$v(S) + v(T) \leqslant v(S \cup T)$$

Si la desigualdad de la definición anterior se da en sentido opuesto se dice que el juego es subaditivo.

Así, en el caso de tres jugadores la superaditividad se concreta en la verificación de las siguientes desigualdades:

$$v(\{1\}) + v(\{2\}) \leqslant v(\{1, 2\}),\ v(\{1\}) + v(\{3\}) \leqslant v(\{1, 3\}),$$

$$v(\{2\}) + v(\{3\}) \leqslant v(\{2, 3\}),\ v(\{1\}) + v(\{2, 3\}) \leqslant v(\{1, 2, 3\}),$$

$$v(\{2\}) + v(\{1, 3\}) \leqslant v(\{1, 2, 3\}),\ v(\{3\}) + v(\{1, 2\}) \leqslant v(\{1, 2, 3\})$$

Se comprueba inmediatamente que esas desigualdades se cumplen para cada uno de los juegos que se presentan en los Ejemplos 1.22, 1.23 y 1.24, por lo que dichos juegos son superaditivos.

A continuación se introduce una propiedad más fuerte que la anterior. Si dos coaliciones (con intersección no necesariamente vacía) se unen, entonces la suma de los beneficios de la unión e intersección es al menos igual a la suma de beneficios de las coaliciones que se unen.

Definición 8.4

Se dice que un juego $G = (J, v)$ es **convexo** si $\forall\, S, T \subset J$, se verifica que

$$v(S) + v(T) \leqslant v(S \cup T) + v(S \cap T)$$

Si la desigualdad de la definición anterior se da en sentido opuesto se dice que el juego es cóncavo.

Ejemplo 8.1

El juego de las tres empresas del Ejemplo 1.22 es convexo, ya que para cualquier par de coaliciones que se tomen se cumple la desigualdad de la definición. Así por ejemplo:

$$v(\{1, 2\}) + v(\{1, 3\}) = 192 + 192 = 384 < v(\{1, 2, 3\}) + v(\{1\}) = 360 + 72 = 432$$

$$v(\{1, 2\}) + v(\{2, 3\}) = 192 + 144 = 336 < v(\{1, 2, 3\}) + v(\{2\}) = 360 + 36 = 396$$

El juego del Ejemplo 1.23 también es convexo.
El juego del Ejemplo 1.24 no es convexo ya que

$$v(\{1, 3\}) + v(\{2, 3\}) = 1 + 1 = 2 > v(\{1, 2, 3\}) + v(\{3\}) = 1 + 0 = 1$$

A continuación se definen los conceptos de juego 0-normalizado y de juego (0,1)-normalizado.

Definición 8.5

Se dice que un juego $G = (J, v)$ es **0-normalizado** si se verifica que

$$v(\{i\}) = 0,\ \forall\, i \in J$$

El juego del Ejemplo 1.22 no es 0-normalizado; en cambio los juegos de los Ejemplos 1.23 y 1.24 sí lo son.

Se puede obtener la 0-normalización de un juego, definiendo la siguiente función característica:

$$v_0(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(\{i\}),\ \forall\, S \subset J$$

Definición 8.6

Se dice que un juego $G = (J, v)$ es **(0, 1)-normalizado** si se verifica que

$$v(\{i\}) = 0, \forall\, i \in J \quad \text{y} \quad v(J) = 1$$

El juego de Shapley del Ejemplo 1.24 es (0,1)-normalizado.

A continuación se definen algunas operaciones básicas en juegos cooperativos.

Definición 8.7

Sean (J, v) y (J, w) dos juegos cooperativos, con $J = \{1, 2, ..., n\}$. Sea $\lambda \in R$. Se define:

$$(v + w)(S) = v(S) + w(S), \forall\, S \subset J$$

$$(\lambda v)(S) = \lambda[v(S)], \forall\, S \subset J$$

$$(v \cdot w)(S) = v(S)w(S), \forall\, S \subset J$$

Se comprueba fácilmente que el conjunto de juegos cooperativos con n jugadores, sobre el cuerpo de los números reales, con las operaciones definidas de suma y de producto por un escalar, tiene estructura de espacio vectorial de dimensión $2^n - 1$.

8.2. EJEMPLOS DE JUEGOS COOPERATIVOS

En esta sección vamos a presentar varios ejemplos de juegos cooperativos. Para cada uno de ellos se calcula la función característica. Estos ejemplos se utilizarán en los apartados posteriores para ilustrar los diferentes conceptos que se van a ir presentando.

Ejemplo 8.2

Una finca rústica está valorada por su actual propietario en 350.000 euros. Un empresario le ofrece acondicionarla para su utilización como polígono industrial, con lo que su valor de mercado alcanzaría los 700.000 euros. Una empresa constructora le ofrece urbanizar la finca para su posible subdivisión en parcelas destinadas a viviendas unifamiliares. Con esta urbanización el valor de la finca sería de 775.000 euros.

Representemos el juego en forma coalicional (también llamada representación en forma de función característica).

Sea

$$J = \{1, 2, 3\}$$

en donde el jugador 1 es el empresario que ofrece acondicionar la finca como polígono industrial, la jugadora 2 es la empresa constructora y el jugador 3 es el propietario actual de la finca.

Obtengamos ahora la función característica para este juego cooperativo.

Tanto el jugador 1 como la jugadora 2 necesitan el acuerdo con el jugador 3 (el propietario) para poder utilizar la finca. Sin la participación del jugador 3 no se puede hacer nada y, por tanto, no se puede obtener ningún beneficio. Por consiguiente, se tiene que

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{1, 2\}) = 0$$

Si el jugador 3 no coopera con ninguno de los otros dos jugadores mantiene la situación actual, es decir mantiene la finca tal como está, a la cual valora en 350.000 euros. Si llega a un acuerdo sólo con el jugador 1 para obtener el mayor valor posible, obtendrán entre los dos 700.000 euros. Si llega a un acuerdo exclusivamente con la jugadora 2 para obtener el mayor valor posible obtendrán entre los dos 775.000 euros. Finalmente si cooperan los tres jugadores y deciden llevar conjuntamente adelante el proyecto que dé mayor valor de mercado, obtendrán entre los tres 775.000 euros. Es decir,

$$v(\{3\}) = 350,\ v(\{1, 3\}) = 700,\ v(\{2, 3\}) = 775,\ v(\{1, 2, 3\}) = 775$$

en donde los valores de la función característica vienen expresados en miles de euros.

Por tanto, la representación del juego en forma coalicional es (J, v) en donde

$$J = \{1, 2, 3\}$$

$$v\colon P(J) \to R, \text{ con}$$

$$v(\varnothing) = 0,\ v(\{1\}) = 0,\ v(\{2\}) = 0,\ v(\{3\}) = 350,$$

$$v(\{1, 2\}) = 0,\ v(\{1, 3\}) = 700,\ v(\{2, 3\}) = 775,\ v(\{1, 2, 3\}) = 775$$

en donde los valores de la función característica vienen expresados en miles de euros.

Ejemplo 8.3

Marta, Antonio y Luisa han estado participando en un programa musical en televisión durante varios meses, habiendo obtenido buena aceptación entre el público. La empresa Global Music les ofrece un contrato en exclusiva por un año para promocionarlos como trío, con una cantidad de A euros (conjuntamente para los tres). La empresa Dynamic Music ofrece un contrato en exclusiva por un año para promocionar como dúo a cualquier par de cantantes que acepte entre los tres citados, con una cantidad de B euros (para el dúo que pueda formarse). Se cumple que $0 \leqslant B \leqslant A$. Ninguno de los cantantes recibe oferta de promoción como solista.

La representación del juego en forma coalicional es:

$$J = \{1, 2, 3\}$$

siendo Marta la jugadora 1, Antonio el jugador 2 y Luisa la jugadora 3.

La función característica es

$$v\colon P(J) \to R, \text{ con}$$

$$v(\varnothing) = 0,\ v(\{1\}) = 0,\ v(\{2\}) = 0,\ v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{1, 2\}) = B,\ v(\{1, 3\}) = B,\ v(\{2, 3\}) = B,\ v(\{1, 2, 3\}) = A$$

Ejemplo 8.4

Un juego de patentes (Rafels et al. *1999, pág. 66).*

Dos centros de investigación, que designaremos como jugadores 1 y 2 respectivamente, han obtenido de manera independiente fórmulas muy parecidas de un nuevo fármaco para aliviar la jaqueca. El centro 1 ha patentado y homologado su fórmula para el conjunto de los países asiáticos y países de la Unión Europea. El centro 2 tiene homologada su patente para los países asiáticos y para Estados Unidos.

La comercialización de uno de los fármacos produciría unos beneficios de 7 billones de dólares en el mercado asiático, de 3 billones en el europeo y de 3 billones en Estados Unidos. Si se comercializan a la vez los dos fármacos en un mismo mercado, los beneficios se repartirían a partes iguales.

Por otra parte, supongamos que hay dos empresas, jugadoras 3 y 4, que tienen los factores y la tecnología necesarios para la fabricación de los fármacos, pero que cada una de ellas tiene una limitación en la producción ya que sólo puede abastecer al mercado asiático y a uno de los otros mercados (europeo o americano).

La posesión de la fórmula magistral o de los medios de producción, por separado, no aporta valor. Cualquiera de las dos empresas puede fabricar y comercializar cualquiera de los dos fármacos pero cada uno de los centros que posee una de las fórmulas sólo puede conceder su licencia a una de las empresas, y cada empresa sólo puede obtener una licencia.

La representación del juego en forma coalicional es la siguiente:

$$J = \{1, 2, 3, 4\}$$

en donde los jugadores están especificados en el enunciado.

Obtengamos la función característica: cada coalición en la que no haya al menos un centro de investigación y una empresa no puede obtener ningún beneficio. Por tanto,

$$v(\emptyset) = 0,$$

$$v(\{1\}) = 0,\ v(\{2\}) = 0,\ v(\{3\}) = 0,\ v(\{4\}) = 0,$$

$$v(\{1, 2\}) = 0,\ v(\{3, 4\}) = 0$$

Cuando un solo centro de investigación llega a un acuerdo de cooperación con una sola de las empresas, la coalición que se forma de centro con empresa se garantiza un beneficio de 3,5 (la mitad del beneficio del mercado asiático) más 3 (correspondiente al mercado europeo o al americano). Por tanto,

$$v(\{1, 3\}) = v(\{1, 4\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{2, 4\}) = 6{,}5$$

Cuando cooperan los dos centros de investigación con sólo una de las empresas (cualquiera que sea), alcanzan conjuntamente un beneficio de 7 (mercado asiático) más 3 (uno de los mercados europeo o americano). Por tanto,

$$v(\{1, 2, 3\}) = v(\{1, 2, 4\}) = 10$$

Cuando se forma una coalición formada por las dos empresas y un solo centro de investigación (cualquiera que sea), alcanzan conjuntamente un beneficio de 7 (mercado asiático) más 3 (mercado europeo si el centro 1 está en la coalición, mercado americano si el centro de investigación 2 está en la coalición). Por tanto,

$$v(\{1, 3, 4\}) = v(\{2, 3, 4\}) = 10$$

Por último si deciden trabajar conjuntamente los dos centros de investigación y las dos empresas, alcanzarán conjuntamente un beneficio de 7 (mercado asiático) más 3 (mercado europeo) más 3 (mercado americano). Es decir,

$$v(\{1, 2, 3, 4\}) = 13$$

Por tanto, la representación del juego en forma coalicional es:

$$J = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$v\colon P(J) \to R, \text{ con}$$
$$v(\varnothing) = 0,$$
$$v(\{1\}) = 0,\ v(\{2\}) = 0,\ v(\{3\}) = 0,\ v(\{4\}) = 0,$$
$$v(\{1, 2\}) = 0,\ v(\{1, 3\}) = 6{,}5,\ v(\{1, 4\}) = 6{,}5,\ v(\{2, 3\}) = 6{,}5,\ v(\{2, 4\}) = 6{,}5,$$
$$v(\{3, 4\}) = 0,\ v(\{1, 2, 3\}) = 10,\ v(\{1, 2, 4\}) = 10,\ v(\{1, 3, 4\}) = 10,$$
$$v(\{2, 3, 4\}) = 10,\ v(\{1, 2, 3, 4\}) = 13$$

Ejemplo 8.5

En un departamento universitario hay tres investigadores consolidados que trabajan en la misma línea de investigación. Se disponen a presentar solicitudes para optar a financiación de proyectos de investigación. Han preguntado a una persona de confianza que tiene toda la información sobre los criterios y candidatos y les ha comentado lo que es previsible que ocurra con la resolución acerca de las posibles solicitudes, a la vista del historial y méritos de los candidatos.

Si el doctor Clapés presenta de manera individual la solicitud, lo previsible es que le concedan treinta mil euros, el doctor Salmerón no conseguirá nada si va solo, mientras que la doctora Smith conseguiría individualmente cincuenta mil euros. Si los doctores Clapés y Salmerón presentan un proyecto conjunto obtendrán una financiación de 50, Clapés y Smith obtendrían 80 y Salmerón y Smith obtendrían también 80 (siempre en miles de euros). Si los tres investigadores solicitan el proyecto de manera conjunta, previsiblemente obtendrían 100 (en miles de euros). Cada investigador sólo puede figurar en una solicitud.

La representación del juego en forma coalicional es inmediata en este caso:

$$J = \{1, 2, 3\}$$

en donde el jugador 1 es el doctor Clapés, el jugador 2 es el doctor Salmerón y la jugadora 3 es la doctora Smith.

La función característica es la función

$$v \colon P(J) \to R, \text{ con}$$

$$v(\varnothing) = 0,$$

$$v(\{1\}) = 30,\ v(\{2\}) = 0,\ v(\{3\}) = 50,$$

$$v(\{1, 2\}) = 50,\ v(\{1, 3\}) = 80,\ v(\{2, 3\}) = 80,$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 100$$

Ejemplo 8.6

Eichberger, 1993, pág. 270.

Tres comunidades cercanas a una gran ciudad consideran la posibilidad de desarrollar un sistema de tratamiento de aguas residuales. En este momento dichas comunidades mandan sus aguas residuales a una planta de tratamiento situada en la gran ciudad, pagando por ello a las autoridades de la ciudad una tarifa mensual.

Un estudio realizado mediante la técnica de análisis coste-beneficio estima el valor presente de estos pagos a lo largo del tiempo de vida habitual de una planta de tratamiento en 100 dólares por familia. Para construir y mantener una planta propia de tratamiento de aguas residuales para el mismo período se ha estimado el valor presente del coste en función del *NFI* (número de familias implicadas), habiéndose obtenido igual a:

$$500.000, \text{ si } 0 \leqslant NFI \leqslant 5.000,$$

$$600.000, \text{ si } 5.000 < NFI \leqslant 10.000,$$

$$700.000, \text{ si } 10.000 < NFI \leqslant 15.000$$

La comunidad 1 se estima que sirve de media a 5.000 familias durante el período sujeto a estudio. Análogamente la comunidad 2 sirve a 3.000 familias y la comunidad 3 a 4.000.

Representemos el juego en forma coalicional:

$$J = \{1, 2, 3\}$$

en donde la jugadora 1 es la comunidad 1, la jugadora 2 es la comunidad 2 y la jugadora 3 es la comunidad 3.

Obtengamos a continuación la función característica.

Supongamos en primer lugar que la comunidad 1 va sola, sin formar coalición con ninguna otra comunidad. Como esta comunidad está formada por 5.000 familias, el valor presente de los pagos que están realizando (contando el período de tiempo de vida habitual de una planta de tratamiento) será de 5.000 (nº de familias) por 100 (pago por familia), igual a 500.000. Si se deciden a construir (y mantener) una planta propia, el valor presente del coste es igual a 500.000 dólares, por tratarse de 5.000 familias. A la comunidad 1 le cuesta lo mismo seguir como está que construir una planta propia, por lo que no gana nada construyendo una nueva planta y el valor de la coalición formada exclusivamente por la comunidad 1 es igual a cero.

Si es la comunidad 2 la que va sola necesitaría 500.000 dólares para construir y mantener una planta propia, mientras que actualmente soporta un coste de 3.000 (nº de familias) por 100 (pago por familia) igual a 300.000. Por tanto le conviene seguir como está y eso supone que el valor de la coalición formada exclusivamente por la comunidad 2 es igual a cero (mantiene el *statu quo* y eso supone una ganancia de cero con respecto a la situación actual). Análogamente, la comunidad 3 soporta actualmente un coste de 400.000, mientras que si tuviera que construir y mantener una planta propia tendría un coste de 500.000. Le conviene seguir como está y el valor que toma la función característica es también igual a cero: Es decir,

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

Consideremos ahora la coalición formada por las comunidades 1 y 2. Ello supone que hay 8.000 familias implicadas. Actualmente soportan un coste de 8.000 multiplicado por 100, igual a 800.000. Si construyen una planta propia que sirva a las 8.000 familias implicadas tendrán un coste de 600.000. Por tanto, les convendrá construir la nueva planta lo cual les supone una ganancia de 2 (en cientos de miles de dólares). Razonando de manera análoga para las otras dos coaliciones posibles formadas por dos comunidades obtenemos:

$$v(\{1, 2\}) = 2,\ v(\{1, 3\}) = 3,\ v(\{2, 3\}) = 1$$

Por último, si las tres comunidades deciden trabajar conjuntamente y formar una coalición hay 12.000 familias implicadas. Actualmente soportan un coste de 1.200.000 dólares, mientras que si construyen una nueva planta conjuntamente tendrán un coste de 700.000 dólares. Por tanto, les conviene construir la nueva planta y eso les supone una ganancia de 5 (en cientos de miles de dólares). Por tanto,

$$v(\{1, 2, 3\}) = 5$$

Así, el juego es

$$J = \{1, 2, 3\}$$

$$v\colon P(J) \to R, \text{ con}$$

$$v(\varnothing) = 0,$$

$$v(\{1\}) = 0,\ v(\{2\}) = 0,\ v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{1, 2\}) = 2,\ v(\{1, 3\}) = 3,\ v(\{2, 3\}) = 1,$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 5$$

Ejemplo 8.7

El juego de la bancarrota.

El planteamiento de una situación de bancarrota como un juego cooperativo se debe inicialmente a O'Neill (1982). En el desarrollo que se hace a continuación se sigue el tratamiento estándar de este juego en la literatura.

Supongamos que una empresa en situación de quiebra ha dejado un patrimonio que se valora en E unidades monetarias, y ha dejado también unas deudas de $d_1, d_2, ..., d_n$ a los acreedores 1, 2, ..., n respectivamente, de manera que se cumple:

$$0 < E \leqslant \sum_{i=1}^{n} d_i$$

Se define el siguiente conjunto de jugadores

$$J = \{1, 2, ..., n\}$$

Cualquier coalición $S \subset J$ puede quedarse con el patrimonio de la empresa pagando las deudas a los acreedores que no forman parte de la coalición. Por tanto,

$$\forall S \in P(J),\ v(S) = \max \left\{0,\ E - \sum_{i \in J-S} d_i\right\}$$

Obsérvese que

$$v(\varnothing) = \max \left\{0,\ E - \sum_{i \in J} d_i\right\} = 0$$

Por ejemplo, si $E = 650$, $d_1 = 200$, $d_2 = 150$, $d_3 = 350$ y $d_4 = 250$, el juego de la bancarrota correspondiente es:

$$J = \{1, 2, 3, 4\}$$

La función característica viene definida por las expresiones siguientes:

$$v(\varnothing) = 0,$$

$$v(\{1\}) = \max\{0,\ 650 - (150 + 350 + 250)\} = \max\{0,\ -100\} = 0$$

$$v(\{2\}) = \max\{0,\ 650 - (200 + 350 + 250)\} = \max\{0,\ -150\} = 0$$

$$v(\{3\}) = \max\{0,\ 650 - (200 + 150 + 250)\} = \max\{0,\ 50\} = 50$$

$$v(\{4\}) = \max\{0,\ 650 - (200 + 150 + 350)\} = \max\{0,\ -50\} = 0$$

$$v(\{1, 2\}) = \max\{0,\ 650 - (350 + 250)\} = \max\{0,\ 50\} = 50$$

Procediendo de manera análoga se obtiene:

$$v(\{1, 3\}) = 250,\ v(\{1, 4\}) = 150,\ v(\{2, 3\}) = 200,\ v(\{2, 4\}) = 100,\ v(\{3, 4\}) = 300,$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 400,\ v(\{1, 2, 4\}) = 300,\ v(\{1, 3, 4\}) = 500,\ v(\{2, 3, 4\}) = 450,$$

$$v(\{1, 2, 3, 4\}) = 650$$

8.3. EL CONJUNTO DE IMPUTACIONES

Sea $G = (J, v)$ un juego en su forma función característica (también llamada forma coalicional), en donde $J = \{1, 2, ..., n\}$ es el conjunto de jugadores y v es la función característica. Si en un juego los jugadores deciden trabajar conjuntamente, es decir cooperar, el problema que se presenta consiste en cómo repartir el valor $v(J)$ entre los n jugadores.

Sea $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ un vector de distribución de pagos, en donde para cada $i = 1, 2, ..., n$, x_i representa el pago que recibe el jugador i. Para cualquier coalición $S \subset J$, se utilizará la siguiente notación:

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i$$

Por tanto,

$$x(J) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Además se define

$$x(\varnothing) = 0$$

Definición 8.8

El conjunto de **preimputaciones** de un juego $G = (J, v)$ es el siguiente conjunto de vectores de distribución de pagos:

$$PI(J, v) = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : x(J) = v(J)\}$$

La condición que cumplen los vectores de distribución de pagos que pertenecen al conjunto de preimputaciones del juego según la cual la suma de los pagos que reciben los jugadores sea igual al valor de la coalición total, recibe el nombre de principio de eficiencia.

Representación gráfica: si $n = 3$, el conjunto de preimputaciones es un plano en el espacio de tres dimensiones que corta a los ejes en los puntos $(v(J), 0, 0)$, $(0, v(J), 0)$ y $(0, 0, v(J))$.

Ejemplo 8.8

Se considera el siguiente juego con tres jugadores:

$$v(\varnothing) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$
$$v(\{1, 2\}) = 2,\ v(\{1, 3\}) = 3,\ v(\{2, 3\}) = 2,\ v(\{1, 2, 3\}) = 5$$

Se tiene que

$$PI(J, v) = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 5\}$$

La Figura 8.1 recoge la representación gráfica del conjunto de preimputaciones. Se trata de un plano, que corta a los ejes en los puntos (5, 0, 0), (0, 5, 0) y (0, 0, 5).

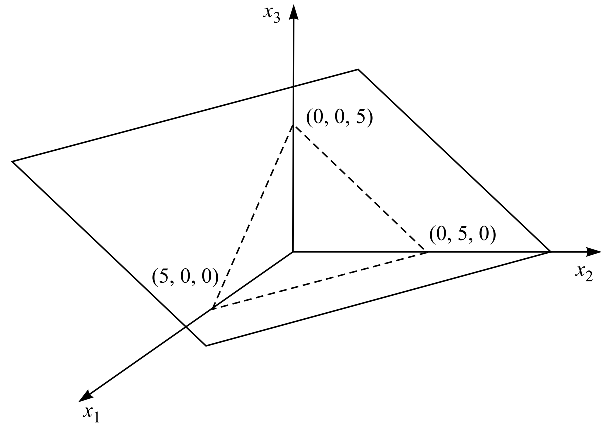


Figura 8.1 Representación gráfica del conjunto de preimputaciones.

Cabe pensar que ningún jugador aceptará un pago inferior al que obtendría por sí mismo sin participar en ninguna coalición. Surge entonces el concepto que se define a continuación.

Definición 8.9

El conjunto de **imputaciones** de un juego $G = (J, v)$ es el siguiente conjunto de vectores de pagos:

$$I(J, v) = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in PI(J, v): x_i \geqslant v(\{i\}), \text{ para } i = 1, 2, ..., n\} =$$
$$= \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n: x(J) = v(J), x_i \geqslant v(\{i\}), \text{ para } i = 1, 2, ..., n\}$$

La condición de que para cada jugador i tiene que cumplirse que $x_i \geqslant v(\{i\})$ recibe el nombre de principio de racionalidad individual.

Representación gráfica: si $n = 3$ y se trata de un juego 0-normalizado, el conjunto de imputaciones es la intersección del plano de preimputaciones con el ortante no negativo (es decir, con la región del espacio en que las tres coordenadas son mayores o iguales que cero). Se trata, por tanto, de un triángulo en el espacio de tres dimensiones, cuyos vértices se encuentran en los puntos $(v(J), 0, 0)$, $(0, v(J), 0)$ y $(0, 0, v(J))$.

Ejemplo 8.9

Se considera el juego del Ejemplo 8.8.

Se tiene que

$$I(J, v) = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: x_1 + x_2 + x_3 = 5, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0\}$$

Es un juego 0-normalizado. La Figura 8.2 recoge la representación gráfica del conjunto de imputaciones. Se trata del triángulo de vértices (5, 0, 0), (0, 5, 0) y (0, 0, 5) en el espacio de tres dimensiones.

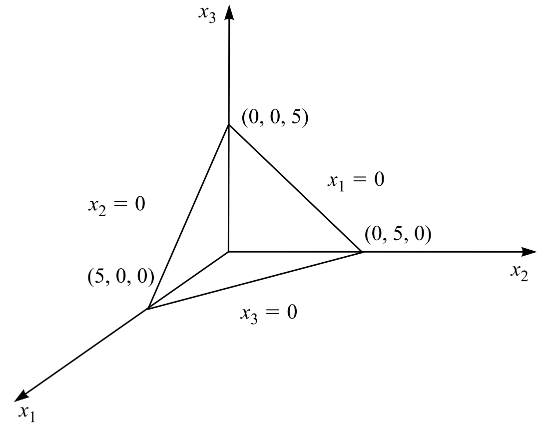


Figura 8.2 Representación gráfica del conjunto de imputaciones.

Normalmente, en el caso de tres jugadores, se acostumbra a representar el conjunto de imputaciones directamente en el plano. Así, para el juego del Ejemplo 8.9 se acostumbra a representar el conjunto de imputaciones directamente en el plano, tal como aparece en la Figura 8.3.

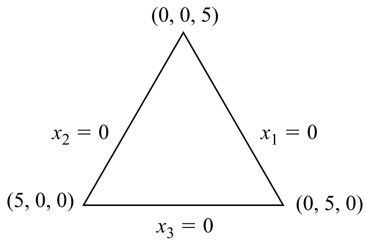


Figura 8.3 Representación gráfica del conjunto de imputaciones, en el plano.

En el siguiente ejemplo se representa gráficamente en el plano el conjunto de imputaciones para un juego que no es 0-normalizado. A través del ejemplo se indica cómo hay que proceder en estos casos.

Ejemplo 8.10

Se considera el siguiente juego con tres jugadores:

$$v(\varnothing) = 0,\ v(\{1\}) = 2,\ v(\{2\}) = 0,\ v(\{3\}) = 1,$$

$$v(\{1, 2\}) = 3,\ v(|1, 3\}) = 3,\ v(\{2, 3\}) = 2,\ v(\{1, 2, 3\}) = 5$$

En este caso se tiene que

$$I(J, v) = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3\colon x_1 + x_2 + x_3 = 5,\ x_1 \geqslant 2,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 1\}$$

Para representar dicho conjunto, partimos de la intersección del plano $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ con el ortante no negativo (es decir con los (x_1, x_2, x_3) tales que $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$) y a continuación añadimos las restricciones $x_1 \geqslant 2$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 1$, tal como aparece en la Figura 8.4.

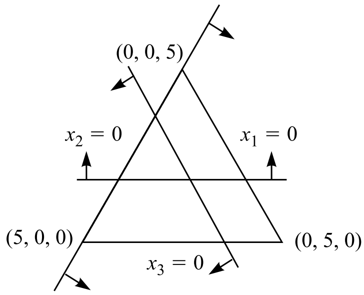


Figura 8.4 Conjunto de imputaciones del juego.

Finalmente queda como aparece en la Figura 8.5.

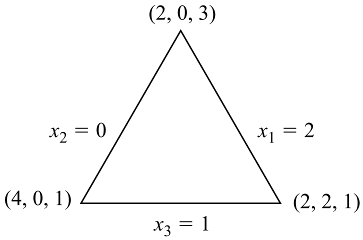


Figura 8.5 Conjunto de imputaciones del juego.

En el caso de 4 jugadores, el conjunto de imputaciones se acostumbra a representar como un tetraedro en el plano, guardando analogía con la representación que se ha visto para tres jugadores. En la Figura 8.6 se representa gráficamente el conjunto de imputaciones correspondiente al juego de patentes del Ejemplo 8.4. Para dicho juego se tiene que

$$I(J, v) = (\{x_1, x_2, x_3, x_4\}) \in R^4\colon x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0\}$$

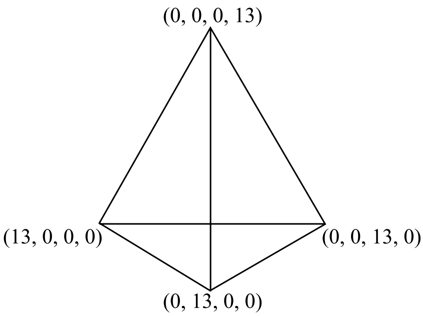


Figura 8.6 Conjunto de imputaciones para 4 jugadores.

La siguiente proposición nos da una condición necesaria y suficiente para que el conjunto de imputaciones de un juego sea no vacío.

Proposición 8.1

Sea $G = (J, v)$ un juego en su forma función característica.

$$I(J, v) \neq \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leqslant v(J)$$

Demostración:

Veamos cada una de las dos implicaciones:

$\Rightarrow$) Supongamos que $I(J, v) \neq \varnothing$. Entonces existe $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in I(J, v)$. Por tanto, verifica que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(J)$$

Entonces debe verificarse que

$$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leqslant v(J)$$

por ser

$$x_i \geqslant v(\{i\}), \text{ lo que implica que } \sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i = v(J)$$

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que

$$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leqslant v(J)$$

Veamos que $I(J, v) \neq \varnothing$. Para ello basta considerar el vector de distribución de pagos

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), \text{ con } x_i = v(\{i\}), \ \forall\, i = 1, 2, ..., n - 1, \ x_n = v(J) - \sum_{i=1}^{n-1} v(\{i\})$$

Como por hipótesis es

$$\sum_{i=1}^{n} v(\{i)\} \leqslant v(J)$$

se verifica que

$$v(\{n\}) \leqslant v(J) - \sum_{i=1}^{n-1} v(\{i\}) = x_n$$

Además,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n = \sum_{i=1}^{n-1} v(\{i\}) + v(J) - \sum_{i=1}^{n-1} v(\{i\}) = v(J)$$

Se trata de una imputación y, por tanto, $I(J, v) \neq \varnothing$.

A un juego cuyo conjunto de imputaciones es no vacío se le llama esencial, tal como se recoge en la siguiente definición.

Definición 8.10

Se dice que el juego $G = (J, v)$ es **esencial** si verifica que $I(J, v) \neq \varnothing$.

8.4. EL *CORE*

El principio de racionalidad individual que se recoge en el conjunto de imputaciones puede extenderse a todas las coaliciones mediante el principio de racionalidad coalicional. Llegamos entonces al concepto de *core* de un juego cooperativo.

Definición. 8.11

El **core** de un juego $G = (J, v)$ es el siguiente conjunto de vectores de pagos:

$$C(J, v) = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n\colon x(J) = v(J),\ x(S) \geqslant v(S), \text{ para todo } S \in P(J)\}$$

A partir de la definición se ve que el core es un subconjunto del conjunto de imputaciones. Se trata de las asignaciones que podrían constituir acuerdos de distribución estables, en el sentido de que ningún grupo de jugadores podría impugnar unilateralmente ninguno de esos acuerdos. En efecto, ningún grupo conseguiría por sí mismo más de lo que cualquiera de esos acuerdos le permite obtener.

En la siguiente proposición se recogen algunas propiedades matemáticas del core.

Proposición 8.2

Sea $G = (J, v)$ un juego cooperativo. El conjunto $C(J, v)$ es cerrado, acotado y convexo.

Demostración:

Veamos que $C(J, v)$ es cerrado. En efecto:

$$C(J, v) = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n\colon \sum_{i=1}^{n} x_i = v(J),\ \sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S), \text{ para todo } S \in P(J)\}$$

Las condiciones que deben cumplir los vectores del core consisten, por tanto, en pertenecer a un hiperplano y pertenecer a un conjunto finito de semiespacios cerrados.

Se trata por tanto de la intersección finita de conjuntos cerrados que es cerrado. De hecho las restricciones que definen al core son de tipo igual, o mayor o igual, lo cual implica que el conjunto sea cerrado.

Veamos ahora que $C(J, v)$ es un conjunto acotado. En efecto:

Sea $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in C(J, v)$. Se cumple que $x_i \geqslant v(\{i\})$, para cada $i = 1, 2, ..., n$. Además,

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{j \neq i} x_j = v(J) - \sum_{j \neq i} x_j \leqslant v(J) - v(J - (\{i\})$$

Por tanto, para cada $i = 1, 2, ..., n$ se verifica que

$$v(\{i\}) \leqslant x_i \leqslant v(J) - v(J - \{i\})$$

y, por tanto el conjunto $C(J, v)$ está acotado.

Finalmente, veamos que el conjunto es convexo. En efecto:

Sean $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in C(J, v)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in C(J, v)$, $\lambda \in [0, 1]$. Veamos que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C(J, v)$. En efecto:
como

$$\begin{aligned} \lambda x + (1 - \lambda)y &= \lambda(x_1, x_2, ..., x_n) + (1 - \lambda)(y_1, y_2, ..., y_n) = \\ &= (\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1, \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2, ..., \lambda x_n + (1 - \lambda)y_n) \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} (\lambda x + (1 - \lambda)y)(J) &= \sum_{i=1}^{n} [\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i] = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{n} y_i = \\ &= \lambda v(J) + (1 - \lambda)v(J) = v(J) \end{aligned}$$

Para cada coalición S:

$$\begin{aligned} (\lambda x + (1 - \lambda)y)(S) &= \sum_{i \in S} [\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i] = \\ &= \lambda \sum_{i \in S} x_i + (1 - \lambda) \sum_{i \in S} y_i \geqslant \lambda v(S) + (1 - \lambda)v(S) = v(S) \end{aligned}$$

Por tanto, $C(J, v)$ es convexo y la proposición queda demostrada.

A continuación vamos a obtener el core para algunos juegos.

Ejemplo 8.11

Se trata de obtener el core del juego de la finca rústica del Ejemplo 8.2.

Pertenecerán al core los puntos (x_1, x_2, x_3) que satisfagan las siguientes restricciones:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 775 \text{ (principio de eficiencia)},$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 350 \text{ (racionalidad individual)},$$

$$x_1 + x_2 \geqslant 0,\ x_1 + x_3 \geqslant 700,\ x_2 + x_3 \geqslant 775$$
(racionalidad para las coaliciones formadas por dos jugadores)

Es decir, los elementos del core son los puntos que pertenecen al conjunto de imputaciones del juego y, además, verifican las restricciones correspondientes a la racionalidad para las coaliciones de dos jugadores.

Teniendo en cuenta la restricción $x_1 + x_2 + x_3 = 775$ (principio de eficiencia), se tiene que

$$x_1 + x_2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 775 - x_3 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 \leqslant 775$$

$$x_1 + x_3 \geqslant 700 \quad \Leftrightarrow \quad 775 - x_2 \geqslant 700 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \leqslant 75$$

$$x_2 + x_3 \geqslant 775 \quad \Leftrightarrow \quad 775 - x_1 \geqslant 775 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \leqslant 0$$

Por tanto,

$$C(J, v) = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: x_1 + x_2 + x_3 = 775, x_1 = 0, 0 \leqslant x_2 \leqslant 75, 350 \leqslant x_3 \leqslant 775\} =$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: x_1 = 0, 0 \leqslant x_2 \leqslant 75, 350 \leqslant 775 - x_2 \leqslant 775, x_3 = 775 - x_2\} =$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: x_1 = 0, 0 \leqslant x_2 \leqslant 75, 0 \leqslant x_2 \leqslant 425, x_3 = 775 - x_2\} =$$

$$= \{(0, x_2, 775 - x_2): 0 \leqslant x_2 \leqslant 75\}$$

Se puede representar gráficamente el core, partiendo del conjunto de imputaciones del juego y añadiendo las restricciones $x_3 \leqslant 775$, $x_2 \leqslant 75$ y $x_1 \leqslant 0$, tal como aparece en la Figura 8.7.

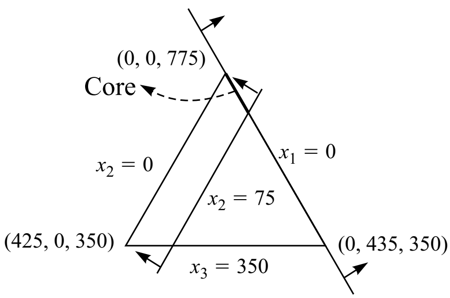


Figura 8.7 Core del juego.

Las distribuciones de pagos (x_1, x_2, x_3) que cumplen el principio de eficiencia y no pertenecen al core son inaceptables para alguna coalición que se pueda formar y consigue mejores resultados de los que obtienen con (x_1, x_2, x_3). Así, por ejemplo:

- (50, 75, 650) no interesaría a la coalición {2, 3}, que puede obtener por sí misma 775, que es mayor que 75 + 650 = 725, cantidad que obtiene con la distribución de pagos (50, 75, 650).
- (0, 100, 675) no interesaría a la coalición {1, 3}, que puede obtener por sí misma 700, que es mayor que 0 + 675 = 675, que obtiene dicha coalición con la distribución de pagos dada.

• $\left(\frac{775}{3}, \frac{775}{3}, \frac{775}{3}\right)$ no interesaría a la coalición {2, 3}, que puede obtener por sí misma 775, que es una cantidad mayor que $\frac{775}{3} + \frac{775}{3}$, cantidad que obtiene dicha coalición con la distribución de pagos dada.

Ejemplo 8.12

Se trata de obtener el core del juego de los cantantes del Ejemplo 8.3. Además, hay que encontrar las condiciones que deben cumplir los valores A y B para que el core sea vacío, unitario, o tenga más de un elemento.

Pertenecerán al core los puntos (x_1, x_2, x_3) que satisfagan las siguientes restricciones:

$$x_1 + x_2 + x_3 = A \text{ (principio de eficiencia)},$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \text{ (racionalidad individual)},$$

$$x_1 + x_2 \geqslant B,\ x_1 + x_3 \geqslant B,\ x_2 + x_3 \geqslant B$$
$$\text{(racionalidad para las coaliciones formadas por dos jugadores)}$$

Como hemos visto en el ejemplo anterior, los elementos del core son los puntos que pertenecen al conjunto de imputaciones del juego y, además, verifican las restricciones correspondientes a la racionalidad para las coaliciones de dos jugadores.

Teniendo en cuenta la restricción $x_1 + x_2 + x_3 = A$ (principio de eficiencia), se tiene que

$$\begin{array}{lllll} x_1 + x_2 \geqslant B & \Leftrightarrow & A - x_3 \geqslant B & \Leftrightarrow & x_3 \leqslant A - B \\ x_1 + x_3 \geqslant B & \Leftrightarrow & A - x_2 \geqslant B & \Leftrightarrow & x_2 \leqslant A - B \\ x_2 + x_3 \geqslant B & \Leftrightarrow & A - x_1 \geqslant B & \Leftrightarrow & x_1 \leqslant A - B \end{array}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} C(J, v) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3\colon x_1 + x_2 + x_3 = A,\ 0 \leqslant x_i \leqslant A - B,\ \forall\, i = 1, 2, 3\} = \\ &= \{(x_1, x_2, A - x_1 - x_2) \in R^3\colon 0 \leqslant x_1 \leqslant A - B,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant A - B,\ B \leqslant x_1 + x_2 \leqslant A\} \end{aligned}$$

A la vista de las expresiones anteriores que definen el core se llega a que:

• Si $(A - B) + (A - B) = B$ (es decir, $2A = 3B$), entonces el core es unitario, obteniéndose que $C(J, v) = \{(A - B, A - B, 2B - A)\}$. La representación gráfica está en la Figura 8.8.

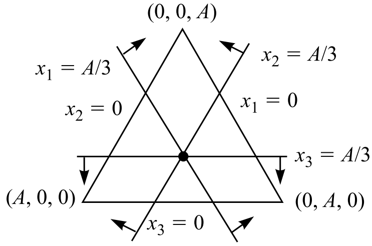


Figura 8.8 El core es unitario si $2A = 3B$.

• Si $(A - B) + (A - B) < B$ (es decir, $2A < 3B$), entonces el core es vacío (Figura 8.9).

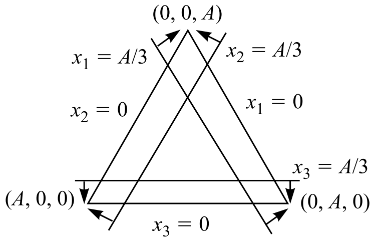


Figura 8.9 El core es vacío si $2A < 3B$.

• Si $(A - B) + (A - B) > B$ (es decir, $2A > 3B$), entonces el core es no vacío, no unitario (Figura 8.10).

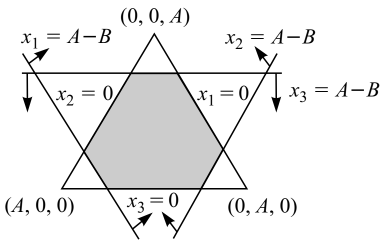


Figura 8.10 El core es no vacío, no unitario, si $2A > 3B$.

Por ejemplo, supongamos que $A = 150$. Entonces, si $B = 100$, el core es unitario, siendo (50, 50, 50) su único punto. Si $B > 100$ el core es vacío, mientras que si $B < 100$, el core es no vacío, no unitario.

Ejemplo 8.13

Ahora vamos a obtener el core del juego de patentes, correspondiente al Ejemplo 8.4.

Se trata de un juego con 4 jugadores. Las restricciones que deben cumplir, en este caso, los elementos del core son las siguientes:

Principio de eficiencia:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$$

Racionalidad individual:

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0$$

Racionalidad de las coaliciones formadas por dos jugadores:

$$x_1 + x_2 \geqslant 0,\ x_1 + x_3 \geqslant 6{,}5,\ x_1 + x_4 \geqslant 6{,}5,$$
$$x_2 + x_3 \geqslant 6{,}5,\ x_2 + x_4 \geqslant 6{,}5,\ x_3 + x_4 \geqslant 0$$

Racionalidad de las coaliciones formadas por tres jugadores:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 10,\ x_1 + x_2 + x_4 \geqslant 10,$$
$$x_1 + x_3 + x_4 \geqslant 10,\ x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 10$$

Utilizando la igualdad del principio de eficiencia en las desigualdades correspondientes a la racionalidad de coaliciones de tres jugadores, queda:

$$\begin{array}{lllll} x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 10 & \Leftrightarrow & 13 - x_4 \geqslant 10 & \Leftrightarrow & x_4 \leqslant 3 \\ x_1 + x_2 + x_4 \geqslant 10 & \Leftrightarrow & 13 - x_3 \geqslant 10 & \Leftrightarrow & x_3 \leqslant 3 \\ x_1 + x_3 + x_4 \geqslant 10 & \Leftrightarrow & 13 - x_2 \geqslant 10 & \Leftrightarrow & x_2 \leqslant 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 10 & \Leftrightarrow & 13 - x_1 \geqslant 10 & \Leftrightarrow & x_1 \leqslant 3 \end{array}$$

Es imposible que $x_1 \leqslant 3$, $x_3 \leqslant 3$ y a la vez $x_1 + x_3 \geqslant 6{,}5$. Por tanto, el core de este juego es el conjunto vacío.

Ahora nos hacemos la siguiente pregunta: ¿existe alguna clase de juegos que tengan el core no vacío? Para responder a esta pregunta se presentan a continuación dos definiciones y un teorema.

Definición 8.12

Una familia $\{S_1, S_2, ..., S_m\}$ de subconjuntos de J, distintos y no vacíos, es **equilibrada** sobre J si existen números positivos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, denominados pesos, tales que para todo $i = 1, 2, ..., n$ verifican:

$$\sum_{\{j:\, i \in S_j\}} \alpha_j = 1$$

Ejemplo 8.14

Sea $J = \{1, 2, 3\}$. Veamos algunas familias equilibradas sobre J.

Sea $\mathcal{B}_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

Tenemos que $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2\}$, $S_3 = \{3\}$.

Se trata de una familia equilibrada sobre J ya que existen $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, verificándose que:

$$\text{Para } i = 1,\ \sum_{\{j:\, 1 \in S_j\}} \alpha_j = \alpha_1 = 1$$

$$\text{Para } i = 2,\ \sum_{\{j:\, 2 \in S_j\}} \alpha_j = \alpha_2 = 1$$

$$\text{Para } i = 3,\ \sum_{\{j:\, 3 \in S_j\}} \alpha_j = \alpha_3 = 1$$

Sea $\mathcal{B}_2 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$.

Entonces $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2, 3\}$.

Se trata de una familia equilibrada sobre J ya que existen $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, verificándose que:

$$\text{Para } i = 1, \sum_{\{j: 1 \in S_j\}} \alpha_j = \alpha_1 = 1$$

$$\text{Para } i = 2, \sum_{\{j: 2 \in S_j\}} \alpha_j = \alpha_2 = 1$$

$$\text{Para } i = 3, \sum_{\{j: 3 \in S_j\}} \alpha_j = \alpha_2 = 1$$

Sea $\mathcal{B}_3 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$.

Tenemos que $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{1, 3\}$, $S_3 = \{2, 3\}$.

Se trata de una familia equilibrada sobre J ya que existen $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/2$, verificándose que:

$$\text{Para } i = 1, \sum_{\{j: 1 \in S_j\}} \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\text{Para } i = 2, \sum_{\{j: 2 \in S_j\}} \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_3 = 1$$

$$\text{Para } i = 3, \sum_{\{j: 3 \in S_j\}} \alpha_j = \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

Sea $\mathcal{B}_4 = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Tenemos que $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{1, 2\}$, $S_3 = \{1, 2, 3\}$. Se comprueba inmediatamente que es una familia equilibrada, con sólo tomar $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$.

Sea $\mathcal{B}_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

En ese caso $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2\}$, $S_3 = \{3\}$, $S_4 = \{1, 2\}$, $S_5 = \{1, 3\}$, $S_6 = \{2, 3\}$, $S_7 = \{1, 2, 3\}$.

Se comprueba inmediatamente que es una familia equilibrada, tomando:

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0, \alpha_6 = 1, \alpha_7 = 0$$

o bien

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0, \alpha_6 = 0, \alpha_7 = 0$$

o bien

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0, \alpha_6 = 0, \alpha_7 = 1$$

entre otras posibilidades.

Ejemplo 8.15

Sea $\{S_1, S_2, ..., S_m\}$ una partición sobre J. Se trata de una familia equilibrada sobre J, lo cual se comprueba inmediatamente al tomar $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 1$.

A continuación se define el concepto de juego equilibrado.

Definición 8.13

Se dice que el juego (J, v) es **equilibrado** si para cualquier familia equilibrada $\{S_i, ..., S_m\}$ sobre J, con pesos $\alpha_1, ..., \alpha_m$, se verifica que

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v(S_j) \leqslant v(J)$$

Teorema 8.1

Un juego (J, v) tiene core no vacío si y sólo si (J, v) es un juego equilibrado.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que (J, v) tiene core no vacío. Veamos que (J, v) es un juego equilibrado. En efecto, por definición de core,

$$C(J, v) \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad \exists\, x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in C(J, v)$$

y por tanto verifica que, para toda coalición S se verifica que

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S)$$

Sea $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ una familia equilibrada sobre J, con pesos asociados $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$.

Dado $x \in C(J, v)$, se tiene que

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v(S_j) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x(S_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left[\sum_{i \in S_j} x_i\right] = \sum_{i \in J} x_i \left[\sum_{\{j: i \in S_j\}} \alpha_j\right] =$$

$$\sum_{i \in J} x_i[1] = \sum_{i \in J} x_i = x(J) = v(J)$$

lo que demuestra que es un juego equilibrado.

$\Leftarrow$) Supongamos que (J, v) es un juego equilibrado. Veamos que dicho juego tiene core no vacío.

Por reducción al absurdo: supongamos que $C(J, v) = \varnothing$. Veamos que en tal caso el juego no es equilibrado, lo cual quiere decir que se puede encontrar una familia equilibrada de coaliciones $\{S_1, S_2, ..., S_m\}$, con pesos respectivos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, tal que

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v(S_j) > v(J)$$

Consideremos los dos conjuntos siguientes:

$$A = \left\{ x \in R^n \colon \sum_{i \in J} x_i = v(J) \right\}$$

$$B = \left\{ x \in R^n \colon \sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S),\ \forall\, S \in P(J), \text{ con } S \neq J \right\}$$

Se verifica que $C(J, v) = A \cap B$. Por tanto,

$$C(J, v) = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = \varnothing$$

El conjunto A es un hiperplano de R^n, mientras que el conjunto B es un subconjunto de R^n cerrado, acotado inferiormente y convexo. Como $A \cap B = \varnothing$, se puede aplicar el teorema del hiperplano separador que asegura que A y B pueden ser separados por un hiperplano, verificándose por tanto que:

$$v(J) = \sum_{i \in J} x_i < \sum_{i \in J} y_i,\ \forall\, x \in A,\ \forall\, y \in B$$

En particular, la desigualdad anterior debe cumplirse para el vector $y^* \in R^n$ que resuelve el siguiente programa matemático:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{i \in J} y_i \\ &\text{s.a. } y \in B \end{aligned}$$

Como el conjunto B es cerrado, acotado inferiormente y convexo, el programa matemático anterior tiene solución óptima global en algún punto en que se dé la igualdad en las restricciones del problema. Por tanto, dicha solución óptima viene caracterizada por las condiciones de Lagrange.

Sea el lagrangiano del programa matemático:

$$\mathscr{L}(y, \lambda) = \sum_{i \in J} y_i + \sum_{S \in P(J) - J} \lambda_S \left[v(S) - \sum_{i \in S} y_i \right]$$

En el óptimo (y^*, λ^*) se verifica:

$$\frac{\partial \mathscr{L}(y^*, \lambda^*)}{\partial y_i} = 0 = 1 - \sum_{S \in S(i)} \lambda_S^*, \text{ en donde } S(i) = \{S \in P(J) \colon i \in S\}$$

$$v(S) - \sum_{i \in S} y_i^* = 0,\ \forall\, S \in P(J) - J$$

Tomando $\lambda_J^* = 0$, a partir de las condiciones de optimalidad se ve que $\{S \in P(J)\colon S \neq \varnothing\}$, con pesos λ_S^*, es una familia equilibrada de coaliciones. Se verifica que

$$\sum_{S \in P(J)} \lambda_S^* v(S) = \sum_{S \in P(J)} \lambda_S^* \left[\sum_{i \in S} y_i^* \right] = \sum_{i \in J} y_i^* \left[\sum_{S \in S(i)} \lambda_S^* \right] = \sum_{i \in J} y_i^* > v(J)$$

por lo que el juego (J, v) no está equilibrado. De esta forma, se llega a una contradicción, lo que prueba la implicación.

Ejemplo 8.16

Juegos de producción lineal.

Los juegos de producción lineal fueron introducidos por Owen (1975).

Sea

$$J = \{1, 2, ..., n\}$$

un conjunto de agentes.

Existen q recursos R_1, R_2, ..., R_q, de manera que cada agente tiene determinada cantidad de cada uno de los recursos. Así, el jugador $i \in J$, tiene b_{i1} unidades del recurso R_1, b_{i2} unidades del recurso R_2, ..., b_{iq} unidades del recurso R_q. Estos recursos no tienen ningún valor por sí mismos. Sólo sirven para utilizarse en la producción de r bienes B_1, B_2, ..., B_r. Se supone que el proceso de producción es lineal, de manera que una unidad del bien B_l requiere a_{1l} unidades de R_1, a_{2l} unidades de R_2, ..., a_{ql} unidades de R_q, y puede ser vendido a un precio de p_l unidades monetarias.

Cuando se forma una coalición $S \subseteq J$, los agentes que la componen unen sus recursos y producirán aquel vector de bienes $(x_1, x_2, ..., x_r) \in R^r$ que resuelva el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned} v(S) = \max\, & p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_rx_r \\ \text{s.a.: } & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r \leqslant \sum_{i\in S} b_{i1} \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r \leqslant \sum_{i\in S} b_{i2} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \cdots + a_{qr}x_r \leqslant \sum_{i\in S} b_{iq} \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, ..., x_r \geqslant 0 \end{aligned}$$

Demostraremos que el core de este juego es no vacío, viendo que dicho juego es equilibrado. En efecto, sea

$$\mathcal{B} = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$$

cualquier familia de coaliciones equilibrada sobre J, con pesos (positivos) respectivos α_1, α_2, ..., α_m. Por tratarse de una familia equilibrada se verifica que

$$\sum_{\{j:\, i\in S_j\}} \alpha_j = 1$$

Veamos que el juego es equilibrado, es decir, que se verifica:

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v(S_j) \leqslant v(J)$$

Para cada $S_j \in \mathcal{B}$, sea $x^j = (x_1^j, x_2^j, ..., x_r^j)$ la solución óptima del programa lineal que define $v(S_j)$. Por tanto, se verifica que

$$v(S_j) = \sum_{l=1}^{r} p_l x_l^j$$

Sea

$$x^* = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x^j$$

Podemos poner

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_r^*), \text{ siendo } x_l^* = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_l^j \geqslant 0, \forall\, l = 1, 2, ..., r$$

Para cada $k = 1, 2, ..., q$ se tiene que

$$\sum_{l=1}^{r} a_{kl} x_l^* = \sum_{l=1}^{r} a_{kl} \left[\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_l^j \right] = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left[\sum_{l=1}^{r} a_{kl} x_l^j \right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left[\sum_{i \in S_j} b_{ik} \right] = \sum_{i \in J} b_{ik} \left[\sum_{\{j: i \in S_j\}} \alpha_j \right] = \sum_{i \in J} b_{ik}$$

Por tanto x^* es solución factible del programa lineal que define $v(J)$, lo que implica que

$$\sum_{l=1}^{r} p_l x_l^* \leqslant v(J)$$

Por tanto,

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v(S_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left[\sum_{l=1}^{r} p_l x_l^j \right] = \sum_{l=1}^{r} p_l \left[\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_l^j \right] = \sum_{l=1}^{r} p_l x_l^* \leqslant v(J)$$

como se quería demostrar.

8.5. EL *NUCLEOLUS*

Hemos visto en la sección anterior que el *core* es un concepto de solución que tiene una dificultad importante: en algunas ocasiones es un conjunto muy grande y en otras es un conjunto vacío. El concepto de *nucleolus* propone una solución que, siempre que el conjunto de imputaciones sea no vacío, supera la dificultad anterior, pues es no vacío y único. Además, pertenece al *core* si éste es no vacío. Se considera un juego cooperativo (J, v).

Sea una distribución de pagos $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ eficiente entre los jugadores, es decir, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(J)$$

Definición 8.14

El exceso o queja de una coalición S con respecto a una distribución de pagos x es la diferencia entre el valor de la coalición S y lo que recibe dicha coalición por la distribución x. Es decir,

$$e(S, x) = v(S) - x(S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

Se trata de una medida del grado de insatisfacción de la coalición S con la distribución x. Cuanto mayor es $e(S, x)$ mayor es la insatisfacción.

Ejemplo 8.17

Sea el juego (J, v), para $J = \{1, 2, 3\}$, con

$$v(\emptyset) = 0,\ v(\{1\}) = 5,\ v(\{2\}) = 8,\ v(\{3\}) = 4,\ v(\{1, 2\}) = 15,$$
$$v(\{1, 3\}) = 20,\ v(\{2, 3\}) = 15,\ v(\{1, 2, 3\}) = 30$$

Se consideran los siguientes vectores de distribución de pagos:

$$x = (10, 10, 10), \qquad y = (10, 12, 8), \qquad z = (11, 8, 11)$$

Para cada uno de los vectores dados se verifica que la suma de sus componentes es igual a $v(\{1, 2, 3\}) = 30$.

En la siguiente tabla se recogen los valores, los excesos o quejas de cada coalición para cada uno de los vectores dados.

	$v(S)$	$x(S)$	$y(S)$	$z(S)$	$e(S, x)$	$e(S, y)$	$e(S, z)$
$\emptyset$	0	0	0	0	0	0	0
$\{1\}$	5	10	10	11	-5	-5	-6
$\{2\}$	8	10	12	8	-2	-4	0
$\{3\}$	4	10	8	11	-6	-4	-7
$\{1, 2\}$	15	20	22	19	-5	-7	-4
$\{1, 3\}$	20	20	18	22	0	2	-2
$\{2, 3\}$	15	20	20	19	-5	-5	-4
$\{1, 2, 3\}$	30	30	30	30	0	0	0

Para cada vector de distribución de pagos x construimos un vector $\theta(x)$, de manera que los excesos vayan de mayor a menor, al ir cambiando las coaliciones. Así, en el ejemplo anterior,

$$\theta(x) = (0, 0, 0, -2, -5, -5, -5, -6)$$
$$\theta(y) = (2, 0, 0, -4, -4, -5, -5, -7)$$
$$\theta(z) = (0, 0, 0, -2, -4, -4, -6, -7)$$

La idea se formaliza en la Definición 8.15.

Definición 8.15

Para cada $x \in I(J, v)$, se define el vector de excesos como el siguiente vector $\theta(x)$, con 2^n componentes:

$$\theta(x) = (e(S, x))_{S \in P(J)} = (\theta_1(x), \theta_2(x), ..., \theta_{2^n}(x))$$

en donde

$$\theta_k(x) \geqslant \theta_{k+1}(x),\ \forall\, k = 1, 2, ..., 2^n - 1$$

Se considera el orden lexicográfico, que definimos formalmente a continuación.

Definición 8.16

Sean x, $x' \in I(J, x)$.

a) $$\theta(x) <_L \theta(x') \quad \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad \theta_1(x) < \theta_1(x')$, o bien, para $j > 1$, $\theta_j(x) < \theta_j(x')$ y $\theta_i(x) = \theta_i(x')$, para $i = 1, ..., j-1$

b) $$\theta(x) =_L \theta(x') \quad \Leftrightarrow \quad \theta_j(x) = \theta_j(x'),\ \forall j$$

c) $$\theta(x) \leqslant_L \theta(x') \quad \Leftrightarrow \quad \theta(x) <_L \theta(x') \text{ o bien } \theta(x) =_L \theta(x')$$

Por tanto, dados dos vectores de excesos, para compararlos según el orden lexicográfico, se observan sólo las primeras componentes; si la primera componente de un vector es menor que la primera componente del otro vector el primer vector es menor que el segundo según el orden lexicográfico definido. Si los dos vectores tienen iguales sus primeras componentes se comparan sus segundas componentes siendo menor según el orden lexicográfico aquel vector cuya segunda componente sea menor. Si sus segundas componentes son iguales se comparan sus terceras componentes y así sucesivamente.

Ejemplo 8.18

Para los vectores x, y, z definidos en el Ejemplo 8.17 se tiene que:

- $\theta(x) <_L \theta(y)$, ya que la primera componente del vector $\theta(x)$, que es 0, es menor que la primera componente del vector $\theta(y)$, que es 2.
- $\theta(z) <_L \theta(y)$, ya que la primera componente del vector $\theta(z)$, que es 0, es menor que la primera componente del vector $\theta(y)$, que es 2.
- $\theta(x) <_L \theta(z)$, ya que las cuatro primeras componentes de ambos vectores son iguales y la quinta componente del vector $\theta(x)$, que es -5, es menor que la quinta componente del vector $\theta(z)$, que es -4.

Al cumplirse las desigualdades en sentido estricto, es claro que también se cumplirán en sentido no estricto. Es decir:

$$\theta(x) \leqslant_L \theta(y),\ \theta(z) \leqslant_L \theta(y),\ \theta(x) \leqslant_L \theta(z)$$

A continuación se define el concepto fundamental de este apartado.

Definición 8.17

El *nucleolus* de un juego (J, v) es el conjunto $N(J, v)$ definido de la siguiente forma:

$$N(J, v) = \{x \in I(J, v) \colon \theta(x) \leqslant_L \theta(y),\ \forall\, y \in I(J, v)\}$$

Por tanto, se puede decir que el *nucleolus* contiene aquellas distribuciones de pagos que son imputaciones, y para las cuales se minimiza el mayor de los grados de insatisfacción.

El siguiente teorema, del que vamos a dar el enunciado sin la demostración, se debe a Schmeidler (1969).

Teorema 8.2

Sea (J, v) un juego esencial (lo cual quiere decir que su conjunto de imputaciones es no vacío). Entonces se verifica que el *nucleolus* existe y es único.

La demostración del teorema se encuentra en Driessen (1988).

Proposición 8.3

Una condición suficiente para que el *nucleolus* exista y sea único es que

$$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leqslant v(J)$$

Demostración:

Supongamos que $\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leqslant v(J)$. Entonces por la Proposición 8.1 se tiene que $I(J, v) \neq \varnothing$ de donde se deduce la existencia y unicidad del *nucleolus* por el Teorema 8.2.

A continuación se dan dos definiciones que se utilizarán posteriormente en una proposición en que se presentarán algunas propiedades importantes del *nucleolus*, que nos permitirán calcularlo en algunos casos.

Definición 8.18

Se dice que dos jugadores i, j son **simétricos** en un juego (J, v) si realizan aportaciones equivalentes para cada coalición. Es decir, si se cumple que

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{i\}), \text{ para todo } S \in P(J), \text{ con } i, j \notin S$$

Definición 8.19

Se dice que el jugador i es un **jugador pasivo** en el juego (J, v) si no aporta ningún beneficio adicional al resto de los jugadores. Es decir, si se cumple que

$$v(S) = v(S - \{i\}) + v(\{i\}), \text{ para toda coalición } S \text{ con } i \in S$$

Ejemplo 8.19

En el juego del Ejemplo 8.2 no hay ningún par de jugadores simétricos y no hay ningún jugador pasivo.

En el Ejemplo 8.3 cualquier par de jugadores es simétrico. Ningún jugador es pasivo.

En el Ejemplo 8.4 los jugadores 1 y 2 son simétricos. Los jugadores 3 y 4 también son simétricos. No hay ningún jugador pasivo.

En el Ejemplo 8.5 no hay ningún par de jugadores simétricos y no hay ningún jugador pasivo.

Se considera el siguiente juego con tres jugadores:

$$v(\emptyset) = 0,\ v(\{1\}) = 1,\ v(\{2\}) = 2,\ v(\{3\}) = 1,$$

$$v(\{1, 2\}) = 3,\ v(\{1, 3\}) = 2,\ v(\{2, 3\}) = 3,\ v(\{1, 2, 3\}) = 4$$

En este juego, el jugador 1 es jugador pasivo, ya que se cumple:

$$v(\{1\}) = v(\emptyset) + v(\{1\}),$$

$$v(\{1, 2\}) = v(\{2\}) + v(\{1\}),$$

$$v(\{1, 3\}) = v(\{3\}) + v(\{1\}),$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = v(\{2, 3\}) + v(\{1\})$$

De la misma forma, los jugadores 2 y 3 son jugadores pasivos.

En la siguiente proposición se presentan algunas propiedades interesantes del *nucleolus*.

Proposición 8.4

Se considera el juego (J, v). El *nucleolus* $N(J, v)$ verifica las siguientes propiedades:

1. Si el core del juego es no vacío, entonces el único elemento del *nucleolus* pertenece al core.

2. Si el core del juego es unitario, entonces el core coincide con el *nucleolus*.

3. Sea $N(J, v) = (N_1, N_2, ..., N_n)$ el *nucleolus*. Si i, j son jugadores simétricos, entonces $N_i = N_j$.

4. Sea $N(J, v) = (N_1, N_2, ..., N_n)$ el *nucleolus*. Si $i \in J$ es un jugador pasivo, entonces $N_i = v(\{i\})$.

Demostración:

1. El core del juego (J, v) es el conjunto siguiente:

$$C(J, v) = \{x \in R^n\colon x(J) = v(J),\ x(S) \geqslant v(S),\ \forall\, S \in P(J) - J\}$$

Supongamos que $C(J, v) \neq \emptyset$.

Para todo $x \in C(J, v)$ es $e(S, x) \leqslant 0$, $\forall\, S \in P(J)$. Ello implica que $\theta(x)$ tiene todas sus componentes menores o iguales que cero. En particular, $\theta_1(x) = 0$.

Sea y una imputación del juego que no pertenezca al core. Existirá al menos una coalición $\bar{S} \in P(J)$, tal que $x(\bar{S}) < v(\bar{S})$. Por tanto, $e(\bar{S}, y) = v(\bar{S}) - x(\bar{S}) > 0$. Por tanto, $\theta(y)$ tiene al menos una componente positiva, por lo que $\theta_1(y) > 0$.

Por tanto, $\forall\, x \in C(J, v)$, $\forall\, y \notin C(J, v)$ es $\theta(x) <_L \theta(y) \quad \Rightarrow \quad N(J, v) \subset C(J, v)$.

Como el conjunto de imputaciones es no vacío al ser el core no vacío, el *nucleolus* existe y es único por el Teorema 8.2 por lo que el único elemento del *nucleolus* pertenece al core.

2. A partir de 1) es inmediato que si, en particular, el core es unitario se verifica que $N(J, v) = C(J, v)$.

3. Demostramos la propiedad por reducción al absurdo.

Sea $N = N(J, v) = (N_1, ..., N_i, ..., N_j, ..., N_n)$.

Supongamos que fuera $N_i \neq N_j$, siendo i, j jugadores simétricos.

Sea $N' = (N_1, ..., N_j, ..., N_i, ..., N_n)$, donde simplemente hemos intercambiado N_i y N_j.

Al ser N y N' dos imputaciones del juego e i, j jugadores simétricos, será $\theta(N) = \theta(N')$.

Como N es el *nucleolus*, se cumple que

$$\theta(N) \leqslant_L \theta(y), \ \forall y \in I(J, v),$$

$$\theta(N') \leqslant_L \theta(y), \ \forall y \in I(J, v)$$

Por tanto, N, N' pertenecen al *nucleolus*, lo que contradice la unicidad.

4. Vamos a distinguir dos casos.

a) Supongamos que el core es no vacío. Entonces por 1) es $N(J, v) \in C(J, v)$. Por tanto, como se ha visto en la demostración de la Proposición 8.2 se cumple que

$$v(\{i\}) \leqslant N_i \leqslant v(J) - v(J - \{i\})$$

Si i es un jugador pasivo se cumple que $v(J) - v(J - \{i\}) = v(\{i\})$ por lo que se deduce que $N_i = v(\{i\})$.

b) Supongamos que el core es vacío.

Supongamos que i es un jugador pasivo. Al ser $N(J, v)$ el *nucleolus*, es una imputación por lo que se verifica que $N_i \geqslant v(\{i\})$. Veamos, por reducción al absurdo, que no puede ser $N_i > v(\{i\})$. Supongamos que lo fuera.

Se define $a = N_i - v(\{i\}) > 0$.

Se considera la imputación $(N'_1, N'_2, ..., N'_n)$ con

$$N'_k = \begin{cases} v(\{i\}), & \text{si} \quad k = i \\ N_k + \dfrac{a}{n-1}, & \text{si} \quad k \neq i \end{cases}$$

Si $S = \emptyset$, o $S = \{i\}$, entonces $e(S, N') = 0$.

Si $i \notin S$, y $S \neq \emptyset$, entonces

$$e(S, N') = v(S) - N'(S) = v(S) - N(S) - \frac{s}{n-1}\, a < e(S, N)$$

(en donde s es el número de jugadores que componen la coalición S).

Si $i \in S$, y $S \neq \{i\}$,

$$e(S, N') = v(S) - N'(S) = v(S - \{i\}) + v(\{i\}) - N'(S - \{i\}) - N'(\{i\}) =$$

$$= v(S - \{i\}) - N(S - \{i\}) - \frac{s-1}{n-1} a < e(S - \{i\}, N)$$

Como el core es vacío se verifica que $\max_S \{e(S, N')\} > 0$, ya que la imputación N' no puede pertenecer al core. Como

$$\max_S \{e(S, N')\} < \max_S \{e(S, N)\}$$

resulta que $\theta(N') <_L \theta(N)$, lo que está en contra de que N es el *nucleolus*.

Las propiedades contenidas en la Proposición 8.4 permiten calcular inmediatamente el *nucleolus* en algunos casos y ayudar a su cálculo en otros, como vamos a ver a continuación.

Ejemplo 8.20

Calclulemos el *nucleolus* del siguiente juego con tres jugadores:

$$v(\emptyset) = 0,\ v(\{1\}) = 1,\ v(\{2\}) = 2,\ v(\{3\}) = 1,$$
$$v(\{1, 2\}) = 3,\ v(\{1, 3\}) = 2,\ v(\{2, 3\}) = 3,\ v(\{1, 2, 3\}) = 4$$

En primer lugar, se cumple la condición suficiente de la Proposición 8.3 para que el *nucleolus* exista y sea único ya que

$$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leqslant v(J), \text{ pues } 1 + 2 + 1 \leqslant 4$$

Este juego ha sido considerado en el Ejemplo 8.19, donde se ha comprobado que todos los jugadores son pasivos. Aplicando la propiedad 4 de la Proposición 8.4 se tiene que el *nucleolus* es $N = (N_1, N_2, N_3)$, con $N_1 = v(\{1\}) = 1$, $N_2 = v(\{2\}) = 2$, $N_3 = v(\{3\}) = 1$.

Por tanto,

$$N = (1, 2, 1)$$

Ejemplo 8.21

Calculemos ahora el *nucleolus* del juego de los cantantes del Ejemplo 8.3.

Se cumple la condición suficiente dada en la Proposición 8.3 para la existencia y unicidad del *nucleolus* ya que

$$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leqslant v(J), \text{ ya que } \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) = 0 + 0 + 0 \text{ y } v(J) = A \geqslant 0$$

Sea $N = (N_1, N_2, N_3)$ el *nucleolus*. Hemos visto en el Ejemplo 8.19 que los jugadores 1 y 2 son simétricos, por lo que aplicando la propiedad 3) de la Proposición 8.4 se tiene que $N_1 = N_2$. También los jugadores 1 y 3 son simétricos, por lo que $N_1 = N_3$. Por tanto, $N_1 = N_2 = N_3 = a$.

Como el *nucleolus* es una imputación debe cumplir el principio de eficiencia por lo que debe ser

$$N_1 + N_2 + N_3 = v(\{1, 2, 3\}), \text{ es decir, } 3a = A \quad \Rightarrow \quad a = \frac{A}{3}$$

Por tanto, el *nucleolus* del juego de los cantantes del Ejemplo 8.3 es

$$N = \left(\frac{A}{3}, \frac{A}{3}, \frac{A}{3}\right)$$

En el Ejemplo 8.12 se ha estudiado el core de este juego y se ha visto cómo puede ser vacío o no vacío, unitario o no unitario, dependiendo de las relaciones entre los parámetros A y B. Obsérvese que el *nucleolus* de este juego siempre existe y es único, independientemente de que el core sea o no vacío y sea o no unitario. En particular, hemos visto en el Ejemplo 8.12 que si $2A = 3B$ el core es unitario, siendo

$$C(J, v) = (A - B, A - B, 2B - A) = \left(\frac{A}{3}, \frac{A}{3}, \frac{A}{3}\right) \text{ (Figura 8.8)}$$

y coincide con el *nucleolus*, como no podía ser de otra forma, a la vista de la propiedad 2 de la Proposición 8.4.

Si $2A < 3B$, el core es vacío (Figura 8.9) y el *nucleolus* es $N = \left(\frac{A}{3}, \frac{A}{3}, \frac{A}{3}\right)$.

Si $2A > 3B$ el core es no vacío y no unitario (Figura 8.10) y el *nucleolus* sigue siendo $N = \left(\frac{A}{3}, \frac{A}{3}, \frac{A}{3}\right)$.

Ejemplo 8.22

Calculemos el *nucleolus* del juego de la finca rústica del Ejemplo 8.2.

En el Ejemplo 8.11 se ha calculado el core de dicho juego:

$$C(J, v) = \{(0, x_2, 775 - x_2): 0 \leqslant x_2 \leqslant 75\}$$

Por la propiedad 1 demostrada en la Proposición 8.4 se sabe que el *nucleolus*, que existe y es único, es uno de los puntos del core. Por tanto, el *nucleolus* es alguno de los puntos de la forma $x = (0, a, 775 - a)$, con $0 \leqslant a \leqslant 75$.

Apliquemos la definición de *nucleolus*. Para cada uno de los puntos candidato a *nucleolus* calculemos el exceso

$$e(S, x) = v(S) - x(S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

Sabemos que será $e(\varnothing, x) = e(J, x) = 0$, para todo x. Como queremos comparar los vectores de excesos para los distintos candidatos a *nucleolus* según el orden lexicográfico, sólo nos interesan las componentes de los vectores de excesos que varían con los distintos candidatos.

Los valores de $e(S, x)$ para $S \in P(J)$, con $S \neq \varnothing$ y $S \neq J$, siendo $x = (0, a, 775 - a)$, con $0 \leqslant a \leqslant 75$, son los siguientes:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$
$e(S, x)$	0	$-a$	$a - 425$	$-a$	$a - 75$	0

Como ahora hay que comparar los vectores de excesos para los distintos candidatos a *nucleolus*, nos interesan sólo aquellos excesos que dependan de a. El *nucleolus* será el vector $x = (0, a, 775 - a)$, con $0 \leqslant a \leqslant 75$, correspondiente al valor de a que sea solución óptima del siguiente problema:

$$\min_{0 \leqslant a \leqslant 75} \{\max\{-a, a - 425, a - 75\}\}$$

Como es evidente que $a - 425 < a - 75$, el problema anterior se puede expresar como

$$\min_{0 \leqslant a \leqslant 75} \{\max\{-a, a - 75\}\}$$

Este problema (que es un problema minimax) se resuelve fácilmente con la ayuda de una representación gráfica, tal como aparece en la Figura 8.11. En efecto, se representa la variable a en abscisas y, para los valores de a comprendidos entre 0 y 75 se representan las funciones $-a$ y $a - 75$. A la vista de los gráficos de las dos funciones representamos con trazo grueso la función $M(a) = \max\{-a, a - 75\}$. Finalmente, a la vista del gráfico, se resuelve el problema $\min_{0 \leqslant a \leqslant 75} M(a)$ obteniéndose que el valor óptimo es $a^* = 37{,}5$, por lo que el *nucleolus* del juego es $N = (0, 37{,}5, 737{,}5)$.

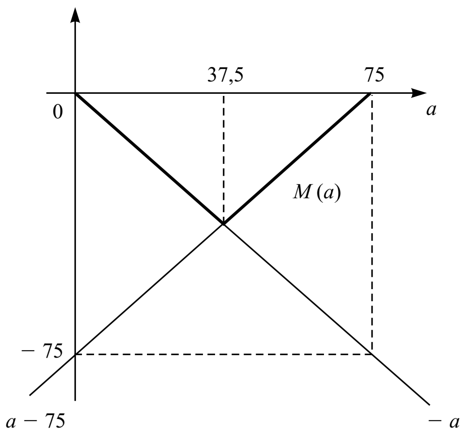


Figura 8.11 Resolución gráfica del problema minimax.

Ejemplo 8.23

Ahora vamos a calcular el *nucleolus* del juego de patentes del Ejemplo 8.4.

En el Ejemplo 8.13 hemos visto que el core de este juego es el conjunto vacío. Por otra parte, se cumple la condición suficiente en la Proposición 8.3 que nos permite afirmar que el *nucleolus* existe y es único.

En el Ejemplo 8.19 hemos visto que los jugadores 1 y 2 son simétricos y que los jugadores 3 y 4 también son simétricos. Aplicando la propiedad 3 de la Proposición 8.4 se tiene que el *nucleolus* es el vector $N = (N_1, N_2, N_3, N_4)$, con $N_1 = N_2$, por ser 1 y 2 jugadores simétricos, y $N_3 = N_4$, por ser 3 y 4 jugadores simétricos. Además el *nucleolus* es una imputación, por lo que debe cumplir el principio de eficiencia, verificándose, por tanto, que $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = v(J) = 13$, así como el principio de racionalidad individual, por lo que debe ser $N_i \geqslant 0$, para todo $i = 1, 2, 3, 4$.

Por tanto, el *nucleolus* debe ser uno de los vectores de la siguiente familia:

$$x = (a, a, 6{,}5 - a, 6{,}5 - a), \text{ con } 0 \leqslant a \leqslant 6{,}5$$

Para calcular el valor de a correspondiente al *nucleolus* se procede como en el ejemplo anterior.

Los valores de $e(S, x)$ para $S \in P(J)$, con $S \neq \varnothing$ y $S \neq J$, siendo $x = (a, a, 6{,}5 - a, 6{,}5 - a)$, con $0 \leqslant a \leqslant 6{,}5$, son los siguientes:

$$e(\{1\}, x) = -a,\ e(\{2\}, x) = -a,\ e(\{3\}, x) = a - 6{,}5,\ e(\{4\}, x) = a - 6{,}5$$

$$e(\{1, 2\}, x) = -2a,\ e(\{1, 3\}, x) = 0,\ e(\{1, 4\}, x) = 0,$$

$$e(\{2, 3\}, x) = 0,\ e(\{2, 4\}, x) = 0,\ e(\{3, 4\}, x) = 2a - 13,$$

$$e(\{1, 2, 3\}, x) = e(\{1, 2, 4\}, x) = 3{,}5 - a,\ e(\{1, 3, 4\}, x) = e(\{2, 3, 4\}, x) = a - 3$$

Como ahora hay que comparar los vectores de excesos para los distintos candidatos a *nucleolus*, nos interesan sólo aquellos excesos que dependan de a. El *nucleolus* será el vector $x = (a, a, 6{,}5 - a, 6{,}5 - a)$, con $0 \leqslant a \leqslant 6{,}5$, correspondiente al valor de a que sea solución óptima del siguiente problema:

$$\min_{0 \leqslant a \leqslant 6{,}5} \{\max\{-a, a - 6{,}5, -2a, 2a - 13, 3{,}5 - a, a - 3\}\}$$

Como es evidente que $-2a < -a < 3{,}5 - a$, para valores de $a \in [0, 6{,}5]$ y también $a - 6{,}5 < a - 3$, el problema anterior se puede expresar como

$$\min_{0 \leqslant a \leqslant 6{,}5} \{\max\{2a - 13, 3{,}5 - a, a - 3\}\}$$

En la Figura 8.12 se resuelve gráficamente este problema minimax, obteniéndose que $a^* = 3{,}25$, por lo que el *nucleolus* del juego es

$$N = (3{,}25, 3{,}25, 3{,}25, 3{,}25)$$

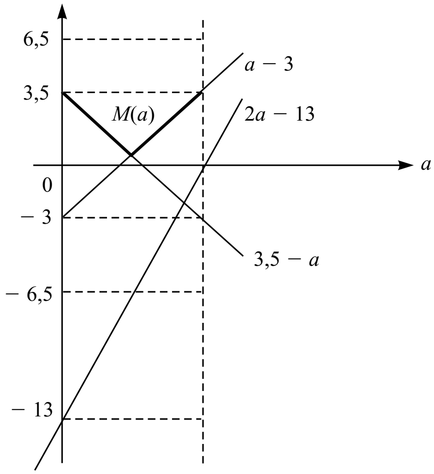


Figura 8.12 Resolución gráfica del problema minimax en el juego de patentes.

En los dos ejemplos anteriores hemos podido resolver por el método gráfico el problema minimax que se nos presentaba, porque sólo faltaba un valor por concretar (el valor de a). Ello ha sido posible porque en un caso el juego tenía jugadores pasivos y en otro tenía jugadores simétricos. En muchos casos no va a ser posible que el problema minimax a resolver dependa de una única variable y habrá que utilizar métodos distintos al método gráfico. En el siguiente ejemplo vamos a seguir exactamente los mismos pasos que hemos seguido en los dos ejemplos anteriores hasta que lleguemos a la resolución del problema minimax que resolveremos transformando el problema en una secuencia de programas lineales, ya que el método gráfico no es posible en este caso.

Ejemplo 8.24

Calculemos el *nucleolus* para el juego de los investigadores del Ejemplo 8.5

Para este juego se verifica que

$$v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\}) = 80 < v(\{1, 2, 3\}) = 100$$

por lo que el conjunto de imputaciones es no vacío y el *nucleolus* existe y es único.

Sea $x = (x_1, x_2, x_3)$ el *nucleolus*. Por pertenecer el *nucleolus*, por definición, al conjunto de imputaciones se tienen que cumplir las siguientes condiciones:

$$x_1 \geqslant 30,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 50,\ x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

Los valores de $e(S, x)$ para $S \in P(J)$, con $S \neq \varnothing$ y $S \neq J$, y $x = (x_1, x_2, x_3)$ son los siguientes:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$
$e(S, x)$	$30 - x_1$	$-x_2$	$50 - x_3$	$50 - x_1 - x_2$	$80 - x_1 - x_3$	$80 - x_2 - x_3$

Para calcular el *nucleolus* hay que resolver el siguiente problema:

$$\min_{x_1,x_2,x_3} \{\max\{30 - x_1,\ -x_2,\ 50 - x_3,\ 50 - x_1 - x_2,\ 80 - x_1 - x_3,\ 80 - x_2 - x_3\}\},$$

$$\text{sujeto a: } x_1 \geqslant 30,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 50,\ x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

Para resolver el anterior problema minimax se procede de la siguiente forma: se define

$$\max\{30 - x_1,\ -x_2,\ 50 - x_3,\ 50 - x_1 - x_2,\ 80 - x_1 - x_3,\ 80 - x_2 - x_3\} = \alpha_1$$

Cada una de las funciones a las que afecta la maximización anterior debe ser menor o igual a α_1. El problema minimax formulado es equivalente al siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1,x_2,x_3,\alpha_1} \alpha_1\\
&30 - x_1 \leqslant \alpha_1\\
&-x_2 \leqslant \alpha_1\\
&50 - x_3 \leqslant \alpha_1\\
&50 - x_1 - x_2 \leqslant \alpha_1\\
&80 - x_1 - x_3 \leqslant \alpha_1\\
&80 - x_2 - x_3 \leqslant \alpha_1\\
&x_1 \geqslant 30\\
&x_2 \geqslant 0\\
&x_3 \geqslant 50\\
&x_1 + x_2 + x_3 = 100
\end{aligned}$$

Resolvemos el problema anterior con algún programa informático para programas lineales (en nuestro caso utilizamos LINDO) y obtenemos que el programa tiene solución óptima que no es única. Dicha solución óptima se alcanza para $\alpha_1 = 10$, $x_1 = 30$ y x_2, x_3 tales que $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 50$ y $x_2 + x_3 = 70$. (En la solución óptima del programa lineal no se satura ninguna de las 5 primeras restricciones y sí se satura la sexta restricción.) Podemos asegurar que la primera componente del *nucleolus* es $x_1 = 30$ pero aún no podemos concretar su segunda y tercera componente. Para ello hay que resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1,x_2,x_3,\alpha_1} \alpha_2\\
&-x_2 \leqslant \alpha_2\\
&50 - x_3 \leqslant \alpha_2\\
&20 - x_2 \leqslant \alpha_2\\
&50 - x_3 \leqslant \alpha_2\\
&x_2 \geqslant 0\\
&x_3 \geqslant 50\\
&x_2 + x_3 = 70
\end{aligned}$$

El problema tiene solución única, que es $x_2 = 20$, $x_3 = 50$, $\alpha_2 = 0$.

Por tanto, el *nucleolus* del juego es

$$N = (30, 20, 50)$$

El método utilizado en el ejemplo anterior coincide con el que propone Owen (1995) y que presentamos a continuación.

Método para calcular el *nucleolus* utilizando programación lineal

Para calcular el *nucleolus* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ del juego (J, v), se resuelve el siguiente programa lineal:

$$\min \alpha_1$$
$$v(S) - \sum_{i \in S} x_i \leqslant \alpha_i, \text{ para } S \in P(J),\ S \neq \varnothing,\ S \neq J$$
$$x \in I(J, v)$$

Sea α_1^* el mínimo de ese problema. Si tal mínimo se alcanza en un único punto $\tilde{x}$, entonces $\tilde{x}$ es el *nucleolus* y el cálculo está completo. Normalmente dicho mínimo no se alcanzará en un único punto x sino en un conjunto X^1. En tal caso normalmente habrá una familia $\mathcal{F}_1$ de coaliciones, tal que para todo $S \in \mathcal{F}_1$ y $x \in X^1$ es $e(S, x) = \alpha_1$. Entonces se resuelve el programa lineal

$$\min \alpha_2$$
$$v(S) - \sum_{i \in S} x_i \leqslant \alpha_2, \text{ para } S \in P(J) - \mathcal{F}_1,\ \mathrm{S} \neq \varnothing,\ S \neq J$$
$$x \in X^1$$

Si el mínimo se alcanza en un único x se termina, si no es así se sigue como anteriormente.

Ejemplo 8.25

Calculemos el *nucleolus* utilizando el método basado en programación lineal del juego de la bancarrota del Ejemplo 8.7.

Sea el *nucleolus* $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Por tratarse de una imputación debe cumplir las siguientes restricciones:

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 50,\ x_4 \geqslant 0,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 650$$

Los valores de $e(S, x)$ para $S \in P(J)$, con $S \neq \varnothing$ y $S \neq J$, siendo $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ son los siguientes:

$$e(\{1\}, x) = -x_1,\ e(\{2\}, x) = -x_2,\ e(\{3\}, x) = 50 - x_3,\ e(\{4\}, x) = -x_4$$
$$e(\{1, 2\}, x) = 50 - x_1 - x_2,\ e(\{1, 3\}, x) = 250 - x_1 - x_3,\ e(\{1, 4\}, x) = 150 - x_1 - x_4,$$
$$e(\{2, 3\}, x) = 200 - x_2 - x_3,\ e(\{2, 4\}, x) = 100 - x_2 - x_4,\ e(\{3, 4\}, x) = 300 - x_3 - x_4,$$
$$e(\{1, 2, 3\}, x) = 400 - x_1 - x_2 - x_3,\ e(\{1, 2, 4\}, x) = 300 - x_1 - x_2 - x_4,$$
$$e(\{1, 3, 4\}, x) = 500 - x_1 - x_3 - x_4,\ e(\{2, 3, 4\}, x) = 450 - x_2 - x_3 - x_4$$

Ahora se resuelve el siguiente problema lineal:

$$
\begin{aligned}
&\min \alpha_1\\
&-x_1 \leqslant \alpha_1\\
&-x_2 \leqslant \alpha_1\\
&50 - x_3 \leqslant \alpha_1\\
&-x_4 \leqslant \alpha_1\\
&50 - x_1 - x_2 \leqslant \alpha_1\\
&250 - x_1 - x_3 \leqslant \alpha_1\\
&150 - x_1 - x_4 \leqslant \alpha_1\\
&200 - x_2 - x_3 \leqslant \alpha_1\\
&100 - x_2 - x_4 \leqslant \alpha_1\\
&300 - x_3 - x_4 \leqslant \alpha_1\\
&400 - x_1 - x_2 - x_3 \leqslant \alpha_1\\
&300 - x_1 - x_2 - x_4 \leqslant \alpha_1\\
&500 - x_1 - x_3 - x_4 \leqslant \alpha_1\\
&450 - x_2 - x_3 - x_4 \leqslant \alpha_1\\
&x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 50,\ x_4 \geqslant 0,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 650
\end{aligned}
$$

Resolvemos el programa lineal utilizando algún programa informático (en nuestro caso el programa LINDO), obteniéndose que existe solución única

$$\alpha_1^* = -75,\ x_1^* = 125,\ x_2^* = 75,\ x_3^* = 275,\ x_4^* = 175$$

Al existir solución única se ha obtenido ya el *nucleolus* que es

$$N = (125,\ 75,\ 275,\ 175)$$

8.6. EL VALOR DE SHAPLEY

En este apartado se estudia un concepto de solución para juegos cooperativos que corresponde a un tipo de análisis llamado normativo. Se trata de buscar una distribución de pagos entre los jugadores de manera que se cumplan determinados criterios, llamados axiomas, previamente establecidos. En concreto, siguiendo a Shapley (1953), veremos cómo a partir de 4 axiomas o suposiciones se llega a una única asignación entre los jugadores, que se llama valor de Shapley.

Sea $G = (J, v)$ un juego en forma coalicional, en donde $J = \{1, 2, ..., n\}$. Se considera la siguiente asignación de pagos para los n jugadores:

$$\phi(v) = (\phi_1(v),\ \phi_2(v),\ ...,\ \phi_n(v)) \in R^n$$

La función de asignación de pagos $\phi(v)$ debe cumplir los siguientes axiomas:

Axioma 1. **Eficiencia.** La función de asignación $\phi(v)$ debe distribuir el pago total del juego. Es decir, debe ser

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(v) = v(J)$$

Axioma 2. **Simetría.** Para cualquier par de jugadores que realicen aportaciones equivalentes para cada coalición, es decir, tales que cumplan que

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \text{ para todo } S \in P(J), \text{ con } i, j \notin S$$

debe ser

$$\phi_i(v) = \phi_j(v)$$

Axioma 3. **Tratamiento del jugador pasivo.** Si un jugador no aporta ningún beneficio adicional al resto de jugadores no debe recibir ningún pago adicional. Es decir, para cada jugador $i \in J$, para el cual se verifica que

$$v(S) = v(S - \{i\}) + v(\{i\}), \text{ para toda coalición } S \text{ con } i \in S$$

debe ser

$$\phi_i(v) = v(\{i\})$$

Axioma 4. **Aditividad.** La función de asignación ϕ debe ser invariante a cualquier descomposición arbitraria del juego. Formalmente, dados dos juegos cualesquiera (J, v_1) y (J, v_2) debe ser

$$\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$$

Existe una única asignación que verifica los axiomas 1, 2, 3 y 4, que se llama el **valor de Shapley**, tal como se recoge en el teorema siguiente, que es el resultado fundamental de este apartado.

Teorema 8.3

La única asignación $\phi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v), ..., \phi_n(v))$ que verifica los axiomas 1, 2, 3 y 4 es

$$\phi_i(v) = \sum_{S \in P(J)} q(s)[v(S) - v(S - \{i\})]$$

en donde

$$q(s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$$

siendo $s = |S|$, el número de jugadores que hay en la coalición S.[1]

[1] Hay una excepción con esta notación, ya que si $S = J$ el número de jugadores que forman la coalición es n y no j. Hemos mantenido la notación $J = \{1, 2, ..., n\}$ utilizada en los demás capítulos del libro.

Demostración:

Para cada coalición $S \in P(J)$ que no contiene al jugador i, se verifica que $S = S - \{i\}$, por lo que $v(S) - v(S - \{i\}) = 0$, y se tiene que

$$\phi_i(v) = \sum_{S \in P(J)} q(s)[v(S) - v(S - \{i\})] = \sum_{S \in \mathcal{S}(i)} q(s)[v(S) - v(S - \{i\})]$$

en donde

$$\mathcal{S}(i) = \{S \in P(J)\colon i \in S\}$$

Veamos a continuación que ϕ verifica los axiomas 1 a 4. En efecto:

Axioma 1:

$$\sum_{i \in J} \phi_i(v) = \sum_{i \in J} \sum_{S \in P(J)} q(s)[v(S) - v(S - \{i\})] = \sum_{S \in P(J)} \sum_{i \in S} q(s)[v(S) - v(S - \{i\})] =$$

$$= \sum_{S \in P(J)} sq(s)v(S) - \sum_{S \in P(J)} q(s)\left[\sum_{i \in S} v(S - \{i\})\right] =$$

$$= \sum_{S \in P(J)} sq(s)v(S) - \sum_{S \in P(J) - J} q(s)sv(S) = nq(n)v(J) = v(J)$$

Axioma 2:

Se consideran los siguientes subconjuntos de $P(J)$:

$$\mathcal{S}_0 = \{S \in P(J)\colon i \notin S \text{ y } j \notin S\},\ \mathcal{S}_i = \{S \in P(J)\colon i \in S \text{ y } j \notin S\}$$

$$\mathcal{S}_j = \{S \in P(J)\colon i \notin S \text{ y } j \in S\},\ \mathcal{S}_{ij} = \{S \in P(J)\colon i \in S \text{ y } j \in S\}$$

Obsérvese que $S \in \mathcal{S}_i$ si y sólo si $S - \{i\} \in \mathcal{S}_0$. Además, para jugadores simétricos se tiene que

$$v(S - \{i\}) = v[(S - \{i, j\}) \cup \{j\}] = v[(S - \{i, j\}) \cup \{i\}] = v(S - \{j\}),\ \forall S \in \mathcal{S}_{ij}$$

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones se obtiene:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{S}(i)} q(s)[v(S) - v(S - \{i\})] =$$

$$= \sum_{S \in \mathcal{S}_{ij}} q(s)[v(S) - v(S - \{i\})] + \sum_{S \in \mathcal{S}_i} q(s)[v(S) - v(S - \{i\})] =$$

$$= \sum_{S \in \mathcal{S}_{ij}} q(s)[v(S) - v(S - \{i\})] + \sum_{S \in \mathcal{S}_0} q(s)[v(S \cup \{i\}) - v(S)] =$$

$$= \sum_{S \in \mathcal{S}_{ij}} q(s)[v(S) - v(S - \{j\})] + \sum_{S \in \mathcal{S}_0} q(s)[v(S \cup \{j\}) - v(S)] =$$

$$= \sum_{S \in \mathcal{S}_{ij}} q(s)[v(S) - v(S - \{j\})] + \sum_{S \in \mathcal{S}_j} q(s)[v(S) - v(S - \{j\})] =$$

$$= \sum_{S \in \mathcal{S}(j)} q(s)[v(S) - v(S - \{j\})] = \phi_j(v)$$

Axioma 3:

Para todo jugador i para el que se verifique que $v(S) = v(S - \{i\}) + v(\{i\})$, $\forall S \in S(i)$, se tiene que

$$\phi_i(v) = \sum_{S \in S(i)} q(s)[v(S) - v(S - \{i\})] = v(\{i\}) \left[\sum_{S \in S(i)} q(s) \right] = v(\{i\})$$

ya que

$$\sum_{S \in S(i)} q(s) = q(1) + (n-1)q(2) + \binom{n-1}{2} q(3) + \binom{n-1}{3} q(4) + \cdots +$$

$$+ \binom{n-1}{n-2} q(n-1) + \binom{n-1}{n-1} q(n) = \sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} q(s) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(s-1)!(n-s)!} q(s) = \sum_{s=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(s-1)!(n-s)!} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

Axioma 4:

Se consideran los juegos (J, v_1) y (J, v_2). Entonces $v_1 + v_2$ es otra función característica correspondiente a un juego con J jugadores y se verifica que

$$\forall S \in P(J),\ (v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$$

Por tanto, para cada jugador $i \in J$ se tiene que

$$\phi_i(v_1 + v_2) = \sum_{S \in P(J)} q(s)[(v_1 + v_2)(S) - (v_1 + v_2)(S - \{i\})] =$$

$$= \sum_{S \in P(J)} q(s)[v_1(S) + v_2(S) - v_1(S - \{i\}) - v_2(S - \{i\})] =$$

$$= \sum_{S \in P(J)} q(s)[v_1(S) - v_1(S - \{i\})] + \sum_{S \in P(J)} q(s)[v_2(S) - v_2(S - \{i\})] =$$

$$= \phi_i(v_1) + \phi_i(v_2)$$

Queda demostrado que la asignación $\phi(v)$ verifica los axiomas 1, 2, 3 y 4. Ahora falta demostrar la unicidad.

Demostraremos la unicidad en dos etapas: en la primera veremos que los axiomas 1, 2 y 3 determinan ϕ de manera única para una familia particular de juegos. En la segunda etapa veremos que existe una extensión única para el valor ϕ considerando ahora todos los juegos cooperativos con conjunto de jugadores J.

1. Sea $T \in P(J)$ cualquiera. Dicho conjunto es coalición ganadora del siguiente juego:

$$\forall S \in P(J),\ v_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } T \subseteq S \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De manera análoga, $\forall\, \alpha \in R$, el juego αv_T asigna un pago conjunto de α a la coalición ganadora y cero a las coaliciones que no contienen a T.

Consideremos el juego (J, v_T). Veamos que $\phi_i(v_T)$ es único para cada $i = 1, 2, ..., n$. En efecto: un jugador $i \notin T$ es un jugador pasivo pues $\forall\, S \in \mathcal{S}(i)$, o bien se cumple que $T \subseteq S$, en cuyo caso $v_T(S) = v_T(S - \{i\}) = 1$, o bien T no está contenido en S, en cuyo caso $v_T(S) = v_T(S - \{i\}) = 0$. Por tanto, se cumple que $v_T(S) = v_T(S - \{i\}) + v_T(\{i\})$, y el jugador i es pasivo.

Aplicando el axioma 3, si $i \notin T$, se verifica que $\phi_i(v_T) = v_T(\{i\}) = 0$.

Consideremos ahora dos jugadores $i, j \in T$. Para cualquier coalición S, con $i, j \notin S$, se verifica que

$$v_T(S \cup \{i\}) = v_T(S \cup \{j\}) = 0$$

ya que T no está contenido en $S \cup \{i\}$ ni en $S \cup \{j\}$.

El axioma 2 asegura que

$$\phi_i(v_T) = \phi_j(v_T)$$

Aplicando ahora el axioma 1 se tiene que:

$$1 = v_T(J) = \sum_{i \in J} \phi_i(v_T) = \sum_{i \in T} \phi_i(v_T) + \sum_{i \notin T} \phi_i(v_T) = \sum_{i \in T} \phi_i(v_T) = t\phi_i(v_T)$$

en donde $t = |T|$ es el número de jugadores que componen la coalición T.

Por tanto, $\phi_i(v_T)$ es único y viene dado por

$$\phi_i(v_T) = \begin{cases} 1/t, & \text{si} \quad i \in T \\ 0, & \text{si} \quad i \notin T \end{cases}$$

siendo $t = |T|$ el número de jugadores que componen la coalición T.

De la misma forma se demuestra que para todo $\alpha \in R$ se obtiene:

$$\phi_i(\alpha v_T) = \begin{cases} \alpha/t, & \text{si} \quad i \in T \\ 0, & \text{si} \quad i \notin T \end{cases}$$

siendo $t = |T|$ el número de jugadores que componen la coalición T.

2. Veamos ahora que existe una extensión única de la familia de juegos considerada en la etapa 1 a la familia de todos los juegos en los que el conjunto de jugadores es $J = \{1, 2, ..., n\}$.

Cada juego (J, v) está totalmente caracterizado por un vector de números reales con $k = 2^n - 1$ componentes, ya que en un conjunto de n jugadores hay k coaliciones posibles, excluyendo el conjunto vacío que siempre lleva asociado el valor cero. Por tanto, hay tantos juegos con n jugadores como elementos tiene el conjunto R^k.

Sea la familia de juegos considerada en la etapa 1:

$$B = \{v_T \in R^k\text{: } T \in P(J) - \varnothing\}$$

Como en $P(J) - \varnothing$ hay $k = 2^n - 1$ elementos, se verifica que el conjunto B contiene k vectores. Veamos que los k vectores de B son linealmente independientes. En efecto: Supongamos que fueran linealmente dependientes. Ello quiere decir que existe un vector $\lambda = (\lambda_T)_{T \in P(J) - \varnothing}$, siendo $0 \neq \lambda \in R^k$, tal que se verifica que

$$\sum_{T \in P(J) - \varnothing} \lambda_T v_T = 0$$

Sea $M \in P(J) - \varnothing$ la coalición con el menor número de elementos $m = |M|$ entre las coaliciones que tienen un coeficiente $\lambda_T \neq 0$ en la igualdad anterior correspondiente a la dependencia lineal. Se verifica que:

$$v_M(M) = -\frac{1}{\lambda_m}\left[\sum_{T \in P(J) - \varnothing - M} \lambda_T v_T(M)\right] = 1$$

Pero, por otra parte, tiene que verificarse que

$$\sum_{T \in P(J) - \varnothing - M} \lambda_T v_T(M) = 0$$

ya que ninguna coalición $T \neq M$, con $t \geqslant m$ puede estar contenida en M.

Por tanto, si suponemos dependencia lineal en el conjunto B llegamos a contradicción. En consecuencia, el conjunto B está formado por k vectores de R^k linealmente independientes y, por tanto, constituye una base.

Así, para cualquier juego (J, v) existe un único vector $\lambda = (\lambda_T)_{T \in P(J) - \varnothing} \in R^k$, tal que

$$v = \sum_{T \in P(J) - \varnothing} \lambda_T v_T$$

Aplicando reiteradamente el axioma 4 se llega a que

$$\phi_i(v) = \sum_{T \in P(J) - \varnothing} \phi_i(\lambda_T v_T)$$

con lo que queda probada la unicidad y con ello el teorema.

El valor de Shapley puede interpretarse como la contribución marginal esperada de cada jugador al entrar en una coalición al azar. En efecto, el factor $v(S) - v(S - \{i\})$ es la contribución marginal efectiva de i al incorporarse a $S - \{i\}$, mientras que el factor $q(s)$ es la probabilidad de que a i le toque incorporarse precisamente a $S - \{i\}$.

A continuación veremos la expresión concreta que toma el valor de Shapley $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$.

El valor de Shapley para $n = 2$

Sea el juego (J, v), en donde $J = \{1, 2\}$.

En este caso,

$$P(J) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

La familia de coaliciones a las que pertenece el jugador 1 es:

$$S(1) = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$$

La familia de coaliciones a las que pertenece el jugador 2 es:

$$S(2) = \{\{2\}, \{1, 2\}\}$$

Teniendo en cuenta que

$$q(s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}, \text{ para } 1 \leqslant s \leqslant n,\ s \in N$$

en este caso se tiene que

$$q(1) = \frac{0!1!}{2!} = \frac{1}{2}$$

$$q(2) = \frac{1!0!}{2!} = \frac{1}{2}$$

Teniendo en cuenta que, en general,

$$\phi_i(v) = \sum_{S \in S(i)} q(s)[v(S) - v(S - \{i\})]$$

siendo s el número de jugadores que componen la coalición S, en este caso se obtiene:

$$\phi_1(v) = q(1)[v(\{1\}) - v(\varnothing)] + q(2)[v(\{1, 2\}) - v(\{2\})] =$$

$$= \frac{1}{2}\, v(\{1\}) + \frac{1}{2}\,[v(\{1, 2\}) - v(\{2\})]$$

Obsérvese que los coeficientes de los elementos entre corchetes en este caso son $q(1)$ y $q(2)$, siendo ambos positivos y siendo su suma igual a uno.

$$\phi_2(v) = q(1)[v(\{2\}) - v(\varnothing)] + q(2)[v(\{1, 2\}) - v(\{1\})] =$$

$$= \frac{1}{2}\, v(\{2\}) + \frac{1}{2}\,[v(\{1, 2\}) - v(\{1\})]$$

Ejemplo 8.26

Calculemos el valor de Shapley del siguiente juego, con $J = \{1, 2\}$, siendo

$$v(\varnothing) = 0,\ v(\{1\}) = 5,\ v(\{2\}) = 7,\ v(\{1, 2\}) = 20$$

El valor de Shapley es

$$\phi(v) = (\phi_1(v),\ \phi_2(v))$$

en donde, tal como hemos obtenido anteriormente

$$\phi_1(v) = \frac{1}{2}\, v(\{1\}) + \frac{1}{2}\, [v(\{1, 2\}) - v(\{2\})] =$$

$$= \frac{1}{2}\, [5] + \frac{1}{2}\, [20 - 7] = \frac{18}{2} = 9$$

$$\phi_2(v) = \frac{1}{2}\, v(\{2\}) + \frac{1}{2}\, [v(\{1, 2\}) - v(\{1\})] =$$

$$= \frac{1}{2}\, [7] + \frac{1}{2}\, [20 - 5] = \frac{22}{2} = 11$$

Por tanto, el valor de Shapley del juego dado es

$$\phi(v) = (9, 11)$$

El valor de Shapley para $n = 3$

Supongamos ahora que tenemos el juego (J, v), en donde $J = \{1, 2, 3\}$.
En este caso,

$$P(J) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

La familia de coaliciones a las que pertenece el jugador 1 es

$$S(1) = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

De manera análoga, para los jugadores 2 y 3 se tiene que

$$S(2) = \{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$
$$S(3) = \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Como en este caso es $n = 3$, se tiene que

$$q(s) = \frac{(s - 1)!(3 - s)!}{3!}, \text{ para } 1 \leqslant s \leqslant 3,\ s \in N$$

por lo que

$$q(1) = \frac{0!\ 2!}{3!} = \frac{1}{3}$$

$$q(2) = \frac{1!\ 1!}{3!} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$q(3) = \frac{2!\ 0!}{3!} = \frac{1}{3}$$

Las expresiones para el valor de Shapley son, en este caso:

$$\phi_1(v) = q(1)[v(\{1\}) - v(\varnothing)] + q(2)[v(\{1, 2\}) - v(\{2\})] +$$
$$+ q(2)[v(\{1, 3\}) - v(\{3\})] + q(3)[v(\{1, 2, 3\}] - v(\{2, 3\})] =$$
$$= \frac{1}{3} v(\{1\}) + \frac{1}{6} [v(\{1, 2\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{6} [v(\{1, 3\}) - v(\{3\})] + \frac{1}{3} [v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\})]$$

Obsérvese que en este caso los coeficientes son 1/3, 1/6, 1/6 y 1/3. Son positivos y la suma de todos ellos es igual a uno.

Análogamente se obtiene, para los jugadores 2 y 3:

$$\phi_2(v) = q(1)[v(\{2\}) - v(\varnothing)] + q(2)[v(\{1, 2\}) - v(\{1\})] +$$
$$+ q(2)[v(\{2, 3\}) - v(\{3\})] + q(3)[v(\{1, 2, 3\}] - v(\{1, 3\})] =$$
$$= \frac{1}{3} v(\{2\}) + \frac{1}{6} [v(\{1, 2\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6} [v(\{2, 3\}) - v(\{3\})] + \frac{1}{3} [v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\})]$$

$$\phi_3(v) = q(1)[v(\{3\}) - v(\varnothing)] + q(2)[v(\{1, 3\}) - v(\{1\})] +$$
$$+ q(2)[v(\{2, 3\}) - v(\{2\})] + q(3)[v(\{1, 2, 3\}] - v(\{1, 2\})] =$$
$$= \frac{1}{3} v(\{3\}) + \frac{1}{6} [v(\{1, 3\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6} [v(\{2, 3\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{3} [v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\})]$$

Ejemplo 8.27

Calculemos ahora el valor de Shapley para el juego de la finca rústica del Ejemplo 8.2.

Se trata de un juego con tres jugadores y, por tanto, el valor de Shapley es

$$\phi(v) = (\phi_1(v),\ \phi_2(v),\ \phi_3(v))$$

en donde

$$\phi_1(v) = \frac{1}{3} v(\{1\}) + \frac{1}{6} [v(\{1, 2\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{6} [v(\{1, 3\}) - v(\{3\})] +$$
$$+ \frac{1}{3}[v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\})] = \frac{1}{3} [0] + \frac{1}{6} [0 - 0] + \frac{1}{6} [700 - 350] +$$
$$+ \frac{1}{3} [775 - 775] = \frac{350}{6}$$

$$\phi_2(v) = \frac{1}{3} v(\{2\}) + \frac{1}{6} [v(\{1, 2\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6} [v(\{2, 3\}) - v(\{3\})] +$$
$$+ \frac{1}{3}[v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\})] = \frac{1}{3} [0] + \frac{1}{6} [0 - 0] + \frac{1}{6} [775 - 350] +$$
$$+ \frac{1}{3} [775 - 700] = \frac{425}{6} + \frac{75}{3} = \frac{575}{6}$$

$$\phi_3(v) = \frac{1}{3}\, v(\{3\}) + \frac{1}{6}\,[v(\{1, 3\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}\,[v(\{2, 3\}) - v(\{2\})] +$$
$$+ \frac{1}{3}[v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\})] = \frac{1}{3}\,[350] + \frac{1}{6}\,[700 - 0] + \frac{1}{6}\,[775 - 0] +$$
$$+ \frac{1}{3}\,[775 - 0] = \frac{3.725}{6}$$

Por tanto, el valor de Shapley del juego es

$$\phi(v) = \left(\frac{350}{6}, \frac{575}{6}, \frac{3.725}{6}\right)$$

Ejemplo 8.28

Calculemos el valor de Shapley para el juego del departamento universitario del Ejemplo 8.5.

Se trata de un juego con tres jugadores y, por tanto, el valor de Shapley es

$$\phi(v) = (\phi_1(v),\ \phi_2(v),\ \phi_3(v))$$

en donde

$$\phi_1(v) = \frac{1}{3}\, v(\{1\}) + \frac{1}{6}\,[v(\{1, 2\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{6}\,[v(\{1, 3\}) - v(\{3\})] +$$
$$+ \frac{1}{3}[v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\})] = \frac{1}{3}\,[30] + \frac{1}{6}\,[50 - 0] + \frac{1}{6}\,[80 - 50] +$$
$$+ \frac{1}{3}\,[100 - 80] = 30$$

$$\phi_2(v) = \frac{1}{3}\, v(\{2\}) + \frac{1}{6}\,[v(\{1, 2\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}\,[v(\{2, 3\}) - v(\{3\})] +$$
$$+ \frac{1}{3}[v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\})] = \frac{1}{3}\,[0] + \frac{1}{6}\,[50 - 30] + \frac{1}{6}\,[80 - 50] +$$
$$+ \frac{1}{3}\,[100 - 80] = 15$$

$$\phi_3(v) = \frac{1}{3}\, v(\{3\}) + \frac{1}{6}\,[v(\{1, 3\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}\,[v(\{2, 3\}) - v(\{2\})] +$$
$$+ \frac{1}{3}[v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\})] = \frac{1}{3}\,[50] + \frac{1}{6}\,[80 - 30] + \frac{1}{6}\,[80 - 0] +$$
$$+ \frac{1}{3}\,[100 - 50] = 55$$

Por tanto, el valor de Shapley del juego es

$$\phi(v) = (30, 15, 55)$$

El valor de Shapley para $n = 4$

En este caso $J = \{1, 2, 3, 4\}$. Por tanto, para cada jugador $i = 1, 2, 3, 4$, la familia de coaliciones a las que pertenece el jugador i es:

$$S(1) = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

$$S(2) = \{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

$$S(3) = \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

$$S(4) = \{\{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

Los valores de $q(s)$ son, en este caso:

$$q(1) = \frac{0!\,3!}{4!} = \frac{1}{4},\ q(2) = \frac{1!\,2!}{4!} = \frac{1}{12},\ q(3) = \frac{2!\,1!}{4!} = \frac{1}{12},\ q(4) = \frac{3!0!}{4!} = \frac{1}{4}$$

Las expresiones para el valor de Shapley, en este caso, son:

$$\begin{aligned}
\phi_1(v) = {} & \frac{1}{4}\, v(\{1\}) + \frac{1}{12}\,[v(\{1, 2\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{12}\,[v(\{1, 3\}) - v(\{3\})] + \\
& + \frac{1}{12}[v(\{1, 4\}) - v(\{4\})] + \frac{1}{12}\,[v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3)] + \\
& + \frac{1}{12}\,[v(\{1, 2, 4\}) - v(\{2, 4\})] + \frac{1}{12}\,[v(\{1, 3, 4\}) - v(\{3, 4\})] + \\
& + \frac{1}{4}\,[v(\{1, 2, 3, 4\}) - v(\{2, 3, 4\})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(v) = {} & \frac{1}{4}\, v(\{2\}) + \frac{1}{12}\,[v(\{1, 2\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{12}\,[v(\{2, 3\}) - v(\{3\})] + \\
& + \frac{1}{12}[v(\{2, 4\}) - v(\{4\})] + \frac{1}{12}\,[v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3)] + \\
& + \frac{1}{12}\,[v(\{1, 2, 4\}) - v(\{1, 4\})] + \frac{1}{12}\,[v(\{2, 3, 4\}) - v(\{3, 4\})] + \\
& + \frac{1}{4}\,[v(\{1, 2, 3, 4\}) - v(\{1, 3, 4\})]
\end{aligned}$$

$$\phi_3(v) = \frac{1}{4}\, v(\{3\}) + \frac{1}{12}\,[v(\{1, 3\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{12}\,[v(\{2, 3\}) - v(\{2\})] +$$

$$+ \frac{1}{12}[v(\{3, 4\}) - v(\{4\})] + \frac{1}{12}\,[v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2)] +$$

$$+ \frac{1}{12}\,[v(\{1, 3, 4\}) - v(\{1, 4\})] + \frac{1}{12}\,[v(\{2, 3, 4\}) - v(\{2, 4\})] +$$

$$+ \frac{1}{4}\,[v(\{1, 2, 3, 4\}) - v(\{1, 2, 4\})]$$

$$\phi_4(v) = \frac{1}{4}\, v(\{1\}) + \frac{1}{12}\,[v(\{1, 4\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{12}\,[v(\{2, 4\}) - v(\{2\})] +$$

$$+ \frac{1}{12}[v(\{3, 4\}) - v(\{3\})] + \frac{1}{12}\,[v(\{1, 2, 4\}) - v(\{1, 2)] +$$

$$+ \frac{1}{12}\,[v(\{1, 3, 4\}) - v(\{1, 3\})] + \frac{1}{12}\,[v(\{2, 3, 4\}) - v(\{2, 3\})] +$$

$$+ \frac{1}{4}\,[v(\{1, 2, 3, 4\}) - v(\{1, 2, 3\})]$$

De nuevo se observa que para cada $i = 1, 2, 3, 4$, la suma de los coeficientes es igual a uno:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = 1$$

Ejemplo 8.29

Ahora vamos a calcular el valor de Shapley para el juego de patentes del Ejemplo 8.4.

Se trata de un juego con cuatro jugadores, por lo que

$$\phi(v) = (\phi_1(v),\ \phi_2(v),\ \phi_3(v),\ \phi_4(v))$$

en donde, tal como acabamos de ver:

$$\phi_1(v) = \frac{1}{4}\, v(\{1\}) + \frac{1}{12}\,[v(\{1, 2\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{12}\,[v(\{1, 3\}) - v(\{3\})] +$$

$$+ \frac{1}{12}\,[v(\{1, 4\}) - v(\{4\})] + \frac{1}{12}\,[v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\})] +$$

$$+ \frac{1}{12}\,[v(\{1, 2, 4\}) - v(\{2, 4\})] + \frac{1}{12}\,[v(\{1, 3, 4\}) - v(\{3, 4\})] +$$

$$+ \frac{1}{4}\,[v(\{1, 2, 3, 4\}) - v(\{2, 3, 4\})] = \frac{1}{4}\,[0] + \frac{1}{12}\,[0 - 0] +$$

$$+ \frac{1}{12}[6{,}5 - 0] + \frac{1}{12}[6{,}5 - 0] + \frac{1}{12}[10 - 6{,}5] + \frac{1}{12}[10 - 6{,}5] +$$

$$+ \frac{1}{12}[10 - 0] + \frac{1}{4}[13 - 10] = \frac{13}{4}$$

$$\phi_2(v) = \frac{1}{4}v(\{2\}) + \frac{1}{12}[v(\{1, 2\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{12}[v(\{2, 3\}) - v(\{3\})] +$$

$$+ \frac{1}{12}[v(\{2, 4\}) - v(\{4\})] + \frac{1}{12}[v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\})] +$$

$$+ \frac{1}{12}[v(\{1, 2, 4\}) - v(\{1, 4\})] + \frac{1}{12}[v(\{2, 3, 4\}) - v(\{3, 4\})] +$$

$$+ \frac{1}{4}[v(\{1, 2, 3, 4\}) - v(\{1, 3, 4\})] = \frac{1}{4}[0] + \frac{1}{12}[0 - 0] +$$

$$+ \frac{1}{12}[6{,}5 - 0] + \frac{1}{12}[6{,}5 - 0] + \frac{1}{12}[10 - 6{,}5] + \frac{1}{12}[10 - 6{,}5] +$$

$$+ \frac{1}{12}[10 - 0] + \frac{1}{4}[13 - 10] = \frac{13}{4}$$

$$\phi_3(v) = \frac{1}{4}v(\{3\}) + \frac{1}{12}[v(\{1, 3\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{12}[v(\{2, 3\}) - v(\{2\})] +$$

$$+ \frac{1}{12}[v(\{3, 4\}) - v(\{4\})] + \frac{1}{12}[v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\})] +$$

$$+ \frac{1}{12}[v(\{1, 3, 4\}) - v(\{1, 4\})] + \frac{1}{12}[v(\{2, 3, 4\}) - v(\{2, 4\})] +$$

$$+ \frac{1}{4}[v(\{1, 2, 3, 4\}) - v(\{1, 2, 4\})] = \frac{1}{4}[0] + \frac{1}{12}[6{,}5 - 0] +$$

$$+ \frac{1}{12}[6{,}5 - 0] + \frac{1}{12}[0 - 0] + \frac{1}{12}[10 - 0] + \frac{1}{12}[10 - 6{,}5] +$$

$$+ \frac{1}{12}[10 - 6{,}5] + \frac{1}{4}[13 - 10] = \frac{13}{4}$$

$$\phi_4(v) = \frac{1}{4}v(\{4\}) + \frac{1}{12}[v(\{1, 4\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{12}[v(\{2, 4\}) - v(\{2\})] +$$

$$+ \frac{1}{12}[v(\{3, 4\}) - v(\{3\})] + \frac{1}{12}[v(\{1, 2, 4\}) - v(\{1, 2\})] +$$

$$+ \frac{1}{12}[v(\{1, 3, 4\}) - v(\{1, 3\})] + \frac{1}{12}[v(\{2, 3, 4\}) - v(\{2, 3\})] +$$

$$+\frac{1}{4}[v(\{1, 2, 3, 4\}) - v(\{1, 2, 3\})] = \frac{1}{4}[0] + \frac{1}{12}[6{,}5 - 0] +$$

$$+\frac{1}{12}[6{,}5 - 0] + \frac{1}{12}[0 - 0] + \frac{1}{12}[10 - 0] + \frac{1}{12}[10 - 6{,}5] +$$

$$+\frac{1}{12}[10 - 6{,}5] + \frac{1}{4}[13 - 10] = \frac{13}{4}$$

Por tanto, el valor de Shapley del juego es

$$\phi(v) = \left(\frac{13}{4}, \frac{13}{4}, \frac{13}{4}, \frac{13}{4}\right)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

8.1 El jugador 1 tiene un coche que le ha correspondido en un concurso, y que no tiene ningún valor para él pues no sabe conducir ni tiene intención de aprender. Dicho jugador quiere vender el coche. Los jugadores 2 y 3 son potenciales compradores, que valoran el coche en 120 y en 100 unidades monetarias, respectivamente. Si el jugador 1 vende al jugador 2 el coche al precio p, el jugador 1 obtiene un beneficio igual a p, mientras que el jugador 2 obtiene un beneficio de $120 - p$. Un razonamiento similar se aplica a los jugadores 1 y 3. Represente el juego en forma coalicional.

8.2 Represente gráficamente el triángulo de imputaciones del siguiente juego:

$$v(\emptyset) = 0,\ v(\{1\}) = 2,\ v(\{2\}) = 2,\ v(\{3\}) = 1$$

$$v(\{1, 2\}) = 4,\ v(\{1, 3\}) = 3,\ v(\{2, 3\}) = 4,\ v(\{1, 2, 3\}) = 7$$

8.3 *(Rafels* et al.*, 1999).* Cuatro empresas 1, 2, 3 y 4, que se dedican a la producción de tapones y envases, van a vender su producto a un grupo de cooperativas productoras de vino. Se considera que los productos a vender son botellas, donde una botella está formada por un tapón y un envase (es decir, tapones y envases son complementarios). El número de tapones y envases producidos por una empresa no es el mismo, ya que las empresas disponen de un número diferente de máquinas. Así, cada empresa dispone de las siguientes máquinas:

Empresas	Máquinas de tapones	Máquinas de envases
1	3	2
2	1	3
3	0	4
4	1	2

Una máquina de tapones produce 200.000 unidades al año, mientras que una máquina de envases produce 100.000 unidades al año.

Durante una reunión del sector productor de botellas, las cuatro empresas se plantean actuar conjuntamente para poder vender una mayor número de botellas a las cooperativas.

Representar la situación mediante un juego cooperativo, en donde $v(S)$ representa el número de botellas (en miles de unidades) que puede vender a las cooperativas una coalición S de empresas. Determine si el core de este juego es vacío, es unitario o tiene infinitos puntos.

8.4 Calcule el core y represéntelo a partir del triángulo de imputaciones para los juegos de los Ejemplos 1.23 y 1.24.

8.5 Un juego (J, v) es simple si $v(S)$ es cero o uno para cada coalición S, y $v(J) = 1$. Una coalición S para la cual $v(S) = 1$ se llama una coalición ganadora. Un jugador que pertenece a todas las coaliciones ganadoras se llama jugador veto. Se pide:

a) Probar que si no hay ningún jugador veto entonces el core es vacío.
b) Probar que si el conjunto de jugadores veto es no vacío entonces el core es el conjunto de distribuciones de pago que dan cero a todos los demás jugadores.

8.6 Calcule el core y el *nucleolus* del juego del Ejemplo 8.6.

8.7 *(Eichberger, 1993).* Tres gestores de fondos de inversión consideran las posibilidades de inversión para un año. El gestor de fondos 1 tiene 3 millones de dólares para invertir, el gestor 2 tiene 1 millón de dólares y el gestor 3 tiene 2 millones. Existe una posibilidad de inversión disponible de acuerdo con los datos de rendimientos siguientes:

Depósito	**Tipo de interés**
Inferior a 2 millones de dólares	8%
Mayor o igual a 2 mill. y menor de 5 m.	9%
5 millones o más	10%

Represente el juego en forma coalicional. Calcule el core, el *nucleolus* y el valor de Shapley.

8.8 Calcule el core, el *nucleolus* y el valor de Shapley del juego del Ejemplo 1.22.

8.9 Se consideran tres países negociando un acuerdo comercial. El beneficio conjunto de un acuerdo para las diferentes coaliciones es el siguiente:

$$v(\varnothing) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1, 2\}) = 0{,}6x,\ v(\{1, 3\}) = 0{,}6x,\ v(\{2, 3\}) = 0{,}3x,\ v(\{1, 2, 3\}) = x$$

Se pide:

a) Obtener el core del juego mediante representación gráfica a partir del triángulo de las imputaciones. ¿Depende el tamaño del core de x?
b) Calcular el valor de Shapley para este juego. ¿Pertenece al core dicho valor? ¿Depende de x que el valor de Shapley pertenezca o no al core en este caso?

8.10 Calcule el core y el valor de Shapley del juego de la bancarrota del Ejemplo 8.7.

8.11 Calcule el *nucleolus* del siguiente juego utilizando el método de programación lineal reiterada.

$$v(\varnothing) = v(\{i\}) = 0, \text{ para } i = 1, 2, 3, 4,\ v(\{i, j\}) = 50,\ \forall\, i \neq j$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 95,\ v(\{1, 2, 4\}) = 85,\ v(\{1, 3, 4\}) = 80,\ v(\{2, 3, 4\}) = 65$$

$$v(\{1, 2, 3, 4\}) = 110$$

Bibliografía

Bierman, H. S., Fernández, L. (1998). *Game Theory with Economic Applications*. Segunda Edición. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley.

Binmore, K. G. (1992). *Fun and Games*. Lexington, Massachusetts, D.C. Heath. (Traducción al español: *Teoría de Juegos*. Madrid: McGraw-Hill, 1994).

Borel, E. (1921). «La Théorie du Jeu et les Equations Intégrales à Noyau Symétrique». *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 173, 1304-1308. (Traducido al inglés como «The Theory of Play and Integral Equations with Skew Symmetric Kernels», *Econometrica,* 21 (1953), 97-100).

Campbell, D. E. (1995). *Incentives*, *Motivation and the Economics of Information*. Cambridge, Cambridge University Press.

Cournot, A. A. (1838). *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*. Paris: Hachette. (Traducido al inglés como *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*. Nueva York, Macmillan, 1897).

Curiel, I. (1997). *Cooperative Game Theory and Applications*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Dixit, A., Nalebuff, B. (1991). *Pensar Estratégicamente*. Barcelona, Antoni Bosch, editor.

Dixit, A., Skeath, S. (1999). *Games of Strategy*. Nueva York, W. W. Norton & Company.

Driessen, T. (1988). *Cooperative Games*, *Solutions and Applications*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Dutta, P. K. (1999). *Strategies and Games*. *Theory and Practice*. Cambridge, Massachusetts, MIT Press.

Edgeworth, F. Y. (1881). *Mathematical Psychics*. Londres, Kegan Paul.

Eichberger, J. (1993). *Game Theory for Economists*. San Diego, California, Academic Press.

Friedman, J. W. (1986). *Game Theory with Applications to Economics*. Nueva York, Oxford University Press. (Traducción al español: *Teoría de juegos con aplicaciones a la economía*. Barcelona, Antoni Bosch, editor, 1996).

Fudenberg, D., Tirole, J. (1991). *Game Theory*. Cambridge, Massachusetts, MIT Press.

García, J., Martínez, E., Redondo, R., del Campo, C. (2002). *Métodos de Decisión*. Madrid, Prentice Hall.

Gardner, R. (1995). *Games for Business and Economics*. Nueva York, John Wiley and Sons. (Traducción al español: *Juegos para Empresarios y Economistas*. Barcelona, Antoni Bosch, editor, 1996).

Ghemawat, P. (1997). *Games Businesses Play*. *Cases and Models*. Cambridge, Massachusetts, MIT Press.

Gibbons, R (1992). *Game Theory for Applied Economists*. Princeton, Princeton University Press. (Traducción al español: *Un Primer Curso de Teoría de Juegos*. Barcelona, Antoni Bosch, editor, 1993).

Gintis, H. (2000). *Game Theory Evolving*. Princeton, New Jersey, Princeton University Press.

Hardin, G. (1968). «The Tragedy of the Commons». *Science*, 162, 1243-1248.

Henderson, J. M., Quandt, R. E. (1980). *Microeconomic Theory. A Mathematical Approach*. McGraw-Hill (3.ª edición revisada y puesta al día). (Traducción al español: *Teoría Microeconómica*. Ariel Economía, 1985).

Kreps, D. M. (1990a). *Game Theory and Economic Modelling*. Oxford, Clarendon Press. (Traducción al español: *Teoría de Juegos y Modelación Económica*. México, Fondo de Cultura Económica, 1994).

Kreps, D. M. (1990b). *A Course in Microeconomic Theory*. Nueva York, Harvester Wheatsheaf. (Traducción al español: *Curso de Teoría Microeconómica*. Madrid, McGraw-Hill, 1995).

Krishna, V. (2002). *Auction theory*. San Diego, California, Academic Press.

Kuhn, H. W. (ed) (1997). *Classics in Game Theory*. Princeton, New Jersey, Princeton University Press.

Macho, I., Pérez, D. (1994). *Introducción a la Economía de la Información*. Barcelona, Ariel.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory*. Nueva York: Oxford University Press.

McRae, N. (1992). *John von Neumann*. Nueva York, Pantheon Books.

Morrow, J. D. (1994). *Game Theory for Political Scientists*. Princeton, New Jersey, Princeton University Press.

Moulin, H. (1995). *Cooperative Microeconomics: A Game Theoretic Introduction.* Princeton, New Jersey, Princeton University Press.

Moulin, H. (2003). *Fair Division and Collective Welfare*. Cambridge, Massachusetts, MIT Press.

Myerson, R. B. (1991). *Game Theory*: *Analysis of Conflict*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Nasar, S. (1998). *A Beautiful Mind*. Simon & Schuster (Traducción al español: *Una Mente Prodigiosa*. Barcelona, Mondadori, 2001).

O'Neill, B. (1982). «A Problem of Rights Arbitration from the Talmud». *Mathematical Social Sciences*, 2, 345-371.

Osborne, M. J., Rubinstein, A. (1994). *A Course in Game Theory*. Cambridge, Massachusetts, MIT Press.

Owen, G. (1975). «The Core of Linear Production Games». *Mathematical Programming*, 9, 358-371.

Owen, G. (1995). *Game Theory*. Tercera edición. San Diego, California, Academic Press.

Poundstone, W. (1992). *Prisoner's Dilemma*. Nueva York, Doubleday. (Traducción al español: *El dilema del prisionero*. Madrid, Alianza Editorial, 1995).

Rafels, C., Izquierdo, J. M., Marín, J., Martínez de Albeniz, F. J., Núñez, M., Ybern, N. (1999). *Jocs Cooperatius i Aplicacions Econòmiques*. Barcelona, Edicions Universitat de Barcelona.

Rasmusen, E. (1993). *Games and Information*. Oxford, Blackwell.

Ritzberger, K. (2002). *Foundations of Non-Cooperative Game Theory*. Oxford, Oxford University Press.

Rives, N. W. (1975). «On the history of the mathematical theory of games». *History of Political Economy*, 7, n.º 4.

Romp, G. (1997). *Game Theory. Introduction and Applications*. Oxford, Oxford University Press.

Schmeidler, D. (1969). «The Nucleolus of a Characteristic Function Game». *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17, 1163-1170.

Selten, R. (1982). *Models of Strategic Rationality*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Shapley, L. S. (1953). «A Value for n-Person Games». En Kuhn, Tucker (ed.). *Contributions to the Theory of Games II*, pp. 307-317. Princeton, New Jersey, Princeton University Press.

Shapley L. S. (1987). *Game Theory*. Technical Report. Department of Mathematics. University of California, Los Angeles.

Tirole, J. (1988). *The Theory of Industrial Organization*. MIT Press. (Traducción al español: *Teoría de la Organización Industrial*. Barcelona, Ariel Economía, 1990).

Van Damme, E. (1987). *Stability and Perfection of Nash Equilibria*. Berlin, Springer-Verlag.

Varian, H. (1992). *Microeconomic Analysis*. Tercera edición. W. W. Norton & Company, Inc. (Traducción al español: *Análisis Microeconómico*. Barcelona, Antoni Bosch, editor, 1992).

Vega-Redondo, F. (2000). *Economía y Juegos*. Barcelona, Antoni Bosch, editor.

Vives, X. (2001). *Precios y Oligopolio. Ideas Clásicas y Herramientas Modernas*. Barcelona, Antoni Bosch, editor.

Von Neumann, J. (1928). «Zur Theorie der Gesellschaftsspiele». *Mathematische Annalen*, 100, 295-320.

Von Neumann, J., Morgenstern, O. (1953). *Game Theory and Economic Behavior*. Tercera edición. Princeton, New Jersey, Princeton University Press.

Wolfstetter, E. (2000). *Topics in Microeconomics*. Cambridge, Cambridge University Press.

Zermelo, E. (1913). «Über eine Anwendung der Menhenlehre auf die Theorie des Schachspiels». *Proceedings of the Fith International Congress of Mathematicians*, 2, 501-504. Volumen II. Hobson, E. W., Love, A. E. H. ed. Cambridge, Cambridge University Press.

Índice analítico

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

L

M

N